

Лекция 2



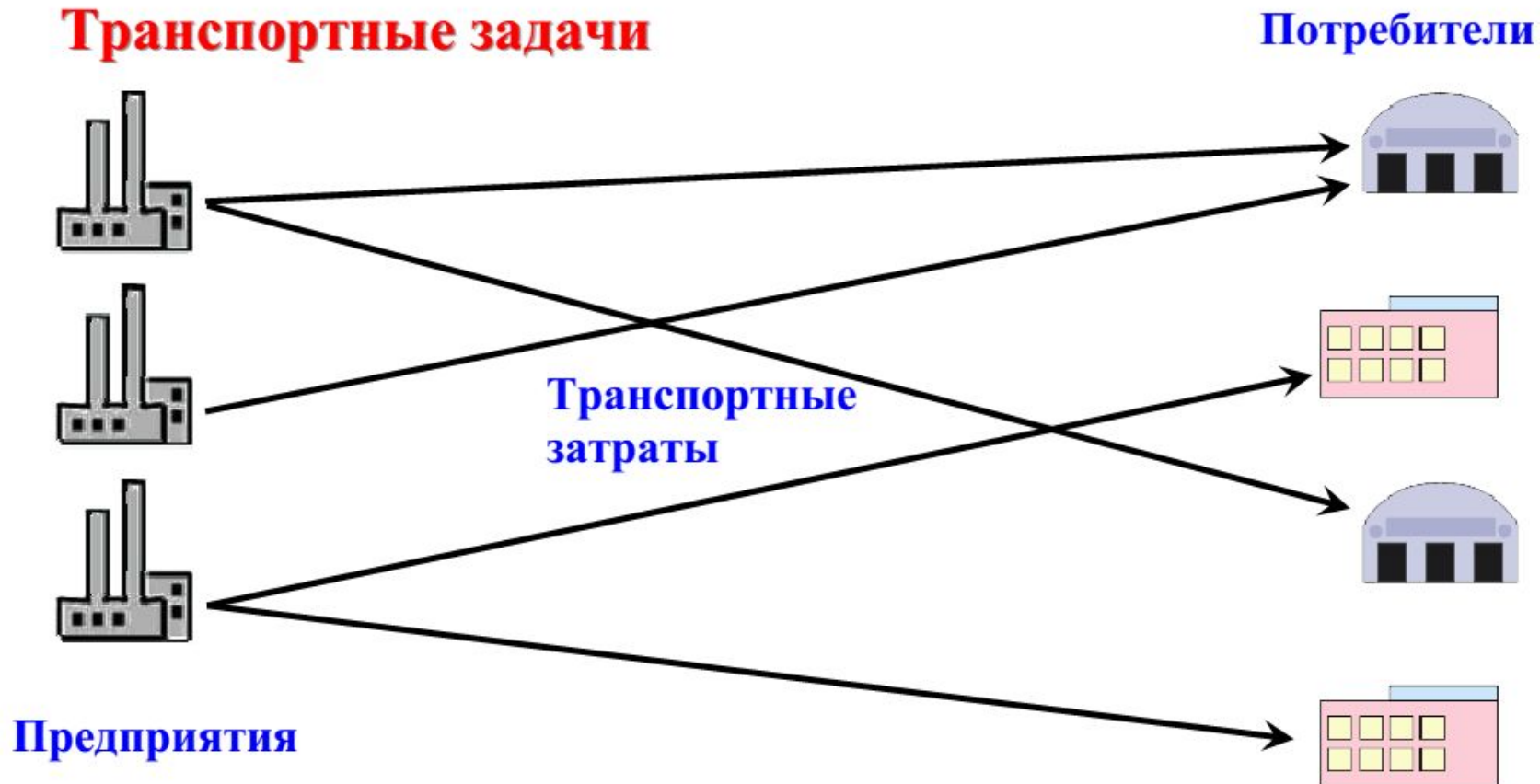
# **Прикладные задачи, приводящие к задаче линейного программирования**

# Типовые задачи



1. Транспортные задачи
2. Задачи маршрутизации
3. Задачи теории расписаний
4. Задачи размещения
5. Задачи раскроя и упаковки
6. Матричные игры

