

Презентация Преобразование плоскости



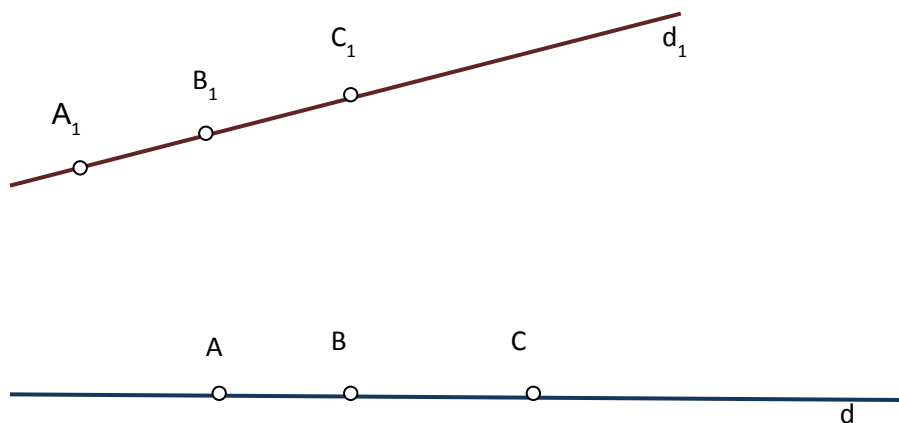
ГЕОМЕТРИЯ 9 КЛАСС

I - группа. Свойства движения



Теорема 1

При движении точки, лежащие на прямой, переходят в точки, лежащие на прямой, причем порядок взаимного расположения точек на прямой сохраняется.



Доказательство:

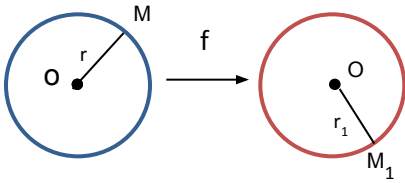
1. Пусть точки A , B и C принадлежат прямой d , причем $A-B-C \rightarrow AB+BC=AC$
2. $f(A)=A_1$, $f(B)=B_1$, $f(C)=C_1$, т.к. f - движение, то $A_1B_1=AB$, $B_1C_1=BC$, $A_1C_1=AC \rightarrow A_1B_1+B_1C_1=AB+BC=AC=A_1C_1 \rightarrow A_1B_1+B_1C_1=A_1C_1 \rightarrow A_1, B_1$ и C_1 принадлежат некоторой прямой d_1 и $A_1-B_1-C_1$.

Следствие 1

При движении прямые переходят в прямые, лучи - в лучи, отрезок заданной длины - в отрезок той же длины.

Теорема 2

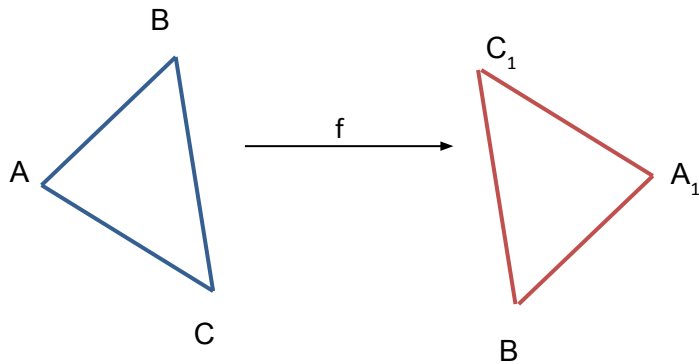
При движении окружность переходит в окружность того же радиуса.



1. f - некоторое движение, $f(O)=O_1$
2. M - произвольная точка окружности, следовательно $f(M)=M_1$, по определению движения
 $O_1M_1=OM=r$, таким образом при заданном движении окружность с центром O и радиусом r перейдет в окружность с центром O_1 и тем же радиусом r .

Теорема 3

При движении треугольник отображается на равный ему треугольник.



При движении отрезок переходит в отрезок равный данному.
Следовательно, треугольник переходит в треугольник равный данному (по третьему признаку).

Следствие 2

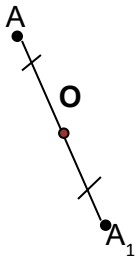
При движении угол переходит в равный ему угол, фигура переходит в равную фигуру.

II-группа. Центральная симметрия



Определение.

Точки A и A_1 называются симметричными относительно точки O , если точка O принадлежит отрезку AA_1 и этой точкой отрезок AA_1 делится пополам.



$$Z_0(A) = A_1$$

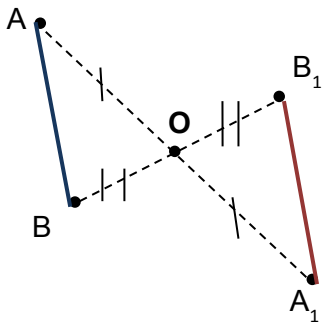
O - центр симметрии

A и A_1 - центрально симметричные.

Т.к. точка A - произвольная точка плоскости, то отображение Z_0 задано на всей плоскости. Это отображение называется симметрией относительно точки O (центральной симметрией).

Теорема

Симметрия относительно точки является движением.

