Применение матричного исчисления к решению некоторых экономических задач

Модели планирования производства, планирования материальных затрат, Леонтьева межотраслевого баланса.

Межотраслевой баланс (МОБ)

(метод «затраты-выпуск»)

МОБ - экономико - математическая балансовая модель, характеризующая межотраслевые производственные взаимосвязи в экономике страны. Характеризует связи между выпуском продукции в одной отрасли и затратами, расходованием продукции всех участвующих отраслей, необходимым для обеспечения этого выпуска. Межотраслевой баланс составляется в денежной и натуральной формах.

Межотраслевой баланс представлен в виде системы линейных уравнений. Межотраслевой баланс (МОБ) представляет собой таблицу, в которой отражен процесс формирования и использования совокупного общественного продукта в отраслевом разрезе.

Таблица показывает структуру затрат на производство каждого продукта и структуру его распределения в экономике. По столбцам отражается стоимостный состав валового выпуска отраслей экономики по элементам промежуточного потребления и добавленной стоимости. По строкам отражаются направления использования ресурсов каждой отрасли.

В Модели МОБ выделяются четыре квадранта. В первом отражается промежуточное потребление и система производственных связей, во втором — структура конечного использования ВВП, в третьем — стоимостная структура ВВП, а в четвёртом — перераспределение национального дохода.

История метода

Теоретические основы межотраслевого баланса были разработаны в СССР в 1923—1924 гг., когда В.В. Леонтьев сделал попытку представить в цифрах анализ баланса народного хозяйства СССР. Ученый показал, что коэффициенты, выражающие связи между отраслями экономики, достаточно стабильны и их можно прогнозировать .

В 1930-е годы Василий Леонтьев применил метод анализа межотраслевых связей с привлечением аппарата линейной алгебры для исследования экономики США. Метод стал известен под названием «затраты — выпуск». Во время Второй мировой войны, разработанная Леонтьевым матрица «затраты — выпуск» для экономики Германии служила для выбора целей ВВС США. Аналогичный баланс для СССР, разработанный Леонтьевым, использовался властями США для принятия решения об объемах и структуре Ленд-лиза

Первая в СССР и одна из первых в мире динамическая межотраслевая модель национальной экономики была разработана в Новосибирске доктором экономических наук Н. Ф. Шатиловым.

Первые плановые межотраслевые балансы в стоимостном и натуральном выражении были построены в 1962 г. Далее работы были распространены на республики и регионы. По данным за 1966 г. межотраслевые балансы были построены по всем союзным республикам и экономическим районам РСФСР.

В 1970—1980-х годах в СССР на основе данных межотраслевых балансов разрабатывались более сложные межотраслевые модели и модельные комплексы, которые использовались в прогнозных расчетах и частично входили в технологию народнохозяйственного планирования. По ряду направлений советские межотраслевые исследования занимали достойное место в мировой науке.

В 1973 году Леонтьев был удостоен Нобелевской премии по

Пример расчета межотраслевого баланса

Рассмотрим 2 отрасли промышленности: производство угля и стали. Уголь требуется для производства стали, а некоторое количество стали — в виде инструментов — нужно для добычи угля. Предположим, что условия таковы: для производства 1 т стали нужно 3 т угля, а для 1 т угля — 0,1 т стали.

Отрасль	Уголь	Сталь
Уголь	1	3
Сталь	0.1	1

Мы хотим, чтобы чистый выпуск угольной промышленности был (200 000) тонн угля, а чёрной металлургии — (50 000) тонн стали. Если каждая из них будет производить лишь и тонн, то часть продукции будет использоваться в другой отрасли.

Для производства тонн стали требуется (150 000) тонн угля, а для производства тонн угля нужно (20 000) тонн стали. Чистый выход будет равен: (50 000) тонн угля и (30 000) тонн стали.

Нужно дополнительно производить уголь и сталь, чтобы использовать их в другой отрасли.

Обозначим x_1— количество угля, x_2— количество стали. Валовый выпуск каждой продукции найдем из системы уравнений:

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 & = 2 \cdot 10^5 \\ -0,1x_1 + x_2 & = 5 \cdot 10^4 \end{cases}$$

Решение: 500 000 т угля и 100 000 т стали.