# Типовые задачи



Минимизировать затраты на перевозку продукции

# Типовые задачи

## Задачи маршрутизации



Найти маршрут минимальной длины

# Типовые задачи

## Задачи теории расписаний

14:25

007	Москва – Владивосток	02:30	02:50	007	Москва – Владивосток	02:30	02:50
874	Москва – Одесса	11:05	11:25	874	Москва – Одесса	11:05	11:25
65	Урюпинск – Киев	12:20	12:45	65	Урюпинск – Киев	12:20	12:45
874	Новосибирск – Бийск	14:45	14:55	874	Новосибирск – Бийск	14:45	14:55
007	Барнаул – Москва	16:00	16:10	007	Барнаул – Москва	16:00	16:10
874	Москва – Карелия	18:25	18:45	874	Москва – Карелия	18:25	18:45



Графики движения поездов, рабочие бригады, ремонт составов

# Типовые задачи

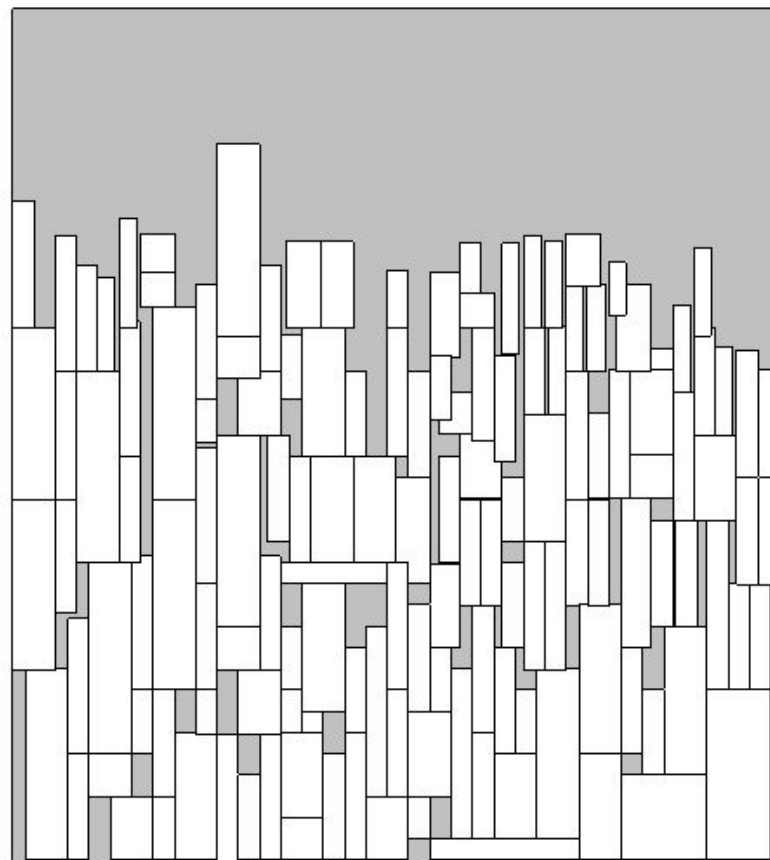
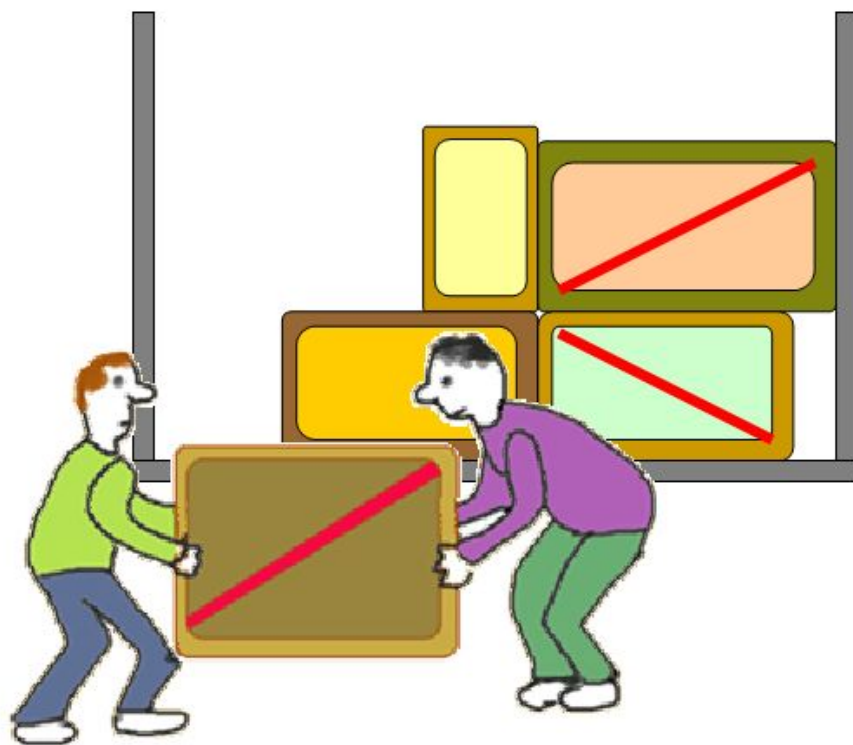
## Задачи размещения



