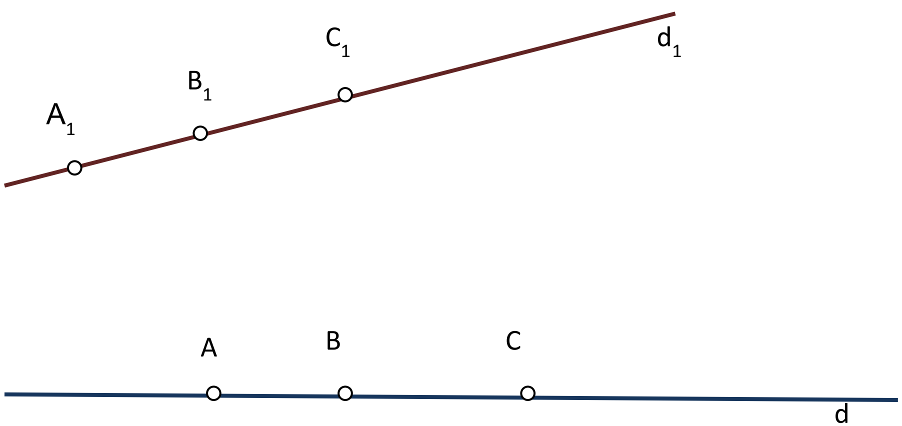
Презентация Преобразование плоскости

ГЕОМЕТРИЯ 9 КЛАСС

I - группа. Свойства движения

Теорема 1

При движении точки, лежащие на прямой, переходят в точки, лежащие на прямой, причем порядок взаимного расположения точек на прямой сохраняется.



Докозательство:

1. Пусть точки A, B и C принадлежат прямой d, причем A-B-C →AB+BC=AC
2. f(A)=A_1, f(B)=B_1, f(C)=C_1, т.к. f- движение, то A_1B_1=AB,

B_1C_1=BC, A_1C_1=AC → A_1B_1+ B_1C_1= =AB+BC=AC= A_1C_1→

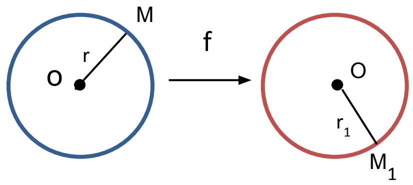
A_1B_1+ B_1C_1= A_1C_1→ A_1, B_1 и C_1 принадлежат некоторой прямой d_1 и A_1-B_1- C_1.

Следствие 1

При движении прямые переходят в прямые , лучи - в лучи, отрезок заданной длины - в отрезок той же длины.

Теорема 2

При движении окружность переходит в окружность того же радиуса.

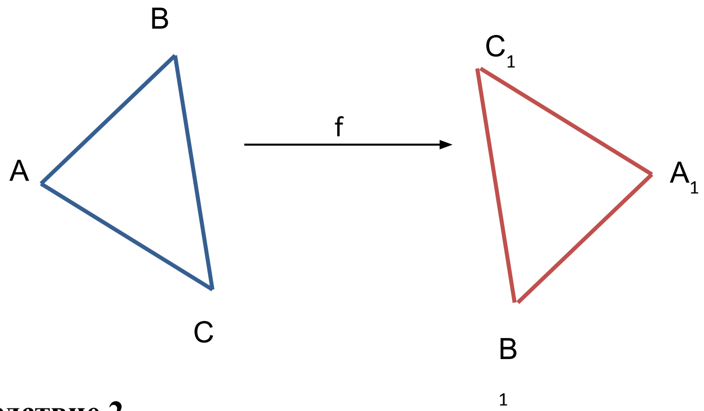


1. f- некоторое движение, $f(O)=O_1$
2. M- произвольная точка окружности, следовательно $f(M)= M_1$, по определению движения

$O_1 M_1=OM=r$, таким образом при заданном движении окружность с центром O и радиусом r перейдет в окружность с центром O_1 и тем же радиусом r.

Теорема 3

При движении треугольник отображается на равный ему треугольник.



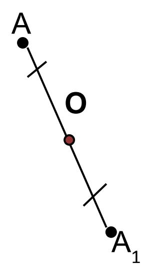
При движении отрезок переходит в отрезок равный данному. Следовательно, треугольник переходит в треугольник равный данному (по третьему признаку).

Следствие 2

При движении угол переходит в равный ему угол, фигура переходит в равную фигуру.

II-группа. Центральная симметрия

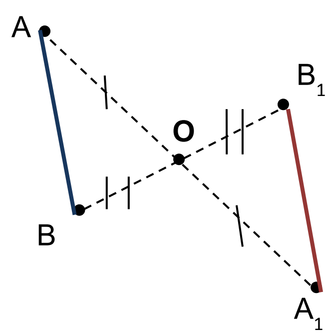
Определение.
Точки А и $А_1$ называются симметричными относительно точки О, если точка О принадлежит отрезку $АА_1$ и этой точкой отрезок $АА_1$ делится пополам.



$Z_o(A)=A_1$
О- центр симметрии
А и $А_1$ – центрально симметричные.

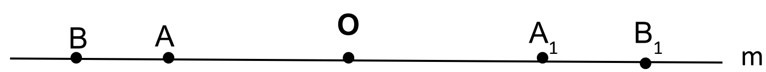
Т.к. точка А - произвольная точка плоскости, то отображение Z_o задано на всей плоскости. Это отображение называется симметрией относительно точки О (центральной симметрией).