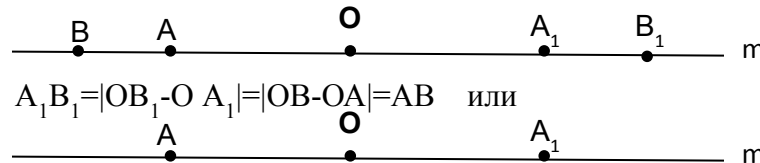


Доказательство:

Точки A , B и O не лежат на одной прямой

- $Z_0(A) = A_1, Z_0(B) = B_1 \rightarrow AO = A_1O, BO = B_1O, \angle AOB = \angle A_1OB_1$ - как вертикальные;
- Следовательно, $\triangle AOB = \triangle A_1OB_1$ по двум сторонам и углу между ними (II признак);
- Из равенства треугольников следует, что $AB = A_1B_1$.

Точки A , B и O лежат на одной прямой

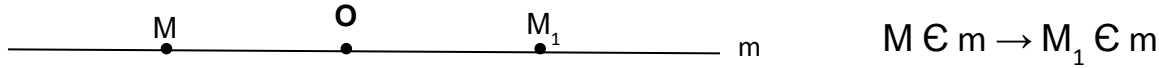


$$A_1B_1 = |OB_1 - OA_1| = |OB - OA| = AB \quad \text{или}$$

$$A_1B_1 = A_1O + OB_1 = OA + OB = AB, \quad \text{а следовательно } Z_0 \text{ - движение.}$$

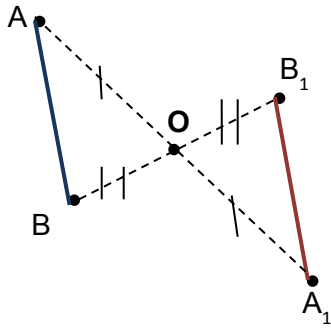
Свойства центральной симметрии

1. Центр симметрии точка O , единственная неподвижная точка, т.е. $Z_o(O) = O$
2. Прямая, проходящая через центр симметрии переходит в себя.



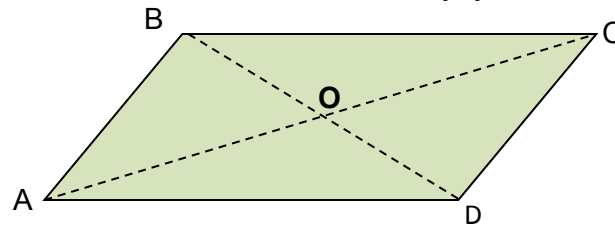
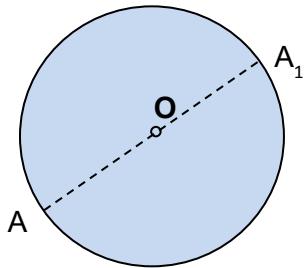
3. Прямая, не проходящая через центр симметрии, переходит в параллельную ей прямую (следует из равенства накрест лежащих углов при прямых AB и A_1B_1 , секущей BB_1)

$$O \notin AB; Z_o(AB) = A_1B_1, AB \parallel A_1B_1$$



4. Центральная симметрия изменяет направление

$$\overrightarrow{AB} \updownarrow \overrightarrow{A_1B_1}$$



$$Z_o(A) = A_1, \quad Z_o(A_1) = A$$

$$Z_o(A) = C, \quad Z_o(B) = D, \quad Z_o(C) = A, \quad Z_o(D) = B$$

Определение:

Если некоторая фигура при симметрии относительно точки O переходит в себя, то точка O называется центром симметрии этой фигуры, а фигура называется симметричной относительно точки O .

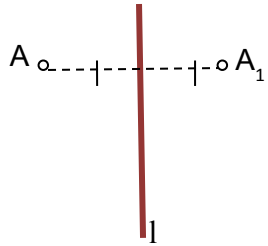
$$Z_o(\Phi) = \Phi$$

III-группа. Осевая симметрия.



Определение.

Точки A и A_1 называются симметричными относительно прямой l , если отрезок AA_1 перпендикулярен прямой l и делится этой прямой пополам.



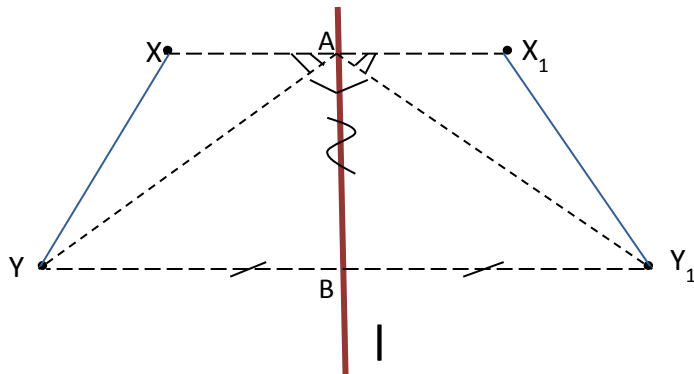
$S_l(A) = A_1$
 A и A_1 - симметричные точки.
 l - ось симметрии

Т.к. точка A - произвольная точка плоскости, то отображение S_l задано на всей плоскости. Это отображение называется симметрией относительно прямой l (осевой симметрией).