Системы сотовой связи, филиалы банков, пожарные бригады, скорая помощь

# Типовые задачи

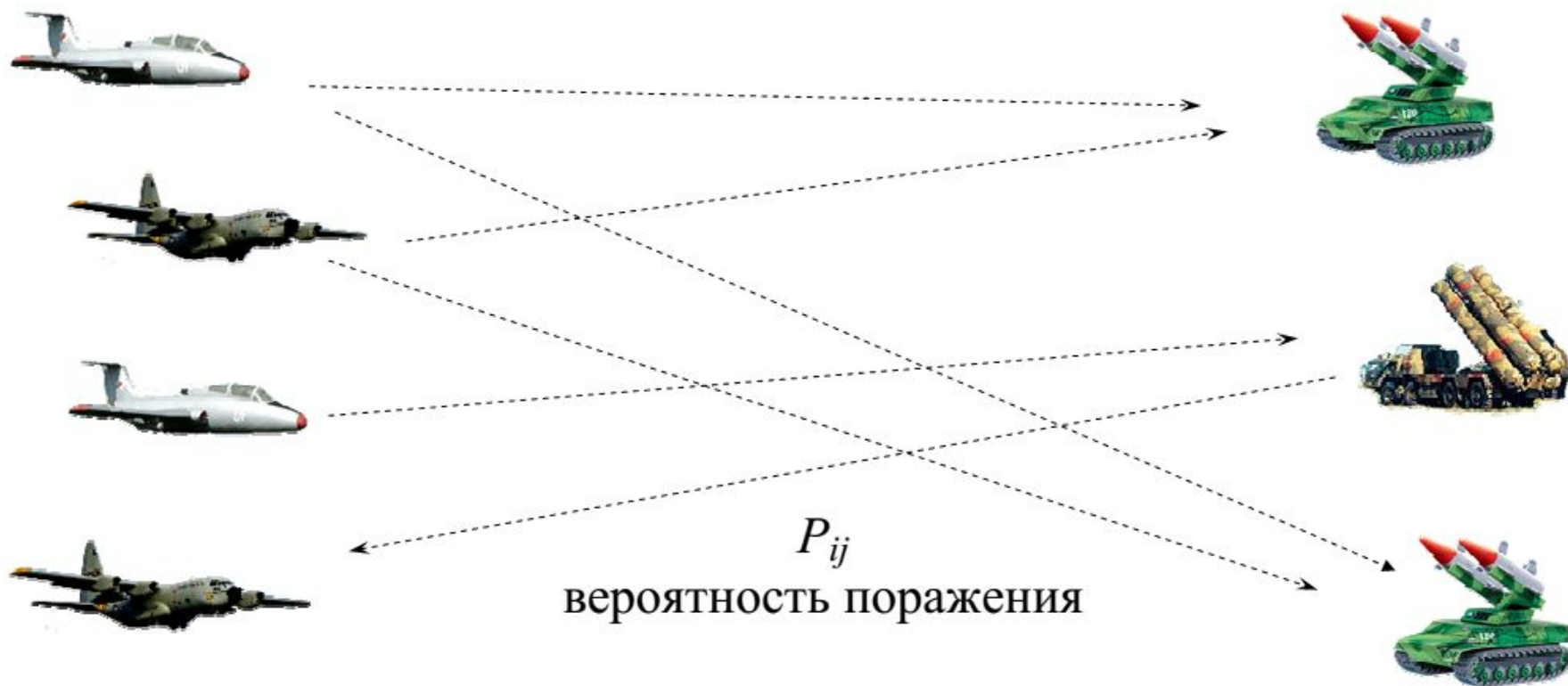
## Задачи раскроя и упаковки



Раскрой пиломатериала, листового железа, станки с ЧПУ

# Типовые задачи

## Матричные игры





# Задача об оптимальном использовании ресурсов

$n$  – количество видов выпускаемой продукции

$m$  – количество необходимых для производства ресурсов

$a_{ij}$  – технологические коэффициенты, т.е. количество единиц  $i$ -го ресурса, необходимого для производства единицы  $j$ -го вида продукции

$b_i$  – полные объемы имеющихся ресурсов

$c_j$  – прибыль, получаемая при реализации единицы  $j$ -го вида продукта.

$x = (x_1, \dots, x_j, \dots, x_n)$  – план выпуска продукции

$$z = \sum_{j=1}^n c_j x_j \rightarrow \max$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i \quad (i = \overline{1, m})$$

$$x_j \geq 0 \quad (j = \overline{1, n})$$

# Задача о смесях

$m$  – число необходимых питательных веществ

$n$  – число продуктов питания

$a_{ij}$  – количество единиц  $i$ -го питательного вещества, содержащееся в единице  $j$ -го вида продукта питания

$b_i$  – норма потребления  $i$ -го питательного вещества

$c_j$  – цена  $j$ -го продукта питания

$x_j$  – количество единиц  $j$ -го продукта, используемого в рационе, подлежащее определению

$$z = \sum_{j=1}^n c_j x_j \rightarrow \min$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \geq b_i \quad (i = \overline{1, m})$$

$$x_j \geq 0 \quad (j = \overline{1, n})$$