Теорема
Симметрия относительно точки является движением.

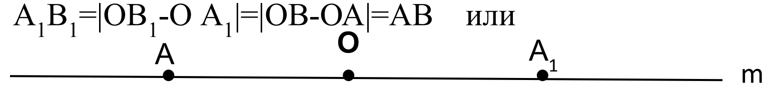


Доказательство:
Точки А, В и О не лежат на одной прямой
1. $Z_o(A)= A_1$, $Z_o(B)= B_1 \rightarrow AO=A_1O$, $BO= B_1O$, $\llcorner AOB=\llcorner A_1OB_1$- как вертикальные;
2. Следовательно, $\Delta AOB=\Delta A_1OB_1$ по двум сторонам и углу между ними (I признак);
3. Из равенства треугольников следует, что $AB= A_1B_1$.

Точки А, В и О лежат на одной прямой



$A_1B_1=|OB_1-O A_1|=|OB-OA|=AB$ или



$A_1B_1= A_1O+OB_1=OA+OB=AB$, а следовательно Z_o- движение.

Свойства центральной симметрии

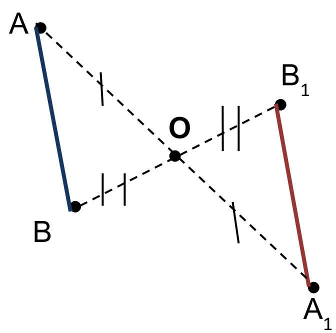
1. Центр симметрии точка О, единственная неподвижная точка, т.е. $Z_o(O) = O$

2. Прямая, проходящая через центр симметрии переходит в себя.

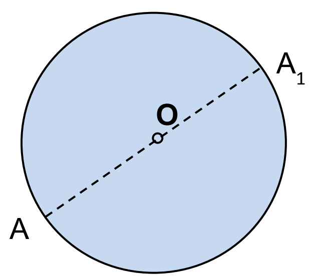
$M \in m \rightarrow M_1 \in m$

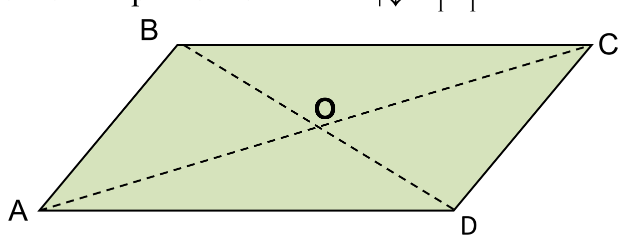
3. Прямая, не проходящая через центр симметрии, переходит в параллельную ей прямую (следует из равенства накрест лежащих углов при прямых AB и A_1B_1, секущей BB_1)

$O \notin AB$; $Z_o(AB) = A_1B_1$, $AB \parallel A_1B_1$



4. Центральная симметрия изменяет направление $\overrightarrow{AB} \uparrow\downarrow \overrightarrow{A_1B_1}$





$Z_o(A) = A_1$, $Z_o(A_1) = A$

$Z_o(A) = C$, $Z_o(B) = D$, $Z_o(C) = A$, $Z_o(D) = B$

Определение:

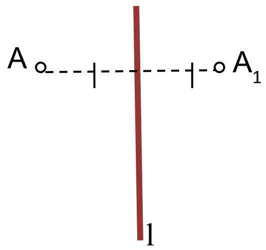
Если некоторая фигура при симметрии относительно точки О переходит в себя , то точка О называется центром симметрии этой фигуры, а фигура называется симметричной относительно точки О.

$Z_o(\Phi) = \Phi$

III-группа. Осевая симметрия.

Определение.

Точки A и A_1 называются симметричными относительно прямой l, если отрезок AA_1 перпендикулярен прямой l и делится этой прямой пополам.



$S_l(A)= A_1$

A и A_1 - симметричные точки.

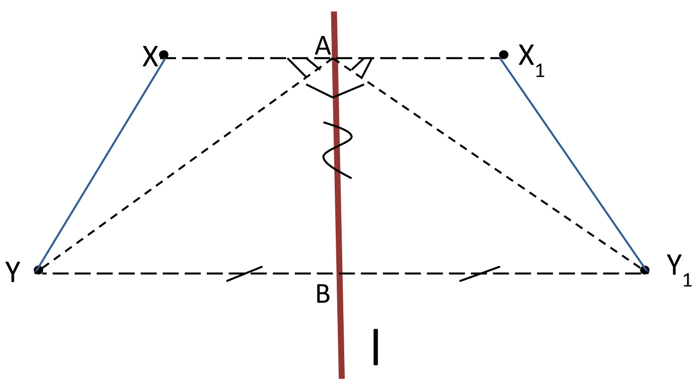
l- ось симметрии

Т.к. точка A - произвольная точка плоскости, то отображение S_l задано на всей плоскости. Это отображение называется симметрией относительно прямой l (осевой симметрией).

