Пример решения транспортной задачи методом потенциалов

Предварительный шаг.

1. Найдем допустимый ациклический план методом северо-западного угла (возьмем план из предыдущей задачи).

2. Второй этап предварительного шага: определение системы потенциалов.

Потенциал приписывается каждому пункту отправления (обозначается u_i) и каждому пункту назначения (v_j). Всего потенциалов $m + n$ чисел. Они вносятся в специально отведенные для этого строку и столбец макета.

Для базисных тарифов c_{ij}, должны выполняться равенства

$$v_j - u_i = c_{ij}.$$

Эти равенства и будут служить теми уравнениями, из которых .находятся потенциалы. Однако таких уравнений будет только $(m + n - 1)$, а неизвестных в системе $(m + n)$, т. е. на единицу больше. Такая система уравнений имеет бесчисленное множество решений, любое из которых годится для нашей цели. Чтобы найти какое-то одно решение, значение одного потенциала выбираем произвольно (например, полагаем $u_1 = 0$). Остальные потенциалы определяем из решения системы.

Перепишем основную часть таблицы с найденным в ней допустимым планом; потенциалы пунктов пока запишем буквами.

Пункты назн. Пункты отправ.		B_1	B_2	B_3	B_4	Запасы груза
	v_j u_i	v_1	v_2	v_3	v_4	
A_1	u_1	2 90	4 –	6 –	10 –	90
A_2	u_2	1 20	3 80	7 –	4 –	100
A_3	u_3	4 –	8 20	13 80	7 40	140
Потребности в грузе		110	100	80	40	330

В макете $m + n - 1 = 6$ и число компонент плана тоже равно 6. Можно искать потенциалы. (Если бы число компонент плана было меньше 6, надо было бы включить в план недостающее число клеток с нулевыми перевозками, но так, чтобы при этом не было циклов.) Для базисных клеток составляем равенства:

$$
\begin{aligned}
v_1 - u_1 &= 2,\\
v_1 - u_2 &= 1,\\
v_2 - u_2 &= 3,\\
v_2 - u_3 &= 8,\\
v_3 - u_3 &= 13,\\
v_4 - u_3 &= 7.
\end{aligned}
$$

Мы получили шесть уравнений с семью неизвестными. Полагаем $u_1 = 0$ и остальные потенциалы вычисляем последовательно: $v_1 = 2$, $u_2 = 1$, $v_2 = 4$, $u_3 = — 4$, $v_3 = 9$, $v_4 = 3$. С этими потенциалами получаем следующую таблицу:

u_i \ v_j	2	4	9	3	Запасы груза
0	2: 90	4: –	6: –	10: –	90
1	1: 20	3: 80	7: –	4: –	100
–4	4: –	8: 20	13: 80	7: 40	140
Потребности в грузе	110	100	80	40	330

3. Третий этап предварительного шага: испытание системы потенциалов на потенциальность.

Потенциальность заключается в том, чтобы неравенство

$$v_j - u_i \le c_{ij}$$

выполнялось для всех без исключения клеток. При этом базисные клетки проверять не надо, так как потенциалы подобраны из условия выполнения в них равенства.

Для нашего примера будем иметь следующие разности потенциалов и тарифы для свободных клеток:

$$(1,2)\ v_2 - u_1 = 4 - 0 = 4 = 4 = c_{12}$$

$$(1,3)\ v_3 - u_1 = 9 - 0 = 9 > 6 = c_{13}$$

$$(1,4)\ v_4 - u_1 = 3 - 0 = 3 < 10 = c_{14}$$

$$(2,3)\ v_3 - u_2 = 9 - 1 = 8 > 7 = c_{23}$$

$$(2,4)\ v_4 - u_2 = 3 - 1 = 2 < 4 = c_{24}$$

$$(3,1)\ v_1 - u_3 = 2 - (-4) = 6 > 4 = c_{31}$$

После исследования клетки (1, 3) сразу можно было сказать, что план не потенциален. Однако такие вычисления всегда надо производить для всех свободных клеток.

Выделим случаи нарушения условий и запишем их в виде

$$(1,3)\ \ \delta_{13} = v_3 - u_1 - c_{13} = 9 - 0 - 6 = 3$$

$$(2,3)\ \ \delta_{23} = v_3 - u_2 - c_{23} = 9 - 1 - 7 = 1$$

$$(3,1)\ \ \delta_{31} = v_1 - u_3 - c_{31} = 2 - (-4) - 4 = 2$$

В общем случае выделяем положительные разности δ_{ij}:

$$\delta_{ij} = v_j - u_i - c_{ij} > 0$$

На этом предварительный шаг закончен.

Общий повторяющийся шаг.

1. Из положительных разностей δ_{ij} находим наибольшую разность, $\delta_{i_0 j_0}$:

$$\delta_{i_0 j_0} = \max\left(v_j - u_i - c_{ij} > 0\right).$$

Наибольшая разность $\delta_0 = 3$ имеет место для клетки (1,3). Включаем эту клетку в набор и строим на цикл.