# Задача о назначениях

$n$  – число видов работ

$n$  – число специалистов, выполняющих все виды работ

$c_{ij}$  – эффективность выполнения  $i$ -ым специалистом  $j$ -ой работы

$$x_{i,j} = \begin{cases} 1, & i\text{-ый человек выполняет } j\text{-ую работу} \\ 0, & i\text{-ый человек не выполняет } j\text{-ую работу} \end{cases}$$

$$\sum \sum c_{i,j} x_{i,j} \rightarrow \max$$

$$\sum_{j=1}^n x_{i,j} = 1 \quad (i = \overline{1, n})$$

$$\sum_{i=1}^n x_{i,j} = 1 \quad (j = \overline{1, n})$$

# Транспортная задача

$m$  – число пунктов отправления (  $A_i$  – пункт отправления)

$n$  – число пунктов назначения (  $B_j$  – пункт назначения)

$a_i (i = \overline{1, m})$  – объем продукта в пункте отправления

$b_j (j = \overline{1, n})$  – потребность в пункте назначения

$C_{ij}$  – затраты на перевозку единицы продукта из  $i$ -го пункта отправления в  $j$ -ый пункт назначения

$$\sum_{i=1}^m a_i = (\leq \geq) \sum_{j=1}^n b_j$$

$$\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j^{(*)}$$

Если выполняется условие (\*), то перед нами транспортная задача *закрытого типа*. В противном случае это – задача *открытого типа*.

**Составить такой план перевозок, чтобы общая стоимость перевозок была минимальной.**

	$B_1$	$B_2$	...	$B_n$
$A_1$	$X_{11}, C_{11}$	$X_{12}, C_{12}$	...	$X_{1n}, C_{1n}$
$A_2$	$X_{21}, C_{21}$	$X_{22}, C_{22}$	...	$X_{2n}, C_{2n}$
...	...	...	...	...
$A_m$	$X_{m1}, C_{m1}$	$X_{m2}, C_{m2}$	...	$X_{mn}, C_{mn}$