Теорема

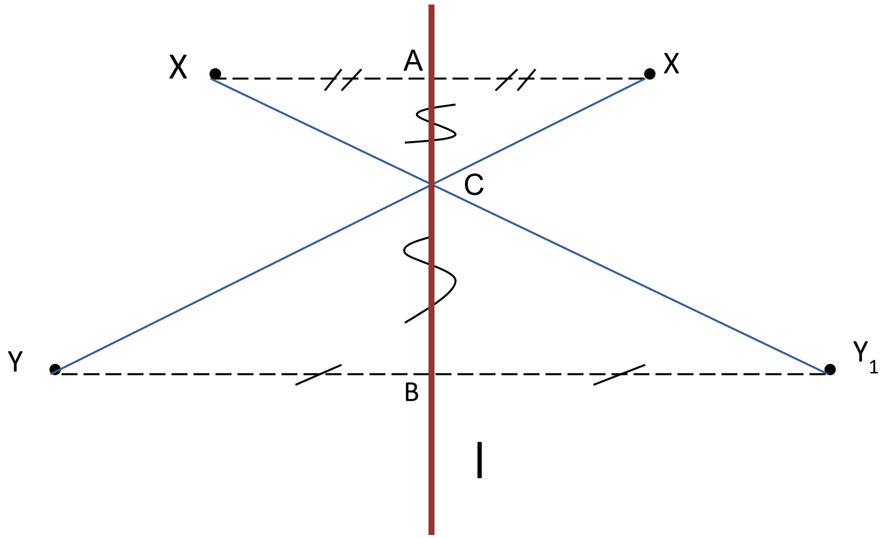
Симметрия относительно прямой является движение

X и Y -произвольные точки плоскости, лежащие в одной полуплоскости относительно прямой l.



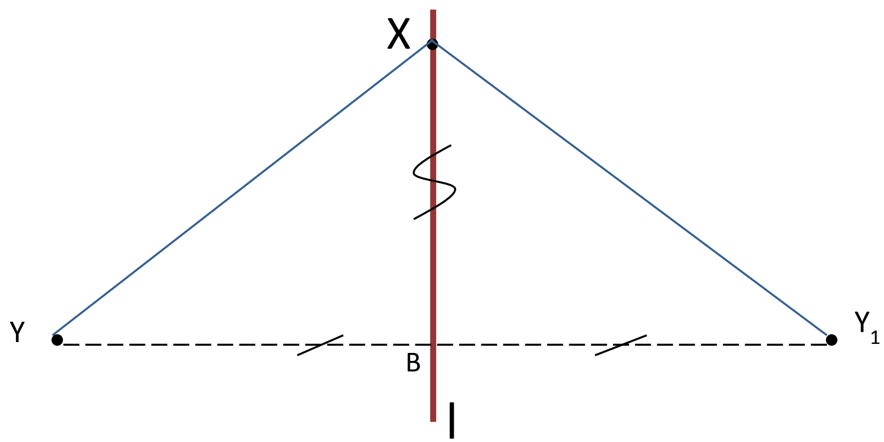
1. $S_l(X)= X_1$, $S_l(Y)= Y_1$, $XX_1 \cap l=A$, $YY_1 \cap l=B$
2. ΔABY и ΔABY_1 - прямоугольные (по определению осевой симметрии)
   $\Delta ABY = \Delta ABY_1$ - по двум катетам $\rightarrow AY=AY_1$ и $\angle YAB=\angle Y_1AB$
3. Рассмотрим ΔXAY и ΔX_1AY_1:
   $XA=X_1A$ (по определению осевой симметрии)
   $AY=AY_1$ (по доказанному)
   $\angle XAY=\angle X_1AY_1$ (как разность прямых и равных углов)
   Следовательно, $\Delta XAY = \Delta X_1AY_1$ (по двум сторонам и углу между ними,I признак)
4. Из равенства треугольников следует равенство отрезков XY и X_1Y_1.

X и Y -произвольные точки плоскости, лежащие в разных полуплоскостях относительно прямой l.



Равенство отрезков XY и X_1Y_1 следует из равенства по двум катетам прямоугольных треугольников X_1CA и XCA, YCB и Y_1CB.

X и Y -произвольные точки плоскости, одна из точек лежит на прямой l.



$S_l(X) = X$, $S_l(Y) = Y_1 \rightarrow \Delta XYB = \Delta XY_1B$ (по двум катетам) $\rightarrow XY = XY_1$