Теорема

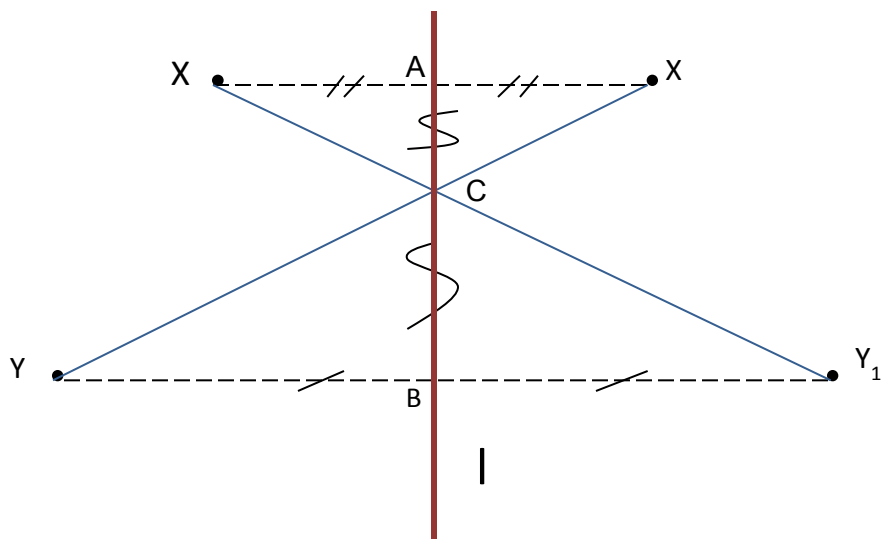
Симметрия относительно прямой является движением

X и Y - произвольные точки плоскости, лежащие в одной полуплоскости относительно прямой l .



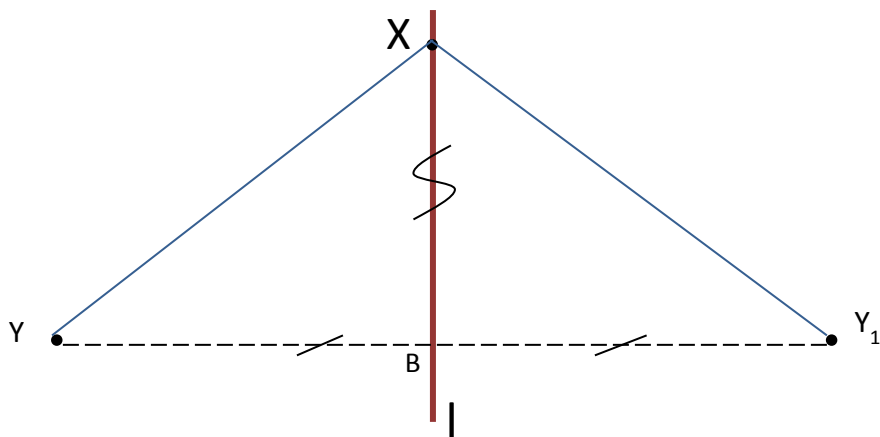
- $S_l(X) = X_1$, $S_l(Y) = Y_1$, $XX_1 \cap l = A$, $YY_1 \cap l = B$
- $\triangle ABY$ и $\triangle ABY_1$ - прямоугольные (по определению осевой симметрии)
 $\triangle ABY = \triangle ABY_1$ - по двум катетам $\rightarrow AY = AY_1$ и $\angle YAB = \angle Y_1AB$
- Рассмотрим $\triangle XAY$ и $\triangle X_1AY_1$:
 $XA = X_1A$ (по определению осевой симметрии)
 $AY = AY_1$ (по доказанному)
 $\angle XAY = \angle X_1AY_1$ (как разность прямых и равных углов)
 Следовательно, $\triangle XAY = \triangle X_1AY_1$ (по двум сторонам и углу между ними, I признак)
- Из равенства треугольников следует равенство отрезков XY и X_1Y_1 .

X и Y -произвольные точки плоскости, лежащие в разных полуплоскостях относительно прямой l.



Равенство отрезков XY и X_1Y_1 следует из равенства по двум катетам прямоугольных треугольников X_1CA и XCA , YCB и Y_1CB .

X и Y -произвольные точки плоскости, одна из точек лежит на прямой l.



$S_1(X) = X$, $S_1(Y) = Y_1 \rightarrow \Delta XYB = \Delta XY_1B$ (по двум катетам) $\rightarrow XY = XY_1$