2. Означиваем цикл, т. е. расставляем знаки в его вершинах. В исходной клетке (включаемой в набор) ставим плюс, двигаемся по ходу или против хода часовой стрелки и ставим знаки попеременно минус, плюс, — пока не придем к исходной вершине.

v_j / u_i	2	4	9	3	Запасы груза
0	– 2 90	4 –	+ 6 –	10 –	90
1	1 20 +	– 3 80	7 –	4 –	100
–4	4 –	8 20 +	13 80 –	7 40	140
Потребности в грузе	110	100	80	40	330

3. Выбираем наименьшее значение перевозки θ в клетках отрицательной полуцепи $(x_{ij})^{-}$.

$$\min (x_{ij})^{-} = \theta.$$

Наименьшая перевозка в отрицательной полуцепи равна 80, причем она в двух клетках: (2,2) и (3, 3). Возьмем $\theta = 80$ в клетке (3, 3).

4. Делаем сдвиг по циклу на величину θ.

В клетку (1, 3), включенную в набор, запишем перевозку 80; к перевозкам в клетках (3, 2), (2, 1) прибавим по 80; из перевозок в клетках (1, 1), (2, 2) и (3, 3) вычитаем по 80. В клетке (3, 3) ноля не пишем, так как она из плана исключается. В клетке (2, 2) записываем ноль: она остается в плане для сохранения в нем числа базисных клеток, которое равно $(m + n - 1)$. В результате приходим к плану, помещенному в таблицу.

v_j / u_i	2	4	6	3	Запасы груза
0	2 10	4 –	6 80	10 –	90
1	– 1 100	+ 3 0	7 –	4 –	100
–4	+ 4 –	– 8 100	13 –	7 40	140
Потребности в грузе	110	100	80	40	330

5. Для полученного после сдвига плана составляем новую систему потенциалов. Их можно найти исправлением уже имеющейся системы. Для клетки (1, 3) оставим $u_1 = 0$, а v_3 исправим с 9 на 6, тогда

$$v_3 - u_1 = 6 - 0 = 6 = 6 = c_{13}.$$

По остальным занятым клеткам равенства выполняются со старыми потенциалами. Так новая система потенциалов получена одним исправлением.

6. Производим исследование новой системы на потенциальность. Для этого проверяем выполнение неравенств

$$v_j - u_i \le c_{ij}$$

для всех незанятых клеток.

$$(1,2)\ \ v_2 - u_1 = 4 - 0 = 4 = 4 = c_{12},$$

$$(1,4)\ \ v_4 - u_1 = 3 - 0 = 3 < 10 = c_{14},$$

$$(2,3)\ \ v_3 - u_2 = 6 - 1 = 5 < 7 = c_{23},$$

$$(2,4)\ \ v_4 - u_2 = 3 - 1 = 2 < 4 = c_{24},$$

$$(3,1)\ \ v_1 - u_3 = 2 - (-4) = 6 > 4 = c_{31},$$

$$(3,3)\ \ v_3 - u_3 = 6 - (-4) = 10 < 13 = c_{33}.$$

Условие не выполнено только в одной клетке (3, 1). Включаем ее в набор, выделяем цикл, делаем сдвиг . Находим новый план. Исправляем для него потенциалы и записываем их в таблицу.

u_i \ v_j	2	4	6	5	Запасы груза
0	2 10	4 –	6 80	10 –	90
1	1 0	3 100	7 –	4 –	100
–2	4 100	8	13 –	7 40	140
Потребности в грузе	110	100	80	40	330

Испытываем эту систему на потенциальность:

$$
\begin{aligned}
&(1,2)\ v_2 - u_1 = 4 - 0 = 4 = 4 = c_{12},\\
&(1,4)\ v_4 - u_1 = 5 - 0 = 5 < 10 = c_{14},\\
&(2,3)\ v_3 - u_2 = 6 - 1 = 5 < 7 = c_{23},\\
&(2,4)\ v_4 - u_2 = 5 - 1 = 4 = 4 = c_{24},\\
&(3,2)\ v_2 - u_3 = 4 - (-2) = 6 < 8 = c_{32},\\
&(3,3)\ v_3 - u_3 = 6 - (-2) = 8 < 13 = c_{33}.
\end{aligned}
$$

Для всех свободных клеток разность потенциалов меньше или равна тарифу; система потенциальна, план оптимален.

Стоимость перевозок по данному плану будет наименьшей:

$$z_{\min} = 10 \cdot 2 + 80 \cdot 6 + 100 \cdot 3 + 100 \cdot 4 + 40 \cdot 7 = 1480\,.$$

Контроль вычислений осуществляется таким образом. В процессе решения задачи на каждом шаге полученный план проверяется на допустимость. Для этого компоненты плана суммируются по строкам и столбцам; суммы должны равняться соответственно запасам и потребностям пунктов.

Окончательный (оптимальный) план проверяется по формуле, вытекающей из доказательства основной теоремы:

$$z_{\min} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} c_{ij}x_{ij} = \sum_{j=1}^{n} v_j b_j - \sum_{i=1}^{m} u_i a_i$$

при этом контролируются и потенциалы. Для примера имеем:

$$\sum_{j=1}^{n} v_j b_j = 2\cdot 110 + 4\cdot 100 + 6\cdot 80 + 5\cdot 40 = 1300$$

$$\sum_{i=1}^{m} u_i a_i = 0\cdot 90 + 1\cdot 100 + (-2)\cdot 140 = -180$$

$$\sum_{j=1}^{n} v_j b_j - \sum_{i=1}^{m} u_i a_i = 1300 - (-180) = 1480 = z_{\min}$$