

Приращение аргумента и функции.

Для функции $y=f(x)$ разность двух значений аргумента x_1 и x_2 , принадлежащих ОДЗ, называется **приращением аргумента** и обозначается Δx , т.е.
 $x_2 - x_1 = \Delta x$

Разность двух значений функции $y_1 = f(x_1)$ $y_2 = f(x_2)$, соответствующих значениям аргумента x_1 и x_2 , называется **приращением функции** и обозначается Δy , т.е. $\Delta y = f(x_2) - f(x_1) = y_2 - y_1$

Если $x_2 > x_1$, то $\Delta x > 0$

Если $x_2 < x_1$, то $\Delta x < 0$

Если $y_2 > y_1$, то $\Delta y > 0$

Если $y_2 < y_1$, то $\Delta y < 0$

- Итак, $x_2 - x_1 = \Delta x$, значит $x_2 = x_1 + \Delta x$,
 $\Delta y = f(x_2) - f(x_1) = f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)$

Задача: найти приращение функции $y = x^2$

а) при переходе от $x_1 = 1$ к точке $x_2 = 1,1$.

решение: $f(1) = 1^2 = 1$

$$f(1,1) = 1,1^2 = 1,21$$

$$\Delta y = f(1,1) - f(1) = 1,21 - 1 = 0,21$$

б) при переходе от $x_1 = 1$ к точке $x_2 = 0,98$.

$$f(1) = 1^2 = 1 \qquad f(0,98) = 0,98^2 = 0,9604$$

$$\Delta y = f(0,98) - f(1) = 0,9604 - 1 = -0,0396$$

Найти приращение функции $y=x^2+x+1$, если аргумент x изменил свое значение от $x_1=2$ до $x_2 = 2,5$.

..

Если условие непрерывности функции в некоторой точке нарушено, то такую точку называют **точкой разрыва функции**.

Пример: Для функции $y=kx+m$ найти:

1) Δy при переходе от фиксированной точки x к точке $x + \Delta x$;

2) $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$

Пример: Для функции $y=x^2$ найти:

1) приращение функции при переходе от фиксированной точки x к точке $x + \Delta x$;

2) $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$

Пусть функция $y=f(x)$ определена на некотором промежутке, x -точка этого промежутка и число Δx таково, что $x + \Delta x$ тоже принадлежит этому промежутку.

Тогда производной функции $y=f(x)$

называется $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$

Процесс вычисления производной называется **дифференцированием**.

С физической точки зрения производная от $f(x)$ в точке x представляет собой скорость изменения функции $f(x)$ относительно ее аргумента при данном значении x .

Ранее доказали, что для линейной функции $y = kx + m$ справедливо равенство $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = k$

Это $y' = k$ или подробнее $(kx + m)' = k$

В частности $(x)' = 1$

Для функции $y = x^2$ справедливо равенство

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 2x$$

Это значит $(x^2)' = 2x$

Алгоритм отыскания производной (для функции $y=f(x)$)

1. Зафиксировать значение x , найти $f(x)$.
2. Дать аргументу x приращение Δx , перейти в новую точку $x + \Delta x$, найти $f(x + \Delta x)$.
3. Найти приращение функции $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$.
4. Составить отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x}$
5. Вычислить $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$

Пример: найти производную постоянной функции $y=C$.

Решение:

1. Для фиксированного значения x имеем
 $f(x)=C$

2. В точке $x+ \Delta x$ имеем $f(x+ \Delta x)=C$

3. $\Delta y=C-C=0$

4. $\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{0}{\Delta x}=0$

5. $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x \rightarrow 0} 0=0$

Ответ: $(c)'=0$

Пример: найти производную функцию $y = \frac{1}{x}$

Решение: 1. Для фиксированного значения x имеем $f(x) = \frac{1}{x}$

2. В точке $x + \Delta x$ имеем $f(x + \Delta x) = \frac{1}{x + \Delta x}$

$$3. \Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = \frac{1}{x + \Delta x} - \frac{1}{x} = \frac{x - (x + \Delta x)}{x(x + \Delta x)} = \frac{-\Delta x}{x(x + \Delta x)}$$

$$4. \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-\Delta x}{x(x + \Delta x)\Delta x} = \frac{-1}{x(x + \Delta x)}$$

$$5. \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{-1}{x(x + \Delta x)} = -\frac{1}{x^2}$$

$$\text{Ответ: } \left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$$

Правила дифференцирования

1. Если функции $y=f(x)$, $y=g(x)$ имеют производную в точке x , то их сумма имеет производную в точке x равную сумме производных.

$$(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$$

Пример: $(3x+5)' = (3x)' + (5)' = 3 + 0 = 3$

2. Если функция $y=f(x)$ имеет производную в точке x , то функция $y=kf(x)$ имеет производную в точке x

$$(kf(x))' = kf'(x)$$

Пример: $(5x^2)' = 5(x^2)' = 5 \cdot 2x = 10x$

3. Если функции $y=f(x)$, $y=g(x)$ имеют производную в точке x , то их произведение имеет производную в точке x , причем

$$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

Пример: Найти производную $y = x^3$

Решение: Представим $x^3 = x \cdot x^2$

$$(x^3)' = (x \cdot x^2)' = (x)' \cdot x^2 + (x^2)' \cdot x = 1 \cdot x^2 + 2x \cdot x = 3x^2$$

4. Если функции $y=f(x)$ и $y=g(x)$ имеют производную в точке x и в этой точке

$g(x) \neq 0$, то и частное

$\frac{f(x)}{g(x)}$ имеет производную в точке x

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$$

Пример: $\left(\frac{x^2}{5-4x}\right)' = \frac{(x^2)'(5-4x) - x^2(5-4x)'}{(5-4x)^2} =$

$$\frac{2x \cdot (5-4x) - x^2(-4)}{(5-4x)^2} = \frac{10x - 8x^2 + 4x^2}{(5-4x)^2} = \frac{10x - 4x^2}{(5-4x)^2}$$

Таблица производных.

1. $C' = 0$;

2. $x' = 1$;

3. $(Cu)' = C \cdot u'$;

4. $(x^n)' = nx^{n-1}$;

5. $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$;

$$\left(\frac{1}{\sqrt[n]{x}}\right)' = -\frac{1}{nx\sqrt[n]{x}}$$

6. $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$;

7. $(\sin x)' = \cos x$;

8. $(\cos x)' = -\sin x$;

9. $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$;

10. $(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$.

$$\left(\frac{1}{x^n}\right)' = -\frac{n}{x^{n+1}}$$

Правила дифференцирования.

I. $(u + v)' = u' + v'$;

II. $(uv)' = u'v + uv'$;

III. $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$;

IV. $\left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{v'}{v^2}$.