Для систематического решения задач расчета межотраслевого баланса находят, сколько угля и стали требуется для выпуска 1 т каждого продукта.

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 & = 1 \\ -0,1x_1 + x_2 & = 0. \end{cases}$$

$x_1 = 1,42857$ и $x_2 = 0,14286$.

Чтобы найти, сколько угля и стали нужно для чистого выпуска $2\circ10^5$ т угля, нужно умножить эти цифры на $2\circ10^5$. Получим: 285714 т. и 28571 т.

Аналогично составляем уравнения для получения количества угля и стали для выпуска 1 т стали:

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 & = 0 \\ -0,1x_1 + x_2 & = 1. \end{cases}$$

x_1 =4,28571 и x_2 =1,42857 . Для чистого выпуска $5\circ10^4$ т стали нужно: (чугун – 214286 т.; сталь – 71429 т.).

Валовый выпуск для производства $2\circ10^5$ тонн угля и $5\circ10^4$ тонн стали: .

$$(285714 + 214286; 28571 + 71429) = (500000; 100000)$$

Таблица 1 - Общая структура межотраслевого баланса

Отрасли	1	2	…	j	…	n	Итого	Конечная продукция	Валовая продукция
1	x_{11}	x_{12}	…	x_{1j}	…	x_{1n}	$\sum_{j=1}^{n} x_{1j}$	y_1	X_1
2	x_{21}	x_{22}	…	x_{2j}	…	x_{2n}	$\sum_{j=1}^{n} x_{2j}$	y_2	X_2
…								…	…
i	x_{i1}	x_{i2}	…	x_{ij}	…	x_{in}	$\sum_{j=1}^{n} x_{ij}$	y_i	X_i
…								…	…
n	x_{n1}	x_{n2}	…	x_{nj}	…	x_{nn}	$\sum_{j=1}^{n} x_{nj}$	y_n	X_n
Итого	$\sum_{i=1}^{n} x_{i1}$	$\sum_{i=1}^{n} x_{i2}$	…	$\sum_{i=1}^{n} x_{ij}$	…	$\sum_{i=1}^{n} x_{in}$	$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_{ij}$	$\sum_{i=1}^{n} y_i$	$\sum_{i=1}^{n} X_i$
Условно чистая продукция	V_1	V_2	…	V_j	…	V_n	$\sum_{j=1}^{n} V_j$		
Валовая продукция	X_1	X_2	…	X_j	…	X_n	$\sum_{j=1}^{n} X_j$		

Производственная сфера экономики представлена в балансе в виде совокупности n отраслей.

Баланс состоит из четырех разделов (квадрантов).

Первый квадрант представляет собой матрицу, состоящую из (n+1) строки и (n+1) столбца. Этот раздел является важнейшей частью баланса, поскольку именно здесь содержится информация о межотраслевых связях. Величина x_i, находящаяся на пересечении i-й строки и j-го столбца, показывает, сколько продукции i-й отрасли было использовано в процессе материального производства j-й отрасли. Величины x_{ij} характеризуют межотраслевые поставки сырья, материалов, топлива и энергии, обусловленные производственной деятельностью.

В i-й строке величины x_{i1}, x_{i2}, ..., x_{ij}, ..., x_{in} описывают распределение продукции i-й отрасли как средства производства для других отраслей.

Величины x_{1j}, x_{2j}, ..., x_{ij}, ..., x_{nj} j-го столбца в этом случае будут описывать потребление j-й отраслью сырья, материалов, топлива и энергии на производственные нужды.

Таким образом, первый раздел баланса дает общую картину распределения продукции на текущее производственное

В зависимости от того, в каких единицах измеряются потоки продукции в балансе, существуют различные его варианты: в натуральном выражении, в денежном (стоимостном) выражении, в натурально-стоимостном, в трудовых измерителях. Мы рассмотрим баланс в стоимостном выражении, в котором потоки продукции измеряются на основе стоимости произведенной продукции в некоторых фиксированных ценах. Поскольку в этом случае величины x_{ij} отражают стоимость продукции, т.е. измеряются в одних и тех же единицах, их можно просуммировать.