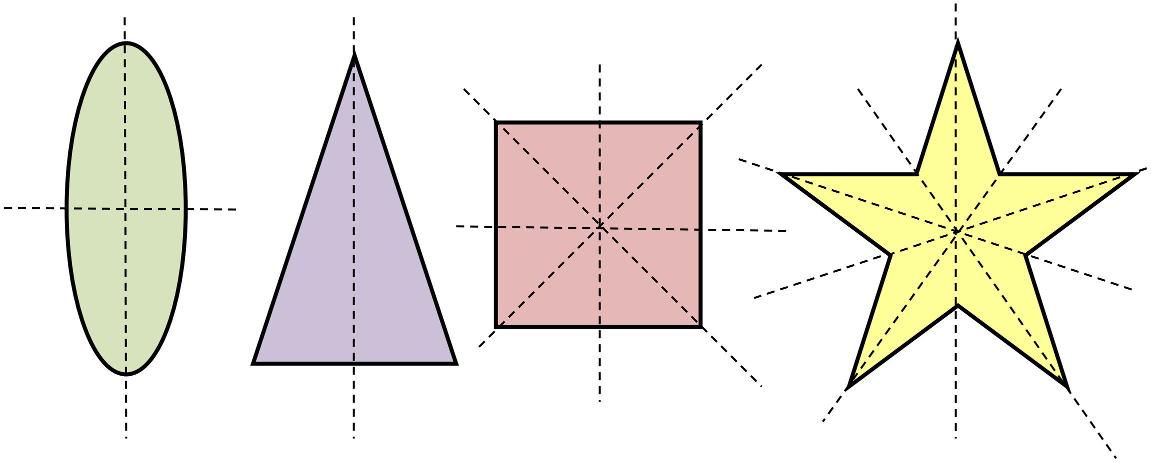
Т.о. осевая симметрия - движение

Свойства осевой симметрии

1. $S_l(l) = l$ - любая точка оси симметрии - неподвижна (переходит сама в себя);
2. Прямая перпендикулярная оси симметрии переходит сама в себя;
3. Соответствующие прямые пересекаются на оси симметрии или параллельны;

Определение

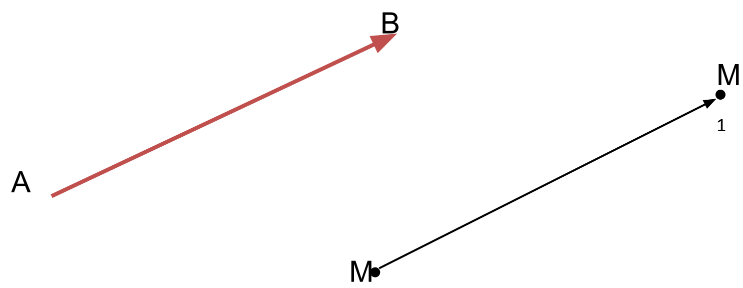
Если некоторая фигура при симметрии относительно прямой m переходит в себя, то прямая m называется осью симметрии этой фигуры, а фигура называется симметричной относительно прямой m.



$$S_m(\Phi)=\Phi$$

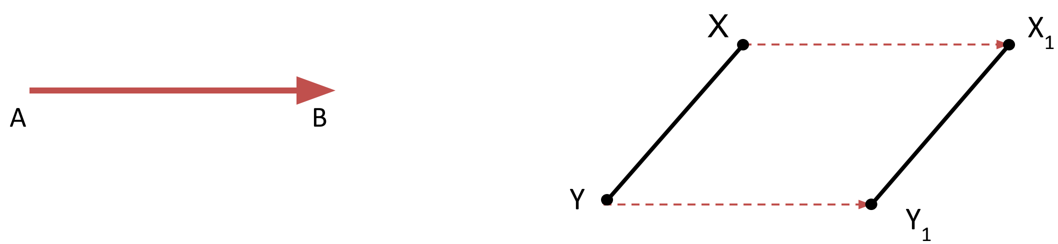
IV группа. Параллельный перенос.

Определение.
Параллельным переносом на заданный вектор $\overline{AB}$ называется преобразование плоскости, при котором каждая точка плоскости M переходит в M_1 так, что $\overrightarrow{MM_1}=\overrightarrow{AB}$ и обозначается $P_{\overline{AB}}(M)=M_1$.



Теорема

Параллельный перенос является движением

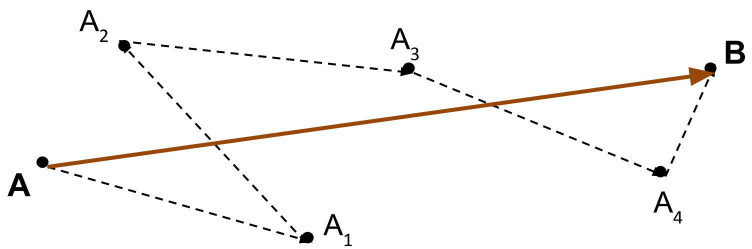


1. $P_{AB}(X)=X_1$, $P_{AB}(Y)=Y_1 \rightarrow XX_1 \| AB$, $XX_1=AB$; $YY_1 \| AB$, $YY_1=AB$
2. Следовательно, $XX_1 \| YY_1$ и $XX_1=YY_1$
3. YXX_1Y_1- параллелограмм по признаку
4. По свойству параллелограмма $XY=X_1Y_1$, значит **параллельный перенос - движение.**