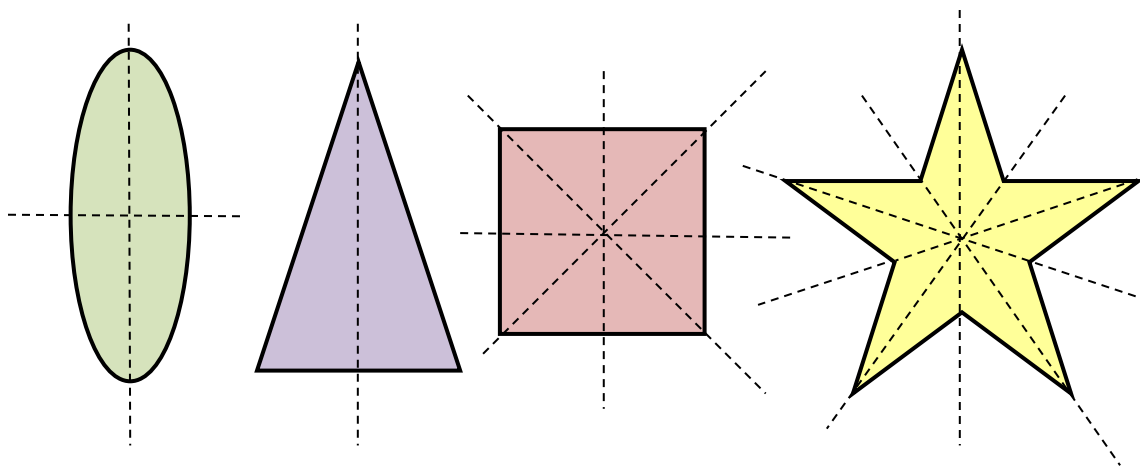
Т.о. осевая симметрия - движение

Свойства осевой симметрии

1. $S_1(l) = l$ - любая точка оси симметрии - неподвижна (переходит сама в себя);
2. Прямая перпендикулярная оси симметрии переходит сама в себя;
3. Соответствующие прямые пересекаются на оси симметрии или параллельны;

Определение

Если некоторая фигура при симметрии относительно прямой m переходит в себя, то прямая m называется осью симметрии этой фигуры, а фигура называется симметричной относительно прямой m .



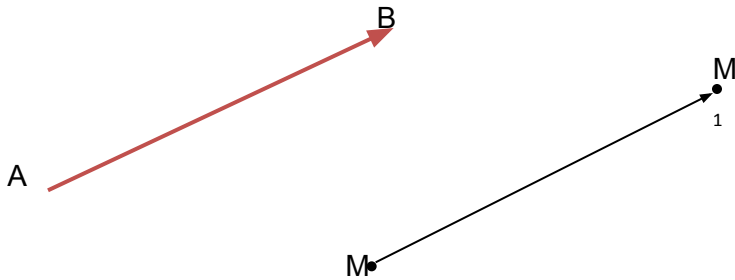
$$S_m(\Phi) = \Phi$$

IV группа. Параллельный перенос.



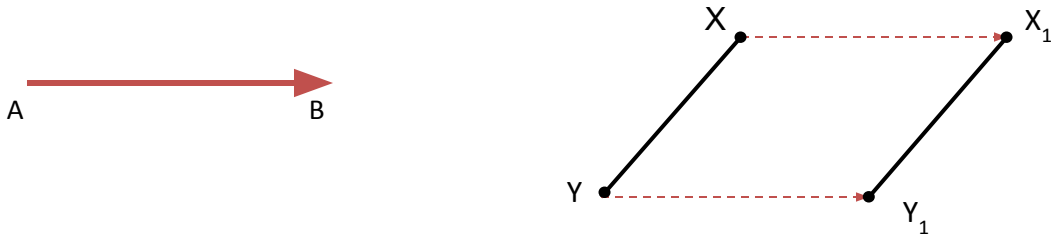
Определение.

Параллельным переносом на заданный вектор \overrightarrow{AB} называется преобразование плоскости, при котором каждая точка плоскости M переходит в M_1 так, что $\overrightarrow{MM_1} = \overrightarrow{AB}$ и обозначается $P_{\overrightarrow{AB}}(M) = M_1$.



Теорема

Параллельный перенос является движением

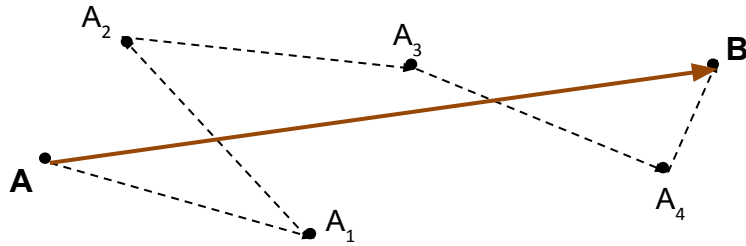


1. $P_{\overrightarrow{AB}}(X) = X_1$, $P_{\overrightarrow{AB}}(Y) = Y_1 \rightarrow XX_1 \parallel AB$, $XX_1 = AB$; $YY_1 \parallel AB$, $YY_1 = AB$
2. Следовательно, $XX_1 \parallel YY_1$ и $XX_1 = YY_1$
3. YXX_1Y_1 - параллелограмм по признаку
4. По свойству параллелограмма $XY = X_1Y_1$, значит **параллельный перенос - движение.**

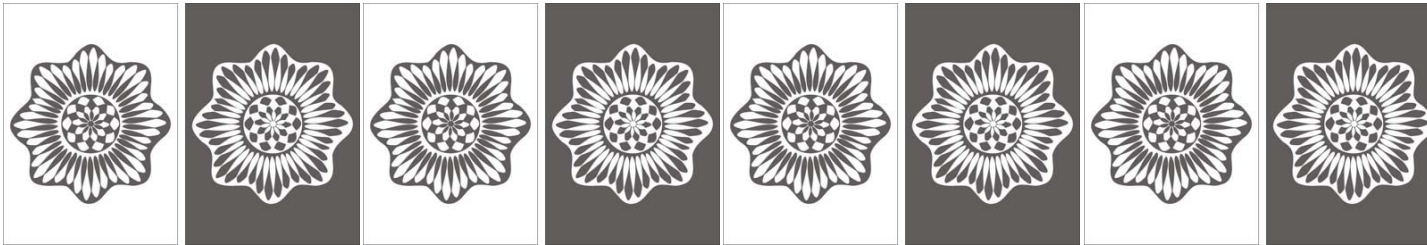
Свойства параллельного переноса

1. Параллельный перенос не имеет неподвижных точек;
2. Прямые, параллельные направлению переноса, переходят в себя;
3. Параллельный перенос сохраняет направление, т.е. если $A \rightarrow A_1$ и $B \rightarrow B_1$, то лучи AB и A_1B_1 сонаправлены. Обратное: движение, сохраняющее направление является параллельным переносом.
4. Композиция (последовательное выполнение) двух параллельных переносов - параллельный перенос, причем параллельные переносы - перестановочны: $P_a \circ P_b = P_b \circ P_a = P_{a+b}$