Величина $\sum_{j=1}^{n} x_{ij}$ представляет собой сумму всех поставок i-й отрасли другим отраслям.

Сумма по столбцу $\sum_{i=1}^{n} x_{ij}$ характеризует производственные затраты j-й отрасли на приобретение продукции других отраслей.

На пересечении (n+1)-й строки и (n+1)-го столбца находится величина $\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_{ij}$ - так называемый **промежуточный продукт** экономики.

Второй раздел посвящен конечному продукту. Столбец конечного продукта - (n+2)-й столбец. Величина y_i - потребление продукции i-й отрасли, не идущее на текущие производственные нужды. В конечную продукцию, как правило, включаются: накопление, возмещение выбытия основных средств, прирост запасов, личное потребление населения, расходы на содержание государственного аппарата, здравоохранение, оборону и т.д., а также сальдо экспорта и импорта.

Ко второму разделу относится также столбец валовых выпусков (X_i). В пределах первого и второго разделов справедливо соотношение: $X_i = \sum_{j=1}^{n} x_{ij} + y_i, \quad i = \overline{1, n}.$

(1)

Третий квадрант межотраслевого баланса отражает стоимостную структуру валового продукта отраслей. В (n+2)-й строке таблицы отражена условно чистая продукция (V_j), представляющая собой разницу между величиной валовой продукции отрасли и суммарными затратами отрасли: $V_j = X_j - \sum_{i=1}^{n} x_{ij}, \quad j = \overline{1, n}.$

(2)

Условно чистая продукция подразделяется на амортизационные отчисления и чистую продукцию отрасли. Важнейшими составляющими чистой продукции отрасли являются заработная плата, прибыль и налоги.

Можно показать, что суммарный конечный продукт равен суммарной условно чистой продукции ($\sum_{i=1}^{n} y_i = \sum_{j=1}^{n} V_j$).

Из соотношений (1) и (2):

$$X_i = \sum_{j=1}^{n} x_{ij} + y_i, \quad i = \overline{1,n}.$$

$$X_j = \sum_{i=1}^{n} x_{ij} + V_j, \quad j = \overline{1,n}.$$

Просуьмируем первое равенство по i, а второе - по j:

$$\sum_{i=1}^{n} X_i = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_{ij} + \sum_{i=1}^{n} y_i, \qquad \sum_{i=1}^{n} X_i = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_{ij} + \sum_{i=1}^{n} y_i,$$

Левые части выражений равны, значит равны и правые:

$$\cancel{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_{ij}} + \sum_{i=1}^{n} y_i = \cancel{\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} x_{ij}} + \sum_{j=1}^{n} V_j,$$

Откуда $\sum_{i=1}^{n} y_i = \sum_{j=1}^{n} V_j$, Что и требовалось доказать.

Таким образом, *в третьем разделе* также фигурирует конечный продукт, но если во втором разделе он разбивается на величины y_i, характеризующие структуру потребления, то в третьем разделе величины V_i показывают, в каких отраслях произведена стоимость конечного продукта.

Четвертый раздел располагается под вторым. Он характеризует перераспределительные отношения в экономике, осуществляемые через финансово-кредитную систему. В плановых расчетах четвертый раздел, как правило, не используется, и поэтому в пределах нашего курса рассматриваться не будет.

Итак, рассмотренный нами межотраслевой баланс - это способ представления статистической информации об экономике страны. Он строится на основе агрегирования результатов деятельности отдельных предприятий. Такой баланс называют отчетным. Кроме этого строятся плановые балансы, предназначенные для разработки сбалансированных планов развития экономики.

Статическая межотраслевая модель

Статистические межотраслевые модели используются для разработки планов выпуска и потребления продукции и основываются на соотношениях межотраслевого баланса.

При построении модели делают следующие предположения:

1) все продукты, производимые одной отраслью, однородны и рассматриваются как единое целое, т.е. фактически предполагается, что каждая отрасль производит один продукт;

2) в каждой отрасли имеется единственная технология производства;

3) нормы производственных затрат не зависят от объёма выпускаемой продукции;

4) не допускается замещение одного сырья другим.