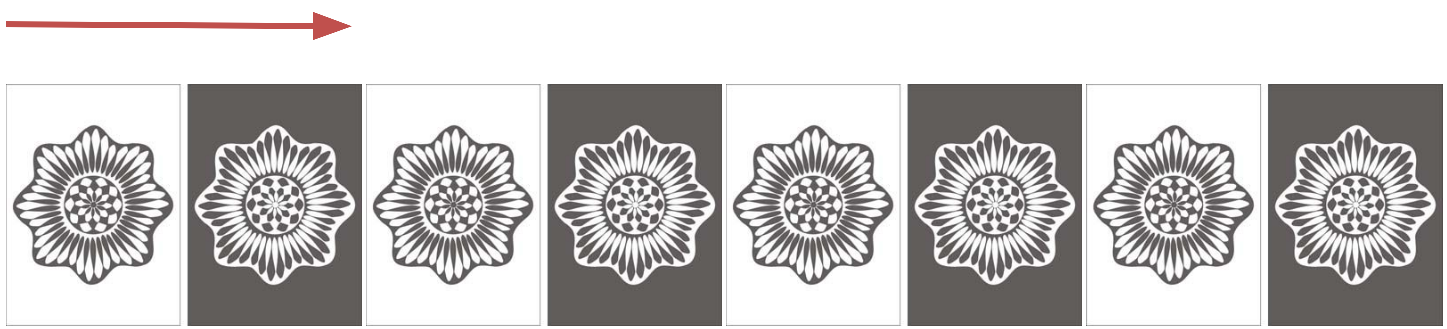
Свойства параллельного переноса

1. Параллельный перенос не имеет неподвижных точек;
2. Прямые, параллельные направлению переноса, переходят в себя;
3. Параллельный перенос сохраняет направление, т.е. если $A \to A_1$ и $B \to B_1$,то лучи AB и A_1B_1 сонаправлены. Обратно: движение, сохраняющее направление является параллельным переносом.
4. Композиция (последовательное выполнение) двух параллельных переносов - параллельный перенос, причем параллельные переносы - перестановочны: $P_{\bar{a}} \circ P_{\bar{b}} = P_{\bar{b}} \circ P_{\bar{a}} = P_{\overline{a+b}}$

Следствие: Любую композицию параллельных переносов можно заменить одним параллельным переносом (по правилу многоугольника)



Орнамент. Это узор, который получается, если некоторую фигуру подвергнуть параллельному переносу несколько раз.



V группа. Поворот.

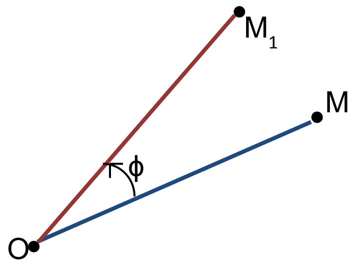
Определение.

Отметим на плоскости точку О (центр поворота) и угол ϕ (угол поворота).

Преобразование плоскости, при котором каждая точка М плоскости переходит в точку M_1 такую, что угол между лучами ОМ и OM_1 равен ϕ, а $OM=OM_1$, называется поворотом около точки О на угол ϕ.

ϕ>0 - если поворот совершается против часовой стрелки

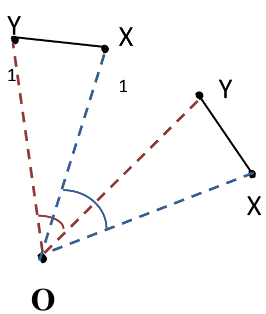
ϕ<0 - если поворот совершается по часовой стрелки



$R_O^{\varphi}(M)=M_1$, $\phi>0$

Теорема.

Поворот является движением.



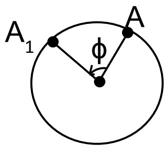
1. $R_O^{\varphi}(X) = X_1$, $R_O^{\varphi}(Y) = Y_1 \rightarrow OX=OX_1, OY=OY_1$
2. $\angle XOY=\phi-\angle X_1OY$, $\angle X_1OY_1=\phi-\angle X_1OY \rightarrow \angle XOY=\angle X_1OY_1$
3. Значит, $\Delta XOY=\Delta X_1OY_1$- по двум сторонам и углу между ними, тогда $XY= X_1Y_1$

Т.к. точки X и Y произвольные, следовательно, **поворот- движение**

Свойства поворота.

1. Поворот вокруг точки O на 180º является центральной симметрией относительно точки O.
2. Центр вращения - единственная неподвижная точка, R_O^{φ} (O)=O.

Окружности с центрами в точке O (центре поворота) - переходят сами в себя.



3. Если R_O^{φ} (A)=A_1 , R_O^{φ} (B)=B_1 , то угол между AB и A_1B_1 равен ϕ;
4. Композиция двух вращений с общим центром на углы α и β соответственно является вращением с тем же центром на угол α+β. При этом вращения перестановочны.

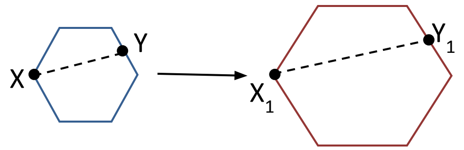
$$R_O^{\alpha} \circ R_O^{\beta} = R_O^{\beta} \circ R_O^{\alpha} = R_O^{\alpha+\beta}$$

5. Тождественное преобразование можно рассматривать как поворот на нулевой угол.
6. Композиция двух вращений с центрами O_1 и O_2 на углы α и β, соответственно, является вращением с новым центром O на угол α+β, если α+β≠360º, и параллельным переносом, если α+β=360º.

VI группа. Подобие.

Определение.

Преобразование фигуры F в фигуру F_1 называется преобразованием подобия, если при этом преобразовании расстояния между точками изменяются в одно и тоже число раз.



$P_k(F)=F_1$, P_k - подобие с коэффициентом k

f: $X \longrightarrow X_1$

f: $Y \longrightarrow Y_1$, $X_1Y_1= k \cdot XY$, где k>0 -является одним и тем же для всех точек X и Y.

k - коэффициент подобия, а фигуры $F \backsim F_1$ (подобны).

Подобие не является движением, т.к. расстояния изменяются.