Следствие: Любую композицию параллельных переносов можно заменить одним параллельным переносом (по правилу многоугольника)



Орнамент. Это узор, который получается, если некоторую фигуру подвергнуть параллельному переносу несколько раз.



V группа. Поворот.



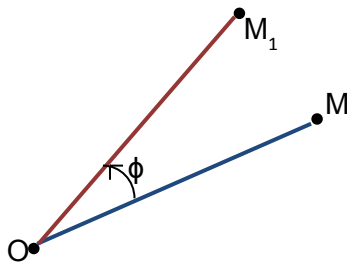
Определение.

Отметим на плоскости точку O (центр поворота) и угол ϕ (угол поворота).

Преобразование плоскости, при котором каждая точка M плоскости переходит в точку M_1 такую, что угол между лучами OM и OM_1 равен ϕ , а $OM=OM_1$, называется поворотом около точки O на угол ϕ .

$\phi > 0$ - если поворот совершается против часовой стрелки

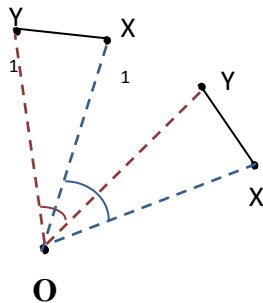
$\phi < 0$ - если поворот совершается по часовой стрелки



$$R_O^\phi(M) = M_1, \quad \phi > 0$$

Теорема.

Поворот является движением.

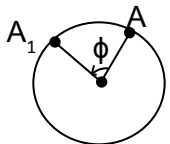


- $R_O^\phi(X) = X_1, R_O^\phi(Y) = Y_1 \rightarrow OX=OX_1, OY=OY_1$
- $\angle XOY = \phi - \angle X_1OY, \angle X_1OY_1 = \phi - \angle X_1OY \rightarrow \angle XOY = \angle X_1OY_1$
- Значит, $\triangle XOY = \triangle X_1OY_1$ - по двум сторонам и углу между ними, тогда $XY = X_1Y_1$
Т.к. точки X и Y произвольные, следовательно, **поворот- движение**

Свойства поворота.

1. Поворот вокруг точки O на 180° является центральной симметрией относительно точки O .
2. Центр вращения - единственная неподвижная точка, $R_O^\varphi(O)=O$.

Окружности с центрами в точке O (центре поворота) - переходят сами в себя.



3. Если $R_O^\varphi(A)=A_1$, $R_O^\varphi(B)=B_1$, то угол между AB и A_1B_1 равен φ ;
4. Композиция двух вращений с общим центром на углы α и β соответственно является вращением с тем же центром на угол $\alpha+\beta$. При этом вращения перестановочны.

$$R_O^\alpha \circ R_O^\beta = R_O^\beta \circ R_O^\alpha = R_O^{\alpha+\beta}$$

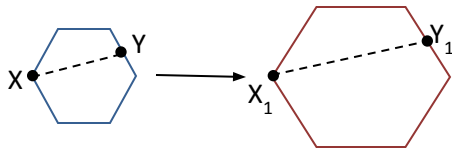
5. Тожественное преобразование можно рассматривать как поворот на нулевой угол.
6. Композиция двух вращений с центрами O_1 и O_2 на углы α и β , соответственно, является вращением с новым центром O на угол $\alpha+\beta$, если $\alpha+\beta \neq 360^\circ$, и параллельным переносом, если $\alpha+\beta=360^\circ$.

VI группа. Подобие.



Определение.

Преобразование фигуры F в фигуру F_1 называется преобразованием подобия, если при этом преобразовании расстояния между точками изменяются в одно и тоже число раз.



$P_k(F)=F_1$, P_k - подобие с коэффициентом k

$$f: X \longrightarrow X_1$$

$$f: Y \longrightarrow Y_1, \quad X_1Y_1 = k \cdot XY, \text{ где } k > 0 \text{ - является одним и тем же для всех точек } X \text{ и } Y.$$

k - коэффициент подобия, а фигуры $F \sim F_1$ (подобны).

Подобие не является движением, т.к. расстояния изменяются.

Свойства подобия.

1. Преобразование подобия переводит прямую в прямую, отрезок - в отрезок, луч - в луч.

Действительно, если точки A, B, C лежат на одной прямой, то $AC=AB+BC$, тогда $A_1B_1 = k \cdot AB = k \cdot (AC+CB) = k \cdot AC + k \cdot CB = A_1C_1 + C_1B_1 \rightarrow A_1, C_1, B_1$ - лежат на прямой и порядок расположения точек сохраняется.

2. Преобразование подобия сохраняет углы.