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} \rightarrow \min$$
$$\begin{cases} \sum_{j=1}^n x_{ij} \leq a_i, (i = \overline{1, m}) \\ \sum_{i=1}^m x_{ij} \geq b_j, (j = \overline{1, n}) \\ x_{ij} \geq 0 \end{cases}$$

# Задача линейного программирования

- целевая функция;
- система ограничений;
- ограничения на знак переменных

ЗЛП – это задача следующего вида:

$$z = \sum_{j=1}^n x_j \cdot c_j \rightarrow \max(\min) \quad (1)$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot x_j (\leq, \geq, =) b_i \quad (i = \overline{1, m}) \quad (2)$$

$$x_j \geq 0 \quad (j = \overline{1, l}) \quad l \leq n \quad (3)$$

Уравнение (1) – это целевая функция, а (2) и (3) – это система ограничений.

# Задача линейного программирования

Вектор  $X = (x_1, \dots, x_n)$  называется допустимым планом ЗЛП, если он удовлетворяет ограничениям (2) и (3).

Вектор  $X^* = (x_1^*, \dots, x_n^*)$  называется оптимальным планом ЗЛП, если он является допустимым и обеспечивает минимум или максимум целевой функции.

Множество всех допустимых планов ЗЛП образует область допустимых значений (ОДЗ).

# Каноническая форма записи ЗЛП

$$z = \sum_{j=1}^n c_j x_j \rightarrow \min \quad (1)$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i, \quad (i=\overline{1,m}) \quad (2)$$

В системе ограничений стоят знаки только равенства.

$$x_j \geq 0, \quad (j=\overline{1,n}) \quad (3)$$

$$b_i \geq 0, \quad (i=\overline{1,m}) \quad (4)$$

В системе ограничений присутствует выделенный исходный базис.



## Фирма «Фасад»

Фирма «Фасад» производит двери для продажи местным строительным компаниям. Репутация фирмы позволяет ей продавать всю производимую продукцию. На фирме работает 10 рабочих в одну смену (8 рабочих часов), 5 дней в неделю, что дает 400 часов в неделю. Рабочее время поделено между двумя существенно различными технологическими процессами: собственно производством и конечной обработкой дверей. Из 400 рабочих часов в неделю 250 отведены под собственно производство и 150 под конечную обработку. «Фасад» производит 3 типа дверей: стандартные, полированные и резные. В таблице приведены временные затраты и прибыль от продажи одной двери каждого типа.

	Время на производство (мин)	Время на обработку (мин)	Прибыль
Стандартные	30	15	\$ 45
Полированные	30	30	\$ 90
Резные	60	30	\$120

- Сколько дверей различных типов нужно производить, чтобы максимизировать прибыль?
- Оптимально ли распределение рабочего времени между двумя технологическими процессами (производство и конечная обработка)? Как изменится прибыль, если распределить рабочее время между этими процессами оптимально?

# Фирма «Фасад»



	A	B	C	D	E	F
1	Фирма «Фасад»					
2		Время на производство (мин)	Время на обработку (мин)	Прибыль, \$	Переменные	
3	Стандартные	30	15	45	0	X1
4	Полированные	30	30	90	100	X2
5	Резные	60	30	120	200	X3
6					Целевая функция	
7		15000	9000		33000	
8	Ограничения	15000	9000			

# Фирма «Фасад»



	A	B	C	D	E	F
1	Фирма «Фасад»					
2		Время на производство (мин)	Время на обработку (мин)	Прибыль, \$	Переменные	
3	Стандартные	30	15	45	0	X1
4	Полированные	30	30	90	400	X2
5	Резные	60	30	120	0	X3
6					Целевая функция	
7		12000	12000	24000	36000	
8	Ограничения	15000	9000	24000		

# Фирма «Фасад»



Фирма «Фасад»								
	Время на производство (мин)	Время на обработку (мин)	Прибыль, \$	Переменные		Всего	Заказ	
Стандартные	30	15	45	0	X1	1900	280	
Полированные	30	30	90	0	X2	120	120	
Резные	60	30	120	100	X3	100	100	
Стандартные II		6	15	1900	X4			
Полированные II		30	50	120	X5			
	Полное время			Целевая функция				
	6 000	18 000	24 000	<b>46 500</b>				
Ограничения			24 000					