Свойства подобия.

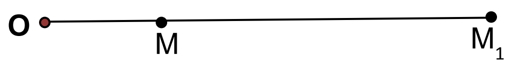
1. Преобразование подобия переводит прямую в прямую, отрезок - в отрезок, луч - в луч.

Действительно, если точки A,B,C лежат на одной прямой, то AC=AB+BC, тогда $A_1B_1= k \cdot AB=K \cdot (AC+CB)=k \cdot AC+k \cdot CB=A_1C_1+C_1B_1 \rightarrow A_1, C_1, B_1$ -лежат на прямой и порядок расположения точек сохраняется.

2. Преобразование подобия сохраняет углы.
3. Преобразование подобия переводит треугольник в треугольник. Соответственные стороны этих треугольников пропорциональны, а соответственные углы равны.
4. Преобразование подобия переводит окружность в окружность.
5. Преобразование, обратное преобразованию подобия с коэффициентом k, есть преобразование подобия с коэффициентом, равным $\frac{1}{k}$
6. Композиция преобразований подобия с коэффициентами k_1 и k_2 есть преобразование подобия с коэффициентом $k=k_1 \cdot k_2$

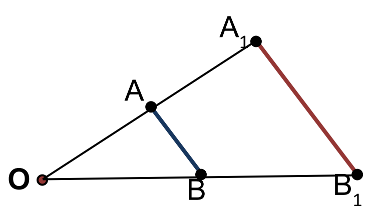
VII группа. Гомотетия.

Определение.
Зададим точку O и число $k\neq 0$. Точки M и M_1 являются соответствующими в гомотетии если $\overrightarrow{OM_1}=k\cdot\overrightarrow{OM}$.
$H_{o,k}(M)=M_1$, где O- центр гомотетии, k- коэффициент гомотетии.

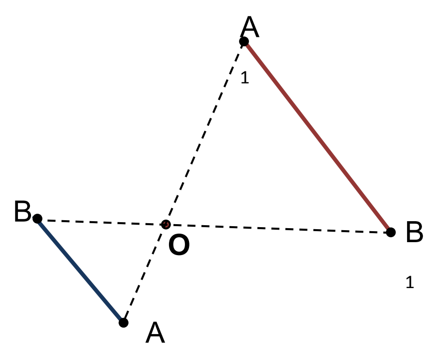


$k>0$ $K<0$

Частные случаи гомотетии:
$k=1$ - тождественное преобразование
$k=-1$ - центральная симметрия относительно точки O.
Теорема.
Гомотетия является подобием.



$k>0$ $k<0$

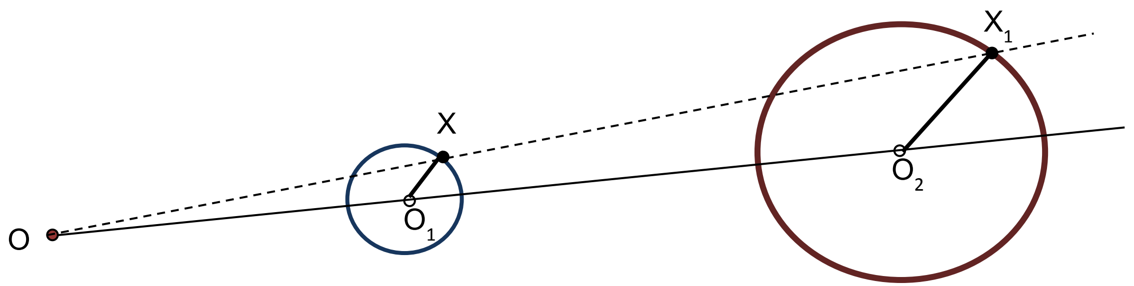


1. $H_{o,k}(A)=A_1$, $H_{o,k}(B)=B_1 \rightarrow \overrightarrow{OA_1}=k\cdot\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB_1}=k\cdot\overrightarrow{OB}$
2. $\overrightarrow{A_1B_1}=\overrightarrow{OB_1}-\overrightarrow{OA_1}=k\cdot\overrightarrow{OB}-k\cdot\overrightarrow{OA}=k\cdot(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})=k\cdot\overrightarrow{AB}$

Следовательно, гомотетия является подобием
Из подобия следует, что расстояние между соответствующими точками не сохранилось, таким образом, **гомотетия не является движением.**

Свойства гомотетии:

1. Гомотетия переводит прямую в прямую, отрезок- в отрезок;
2. Гомотетия с $k>0$ переводит луч в себя (в сонаправленный луч), а гомотетия с $k<0$ переводит луч в противоположно направленный луч;
3. Гомотетия сохраняет углы;



4. Гомотетия переводит окружность в окружность

$H_{o,k}(O_1)=O_2$, $H_{o,k}(X)=X_1 \rightarrow OO_2=k\cdot OO_1$, $OX_1=k\cdot OX_2$, $\angle O$- общий $\rightarrow \Delta OO_1X$ подобен ΔOO_2X_1 по второму признаку$\rightarrow$ $O_2X_1=k\cdot O_1X$;