3. Преобразование подобия переводит треугольник в треугольник. Соответственные стороны этих треугольников пропорциональны, а соответственные углы равны.

4. Преобразование подобия переводит окружность в окружность.

5. Преобразование, обратное преобразованию подобия с коэффициентом k , есть преобразование подобия с коэффициентом, равным $\frac{1}{k}$

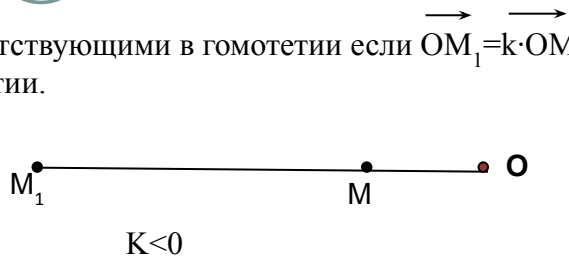
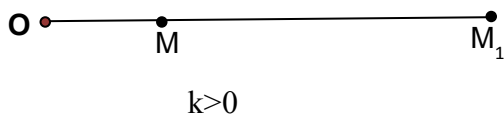
6. Композиция преобразований подобия с коэффициентами k_1 и k_2 есть преобразование подобия с коэффициентом $k=k_1 \cdot k_2$

VII группа. Гомотетия.



Определение.

Зададим точку O и число $k \neq 0$. Точки M и M_1 являются соответствующими в гомотетии если $\vec{OM}_1 = k \cdot \vec{OM}$.
 $H_{o,k}(M) = M_1$, где O - центр гомотетии, k - коэффициент гомотетии.



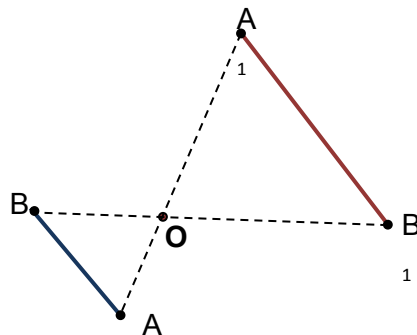
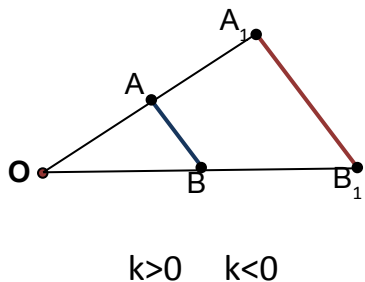
Частные случаи гомотетии:

$k=1$ - тождественное преобразование

$k=-1$ - центральная симметрия относительно точки O .

Теорема.

Гомотетия является подобием.



$$1. H_{o,k}(A) = A_1, H_{o,k}(B) = B_1 \rightarrow \vec{OA_1} = k \cdot \vec{OA}, \vec{OB_1} = k \cdot \vec{OB}$$

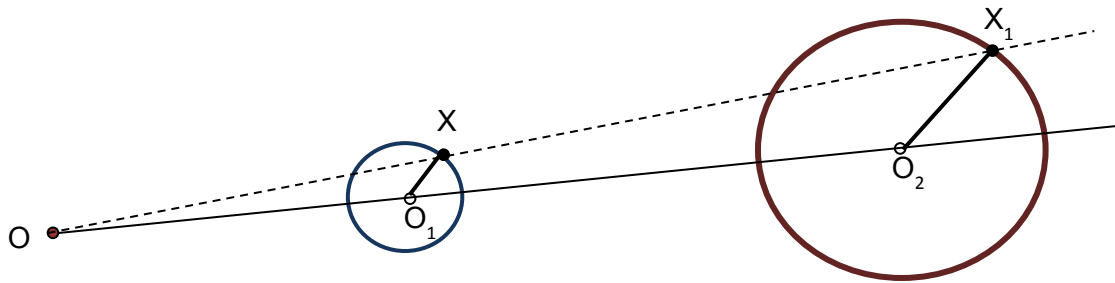
$$2. A_1B_1 = \vec{OB_1} - \vec{OA_1} = k \cdot \vec{OB} - k \cdot \vec{OA} = k \cdot (\vec{OB} - \vec{OA}) = k \cdot \vec{AB}$$

Следовательно, гомотетия является подобием

Из подобия следует, что расстояние между соответствующими точками не сохранилось, таким образом, **гомотетия не является движением.**

Свойства гомотетии:

1. Гомотетия переводит прямую в прямую, отрезок - в отрезок;
2. Гомотетия с $k > 0$ переводит луч в себя (в сонаправленный луч), а гомотетия с $k < 0$ переводит луч в противоположно направленный луч;
3. Гомотетия сохраняет углы;



4. Гомотетия переводит окружность в окружность

$H_{o,k}(O_1)=O_2, H_{o,k}(X)=X_1 \rightarrow OO_2=k \cdot OO_1, OX_1=k \cdot OX_2, \angle O$ - общий $\rightarrow \Delta OO_1X$ подобен ΔOO_2X_1 по второму признаку $\rightarrow O_2X_1=k \cdot O_1X$;

