Приращение аргумента и функции.

Для функции y=f(x) разность двух значений аргумента x_1 и x_2, принадлежащих ОДЗ, называется **приращением аргумента** и обозначается Δx, т.е. x_2-x_1= Δx

Разность двух значений функции $y_1 = f(x_1)$ y_2=f(x_2), соответствующих значениям аргумента x_1 и x_2 , называется **приращением функции** и обозначается Δy, т.е. $\Delta y =$ f(x_2)- $f(x_1) = y_2$-y_1

Если $x_2 > x_1$, то $\Delta x > 0$

Если $x_2 < x_1$, то $\Delta x < 0$

Если $y_{2>} y_1$, то $\Delta y > 0$

Если $y_{2\ <} y_1$, то $\Delta y < 0$

- Итак, x_2-x_1= Δx, значит x_2=x_1+ Δx,

Δy= f(x_2)- $f(x_1)$=f(x_1+ Δx) - $f(x_1)$

Задача: найти приращение функции $y=x^2$

а)при переходе от x_1=1 к точке x_2=1,1.

решение: f(1)=1^2=1

f(1,1)=$1{,}1^2$=1,21

Δy=f(1,1)-f(1)=1,21-1=0,21

б) при переходе от x_1=1 к точке x_2=0,98.

f(1)=1^2=1 f(0,98)=$0{,}98^2 = 0{,}9604$

Δy=f(0,98)-f(1)=0,9604-1=-0,0396

Найти приращение функции $y=x^2+x+1$, если аргумент x изменил свое значение от $x_1=2$ до $x_2 = 2,5$.

Если условие непрерывности функции в некоторой точке нарушено, то такую точку называют **точкой разрыва функции**.

Пример: Для функции y=kx+m найти:

1) Δy при переходе от фиксированной точки x к точке x+ Δx;

2) $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$

Пример: Для функции $y=x^2$ найти:

1) приращение функции при переходе от фиксированной точки x к точке $x+\Delta x$;

2) $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$

- Пусть функция y=f(x) определена на некотором промежутке, x-точка этого промежутка и число Δx таково, что x+ Δx тоже принадлежит этому промежутку.

Тогда производной функции y=f(x) называется $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$

Процесс вычисления производной называется **дифференцированием.**

- С физической точки зрения производная от f(x) в точке x представляет собой скорость изменения функции f(x) относительно ее аргумента при данном значении x.

Ранее доказали, что для линейной функции y= kx+m справедливо равенство $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$=k

Это y'=k или подробнее $(kx+m)'$= k

В частности $(x)'$=1

Для функции y= x^2 справедливо равенство $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$=2x

Это значит $(x^2)'$=2x

Алгоритм отыскания производной
(для функции y=f(x))

1. Зафиксировать значение x, найти f(x).

2. Дать аргументу x приращение Δx, перейти в новую точку x+ Δx, найти f(x+ Δx).

3. Найти приращение функции $\Delta y =$ f(x+ Δx) - $f(x)$.

4. Составить отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x}$

5. Вычислить $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$

- Пример: найти производную постоянной функции y=C.

Решение:

1. Для фиксированного значения x имеем f(x)=C
2. В точке x+ Δx имеем f(x+ Δx)=C
3. Δy=C-C=0
4. $\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{0}{\Delta x}=0$
5. $\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0} 0=0$

Ответ: $(c)'=0$

- Пример: найти производную функцию у=$\frac{1}{x}$

- Решение: 1. Для фиксированного значения x имеем f(x)= $\frac{1}{x}$

2. В точке x+ Δx имеем f(x+ Δx)=$\frac{1}{x+\Delta x}$

3. $\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x) = \frac{1}{x+\Delta x} - \frac{1}{x} = \frac{x-(x+\Delta x)}{x(x+\Delta x)} =$

$= \frac{-\Delta x}{x(x+\Delta x)}$

4. $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-\Delta x}{x(x+\Delta x)\Delta x} = \frac{-1}{x(x+\Delta x)}$

5. $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{-1}{x(x+\Delta x)} = -\frac{1}{x^2}$

Ответ: $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$

Правила дифференцирования

1. Если функции y=f(x), y=g(x) имеют производную в точке x, то их сумма имеет производную в точке x равную сумме производных.

$\left(f(x)+g(x)\right)'$=f'(x)+g'(x)

Пример: (3x+5)'=(3x)'+(5)'=3+0=3

2.Если функция y=f(x) имеет производную в точке x, то функция y=kf(x) имеет производную в точке x

(kf(x))'=kf'(x)

Пример: $(5x^2)$'=5(x^2)'=5·2x=10x

3. Если функции y=f(x), y=g(x) имеют производную в точке x, то их произведение имеет производную в точке x, причем

$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$

Пример: Найти производную y= x^3

Решение: Представим $x^3 = x \cdot x^2$

$(x^3)' = (x \cdot x^2)' = (x)' \cdot x^2 + (x^2)' \cdot x = 1 \cdot x^2 + 2x \cdot x = 3x^2$

4. Если функции y=f(x) и y=g(x) имеют производную в точке x и в этой точке

$g(x) \neq 0$, то и частное

$\frac{f(x)}{g(x)}$ имеет производную в точке x

$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$

- Пример: $\left(\frac{x^2}{5-4x}\right)' = \frac{(x^2)'(5-4x)-x^2(5-4x)'}{(5-4x)^2} =$

$$\frac{2x\cdot(5-4x)-x^2(-4)}{(5-4x)^2} = \frac{10x-8x^2+4x^2}{(5-4x)^2} = \frac{10x-4x^2}{(5-4x)^2}$$

Таблица производных.

1. $C' = 0;$
2. $x' = 1;$
3. $(Cu)' = C \cdot u';$
4. $(x^n)' = nx^{n-1};$
5. $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}};$
6. $(\frac{1}{x})' = -\frac{1}{x^2};$
7. $(\sin x)' = \cos x;$
8. $(\cos x)' = -\sin x;$
9. $(\mathrm{tg}\,x)' = \frac{1}{\cos^2 x};$
10. $(\mathrm{ctg}\,x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}.$

$$\boxed{(\frac{1}{\sqrt[n]{x}})' = -\frac{1}{nx\sqrt[n]{x}}}$$

$$\boxed{(\frac{1}{x^n})' = -\frac{n}{x^{n+1}}}$$

Правила дифференцирования.

I. $(u + v)' = u' + v';$

II. $(uv)' = u'v + uv';$

III. $(\frac{u}{v})' = \frac{u'v - uv'}{v^2};$

IV. $(\frac{1}{v})' = -\frac{v'}{v^2}.$