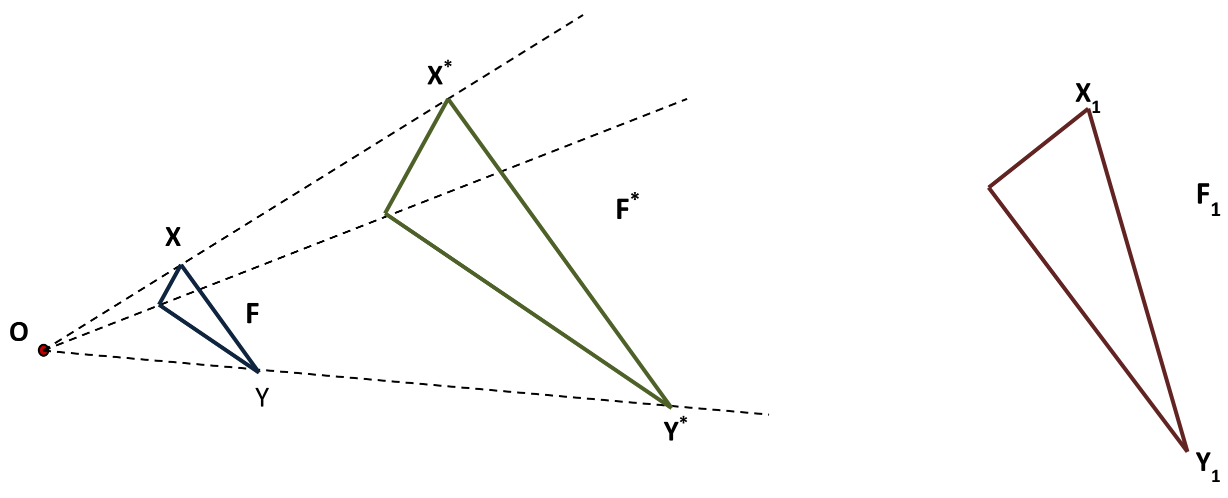
т.к. X произвольная точка окружности, следовательно, окружность переходит в окружность;

5.Преобразование, обратное гомотетии с коэффициентом $k\neq 0$, есть гомотетия с тем же центром гомотетии и коэффициентом, равным $\frac{1}{k}$

6.При $k\neq 1$ гомотетия переводит прямую, не проходящую через центр гомотетии, в параллельную прямую, отрезок - в параллельный отрезок. Прямые, проходящие через центр гомотетии, отображаются на себя (Следует из подобия и из определения гомотетии);

7.Композиция двух гомотетий с общим центром и коэффициентами k_1 и k_2 есть гомотетия с тем же центром и коэффициентом $k=k_1\cdot k_2$;

8.Преобразование подобия с коэффициентом k есть композиция гомотетии с коэффициентом k и движения.



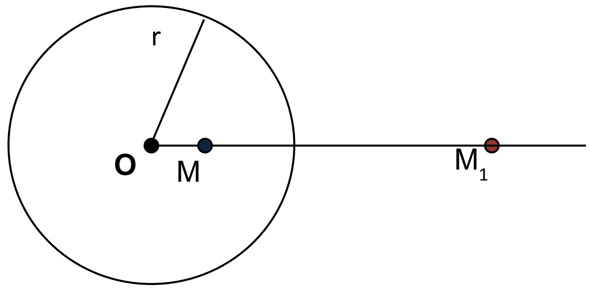
Пусть P_k (F)=F_1, где k>0→ P_k (X)=X_1 и P_k (Y)=Y_1→ X_1Y_1=k· XY (из определения подобия);
$H_{o,k}$(F)=F^* ,k>0 и O- произвольная→ $H_{o,k}$(X)=X^*, $H_{o,k}$(Y)=Y^*→ X^*Y^*=k· XY (из определения гомотетии);
Таким образом, для любых точек X^*;Y^* фигуры **F***верно равенство X_1Y_1= X^*Y^*,
которое означает, что фигуры **F* и F₁** равны, а значит, существует движение, переводящее фигуру **F***в фигуру **F_1**.

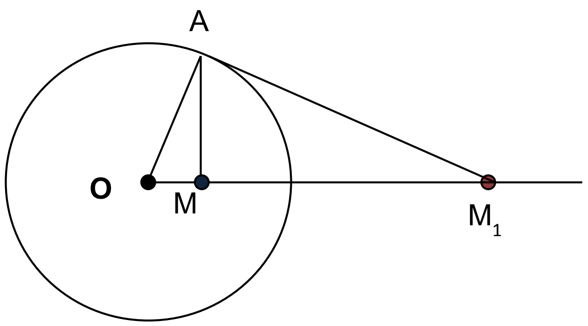
VIII группа. Инверсия.

Определение.

Пусть на плоскости задана окружность (O;r) с выколотым центром O. Инверсией $\mathbf{I_{o,k}}$ с полюсом O и степенью $k=r^2$ называется взаимно - однозначное преобразование $M \to M_1$ такое, что $OM \cdot OM_1 = r^2$ (точки O,M , M_1 -лежат на одной прямой).

Точка O выколота, т. к. не имеет образа





Построение соответствующих в инверсии точек:

1. Точка M внутри круга инверсии. $MA \perp OM$; OA- радиус; $AM_1 \perp OA$ (AM_1- касательная); $M_1 = OM \cap AM_1$ ($OM \cdot OM_1 = r^2$,т.к. катет есть среднее геометрическое между гипотенузой и проекцией катета на гипотенузу);

2. Точка M - вне круга инверсии. Построения выполняются в обратном порядке: проводится касательная к окружности и из точки касания опускается перпендикуляр.