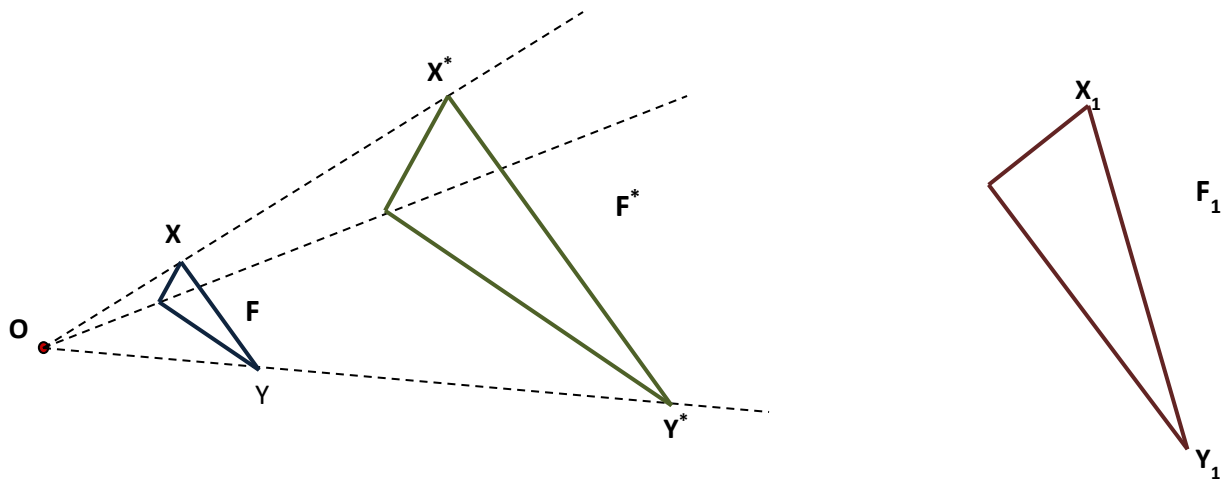
т.к. X произвольная точка окружности, следовательно, окружность переходит в окружность;

5. Преобразование, обратное гомотетии с коэффициентом $k \neq 0$, есть гомотетия с тем же центром гомотетии и коэффициентом, равным $\frac{1}{k}$

6. При $k \neq 1$ гомотетия переводит прямую, не проходящую через центр гомотетии, в параллельную прямую, отрезок - в параллельный отрезок. Прямые, проходящие через центр гомотетии, отображаются на себя (Следует из подобия и из определения гомотетии);

7. Композиция двух гомотетий с общим центром и коэффициентами k_1 и k_2 есть гомотетия с тем же центром и коэффициентом $k=k_1 \cdot k_2$;

8. Преобразование подобия с коэффициентом k есть композиция гомотетии с коэффициентом k и движения.



Пусть $P_k(F)=F_1$, где $k>0 \rightarrow P_k(X)=X_1$ и $P_k(Y)=Y_1 \rightarrow X_1Y_1=k \cdot XY$ (из определения подобия);
 $H_{O,k}(F)=F^*$, $k>0$ и O - произвольная $\rightarrow H_{O,k}(X)=X^*$, $H_{O,k}(Y)=Y^* \rightarrow X^*Y^*=k \cdot XY$ (из определения гомотетии);
 Таким образом, для любых точек $X^*; Y^*$ фигуры F^* верно равенство $X_1Y_1 = X^*Y^*$,
 которое означает, что фигуры F^* и F_1 равны, а значит, существует движение, переводящее фигуру F^* в фигуру F_1 .

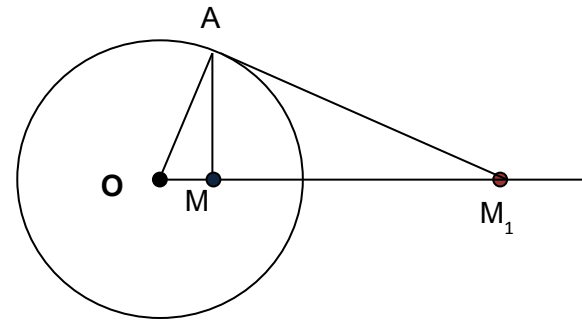
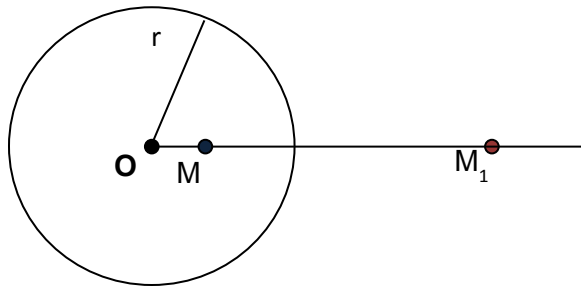
VIII группа. Инверсия.



Определение.

Пусть на плоскости задана окружность $(O;r)$ с выколотым центром O . Инверсией $I_{O,k}$ с полюсом O и степенью $k=r^2$ называется взаимно - однозначное преобразование $M \rightarrow M_1$ такое, что $OM \cdot OM_1 = r^2$ (точки O, M, M_1 - лежат на одной прямой).

Точка O выколота, т. к. не имеет образа



Построение соответствующих в инверсии точек:

1. Точка M внутри круга инверсии. $MA \perp OM$; OA - радиус; $AM_1 \perp OA$ (AM_1 - касательная); $M_1 = OM \cap AM_1$ ($OM \cdot OM_1 = r^2$, т.к. катет есть среднее геометрическое между гипотенузой и проекцией катета на гипотенузу);
2. Точка M - вне круга инверсии. Построения выполняются в обратном порядке: проводится касательная к окружности и из точки касания опускается перпендикуляр.