При этих предположениях величина x_{ij} может быть представлена следующим образом:

$$x_{ij} = a_{ij} X_j, \quad i = \overline{1,n}, \quad j = \overline{1,n}. \qquad (3)$$

Величина a_{ij} называется **коэффициентом прямых материальных затрат**. Она показывает, какое количество продукции i-й отрасли идет на производство единицы продукции j-й отрасли.

Коэффициенты a_{ij} считаются в межотраслевой модели постоянными.

Подставляя выражение (3) в формулу (1), получим:

$$X_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} X_j + y_i, \quad i = \overline{1,n}.$$

Это соотношение можно записать в матричном виде: X = AX + Y, (4)

где X = (X_1, X_2, ..., X_n) - вектор валовых выпусков;

Y = (y_1, y_2, ..., y_n) - вектор конечного продукта;

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

- матрица коэффициентов прямых материальных затрат.

Коэффициенты прямых материальных затрат являются основными параметрами статической межотрслевой модели. Их значения могут быть получены двумя путями:

1) статистически. Коэффициенты определяются на основе анализа отчётных балансов за прошлые годы. Их неизменность во времени определяется подходящим выбором отраслей;
2) нормативно. Предполагается, что отрасль состоит из отдельных производств, для которых уже разработаны нормативы затрат; на их основе рассчитываются среднеотраслевые коэффициенты.

Выражение (4) принято называть балансом распределения продукции. Его можно использовать для анализа и планирования структуры экономики. Если известны коэффициенты прямых материальных затрат, то, задав конечный продукт по каждой отрасли, можно определить необходимые валовые выпуски отраслей. В этом заложена основная идея использования матричных моделей для планирования производства.

Преобразуем выражение (4):

$$X - AX = Y, \rightarrow X(E - A) = Y, \rightarrow X = (E - A)^{-1}Y, \qquad (5)$$

где E - единичная матрица.

До начала планирования следует выяснить, существует ли матрица, обратная матрице $(E\text{-}A)$, и не будут ли получены отрицательные значения выпуска по отраслям.

Установим некоторые свойства коэффициентов прямых материальных затрат.

1. Неотрицательность, т.е. $a_{ij} \geq 0, \ i = \overline{1,n}, \ j = \overline{1,n}.$ Это утверждение следует из неотрицательности величин x_{ij} и положительности валовых выпусков X_j.

2. Сумма элементов матрицы А по любому из столбцов меньше единицы, т.е.

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} < 1, \qquad i = \overline{1,n}.$$

Можно показать, что при выполнении этих двух условий матрица $B = (E - A)^{-1}$ существует и если ее элементы неотрицательны. Говорят, что в этом случае матрица прямых затрат А является продуктивной.

Перепишем формулу (5):

$$X = BY, \qquad (6)$$

Матрица В носит название матрицы полных материальных затрат, а ее элементы b_{ij} называют **коэффициентами полных материальных затрат**. Коэффициент b_{ij} показывает, каков должен быть валовый выпуск i-й отрасли для того, чтобы обеспечить выпуск единицы **конечного**продукта j-й отрасли.

Можно показать, что

$B = E + A + A^2 + A^3 + \ldots$ (7)

Умножим обе части на (E - A):

$B(E - A) = (E + A + A^2 + A^3 + \ldots)(E - A), \rightarrow$

$\rightarrow B(E - A) = E + A + A^2 + A^3 + \ldots - A - A^2 - A^3 - \ldots, \rightarrow$