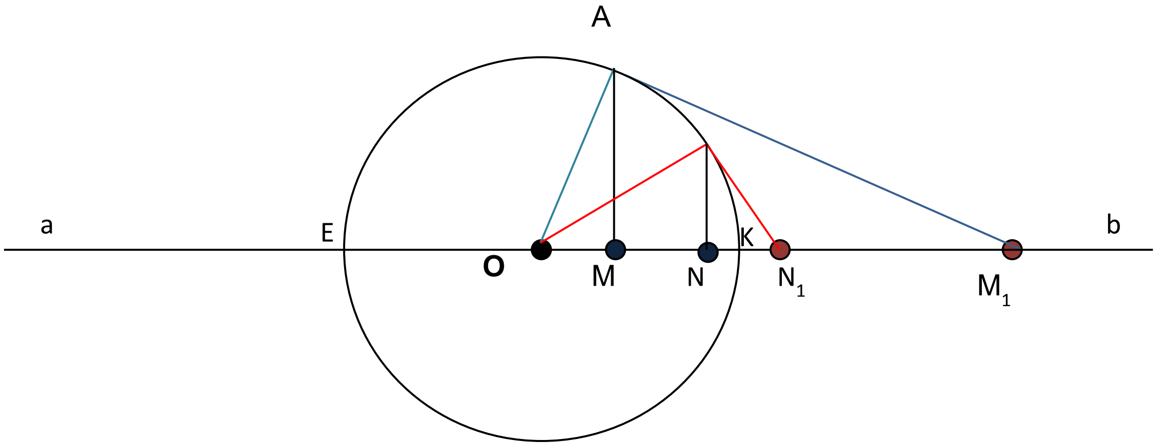
Свойства инверсии:

1.Если при инверсии точка M переходит в M_1, то точку M_1 эта инверсия переводит в точку M (инверсия - инволютивное преобразование, т.е. $\mathbf{I}^2$=e -тождественное преобразование)

$\mathbf{I}_{o,k}(M)=M_1$, то $\mathbf{I}_{o,k}(M_1)=M$;

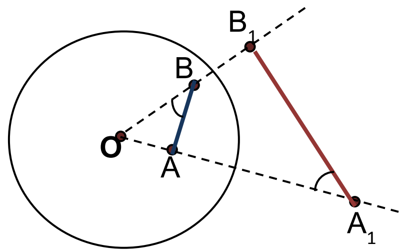
2.При инверсии точки, расположенные внутри круга инверсии, переходят в точки, расположенные вне круга инверсии. Точки, расположенные вне круга инверсии, переходят во внутренние точки круга. Точки окружности инверсии переходят в себя.

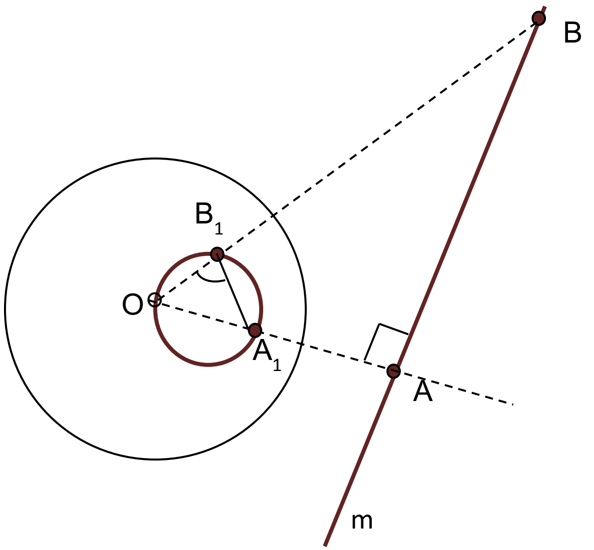
3.Прямая, проходящая через центр инверсии, переходит в себя



Полуинтервал (OK]→луч [Kb), полуинтервал (OE]→луч [Ea), K→K, E→E

4. Прямая, не проходящая через центр инверсии, переходит в окружность, проходящую через центр инверсии.





1.Если $\mathbf{I_{o,k}}(A)=A_1, \mathbf{I_{o,k}}(B)=B_1$

$\Rightarrow OA\cdot OA_1=OB\cdot OB_1=r^2$

$\Rightarrow OA:OB=OB_1:OA_1$ и $\angle AOB=\angle B_1OA_1$

$\Rightarrow\Delta\, AOB \backsim \Delta\, B_1OA_1$(IIпризнак)

$\boldsymbol{\Rightarrow\angle OBA=\angle OA_1B_1}$

2.Рассмотрим окружность инверсии (O,r) и прямую m, не проходящую через точку O и точку B $\in$ m, проведем OA $\perp$ m, построим точку A_1 и B_1 такие, что $\mathbf{I_{o,k}}(A)=A_1$, $\mathbf{I_{o,k}}(B)=B_1$

По пункту (1) $\Delta\, AOB \backsim \Delta\, B_1OA_1$ и $\angle OAB=\angle OB_1\, A_1=90^0 \Rightarrow B_1$ лежит на окружности S с диаметром OA_1.