Свойства инверсии:

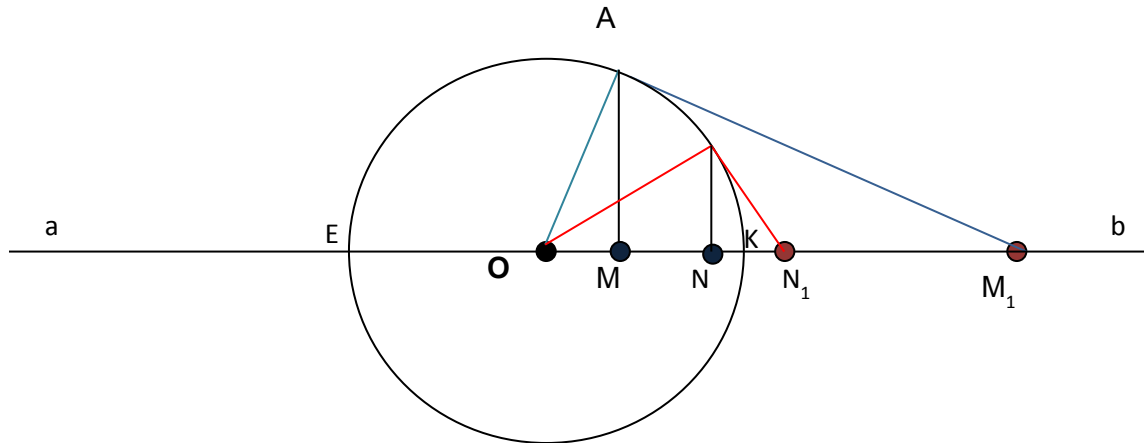
1. Если при инверсии точка M переходит в M_1 , то точку M_1 эта инверсия переводит в точку M (инверсия - инволютивное преобразование, т.е. $I^2 = e$ -тождественное преобразование)

$I_{o,k}(M) = M_1$, то $I_{o,k}(M_1) = M$;

2. При инверсии точки, расположенные внутри круга инверсии, переходят в точки, расположенные вне круга инверсии. Точки, расположенные вне круга инверсии, переходят во внутренние точки круга.

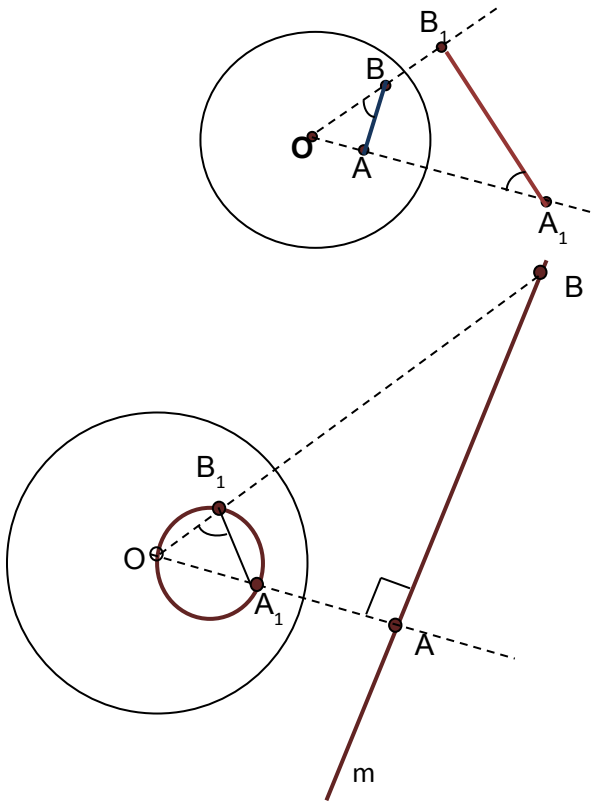
Точки окружности инверсии переходят в себя.

3. Прямая, проходящая через центр инверсии, переходит в себя



Полуинтервал $(OK] \rightarrow$ луч $[Kb)$, полуинтервал $(OE] \rightarrow$ луч $[Ea)$, $K \rightarrow K$, $E \rightarrow E$

4. Прямая, не проходящая через центр инверсии, переходит в окружность, проходящую через центр инверсии.



1. Если $I_{o,k}(A)=A_1, I_{o,k}(B)=B_1$

$$\Rightarrow OA \cdot OA_1 = OB \cdot OB_1 = r^2$$

$$\Rightarrow OA:OB = OB_1:OA_1 \text{ и } \angle AOB = \angle B_1OA_1$$

$\Rightarrow \triangle AOB \sim \triangle B_1OA_1$ (Ппризнак)

$$\Rightarrow \angle OBA = \angle OA_1B_1$$

2. Рассмотрим окружность инверсии

(O, r) и прямую m , не проходящую через точку O и точку $B \in m$, проведем $OA \perp m$,

построим точку A_1 и B_1

такие, что $I_{o,k}(A)=A_1, I_{o,k}(B)=B_1$

По пункту (1) $\triangle AOB \sim \triangle B_1OA_1$ и $\angle OAB = \angle OB_1A_1 = 90^\circ \Rightarrow B_1$ лежит на окружности S с диаметром OA_1 .