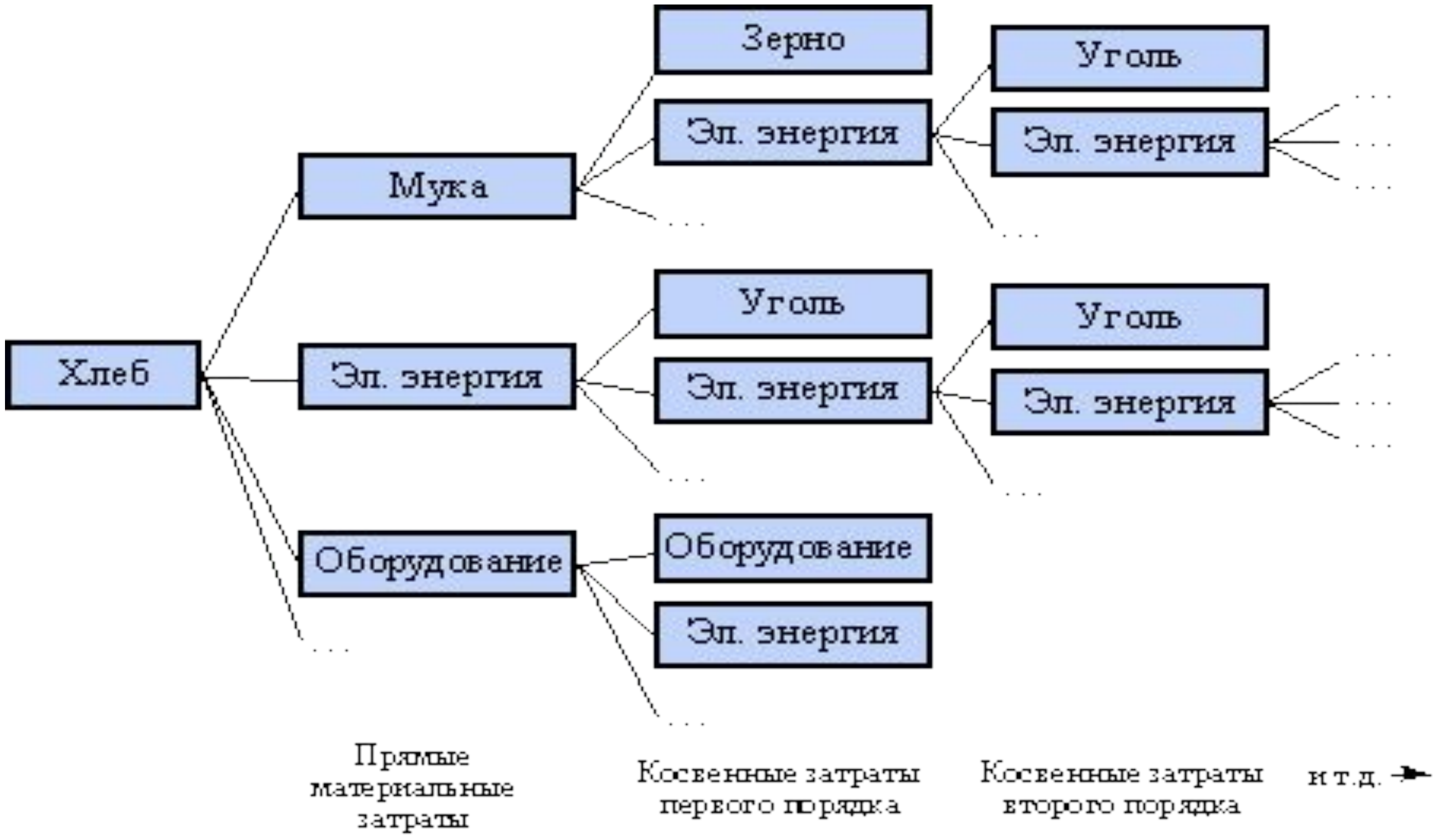
$\rightarrow B(E - A) = E, \rightarrow B = E / (E - A), \rightarrow B = (E - A)^{-1}$.

Из соотношения (7) следует $b_{ij} \geq a_{ij}$, $i = \overline{1,n}$, $j = \overline{1,n}$.

Таким образом, коэффициент полных материальных затрат b_{ij}, описывающий потребность в выпуске продукции i-й отрасли в расчете на единицу конечного продукта j-й отрасли, не меньше коэффициента прямых материальных затрат a_{ij}, рассчитываемого на единицу валового выпуска.

Кроме того, из соотношения (7) для диагональных элементов матрицы B следует: $b_{ii} \geq 1$, $i = \overline{1,n}$,

Взаимосвязь коэффициентов прямых и полных материальных затрат



Полные затраты электроэнергии для нашего примера складываются из прямых затрат и косвенных затрат всех уровней. Косвенные затраты высоких уровней являются незначительными и при практических расчетах ими можно пренебречь.