# ПРОДОЛЖЕНИЕ ЛЕКЦИИ №3

# Взаимное расположение прямых в пространстве.

- Прямые в пространстве могут **совпадать**,
- **быть параллельными**, **пересекаться** или
- **скрещиваться**.
- Две прямые $L_1$ и $L_2$ лежат в одной плоскости
- тогда и только тогда, когда компланарны
- векторы $\overline{M_1M_2}$, $\vec{q}_1$ и $\vec{q}_2$, где $\vec{q}_1$ и $\vec{q}_2$ -
- направляющие векторы прямых $L_1$ и $L_2$,
- соответственно, а $\overline{M_1M_2}$ - вектор,
- соединяющий точку $M_1$, лежащую на прямой
- $L_1$, с точкой $M_2$, лежащей на прямой $L_2$.
-

- Следовательно, если смешанное
- произведение векторов $\overrightarrow{M_1M_2}$, $\vec{q}_1$ и $\vec{q}_2$ равно
- нулю, то прямые лежат в одной плоскости.
- Если прямые принадлежат одной плоскости,
- то они могут совпадать, пересекаться и быть
- параллельными.
- Пусть заданы прямые $L_1$ и $L_2$:

$$L_1 : \frac{x - x_1}{l_1} = \frac{y - y_1}{m_1} = \frac{z - z_1}{p_1},$$

$$L_2 : \frac{x - x_2}{l_2} = \frac{y - y_2}{m_2} = \frac{z - z_2}{p_2}.$$

где $M_1(x_1, y_1, z_1) \in L_1$, $M_2(x_2, y_2, z_2) \in L_2$, а

$\vec{q}_1(l_1, m_1, p_1)$ и $\vec{q}_2(l_2, m_2, p_2)$

– направляющие векторы прямых $L_1$ и $L_2$, соответственно:

Тогда прямые $L_1$ и $L_2$:

1) **скрещиваются**, если

$$\begin{vmatrix} l_1 & m_1 & p_1 \\ l_2 & m_2 & p_2 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \end{vmatrix} \neq 0;$$

- 2) пересекаются, если

$$\begin{vmatrix} l_1 & m_1 & p_1 \\ l_2 & m_2 & p_2 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \end{vmatrix} = 0$$

- и вектор $\vec{q}_1$ не коллинеарен вектору $\vec{q}_2$, т. е.
- координаты этих векторов не
- пропорциональны:
- $\dfrac{l_1}{l_2} \neq \dfrac{m_1}{m_2}$ или $\dfrac{l_1}{l_2} \neq \dfrac{p_1}{p_2}$;

- 3) параллельны, если

$$\frac{l_1}{l_2} = \frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2}$$

- и точка $M_1(x_1, y_1, z_1) \notin L_2$, то есть

$$\frac{x_1 - x_2}{l_2} \neq \frac{y_1 - y_2}{m_2} \quad \text{или} \quad \frac{x_1 - x_2}{l_2} \neq \frac{z_1 - z_2}{p_2};$$

- 4) совпадают, если
- $\dfrac{l_1}{l_2}=\dfrac{m_1}{m_2}=\dfrac{p_1}{p_2}$ и точка $M_1(x_1, y_1, z_1)\in L_2$, то
- есть

$$\frac{x_1 - x_2}{l_2}=\frac{y_1 - y_2}{m_2}=\frac{z_1 - z_2}{p_2}.$$

# Угол между прямыми в пространстве

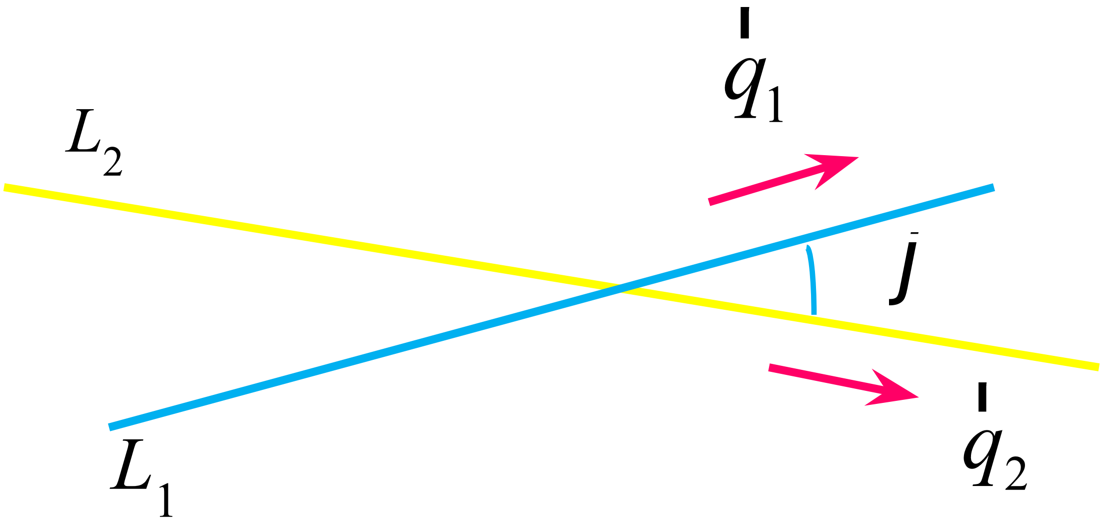
- Пусть

$$L_1: \frac{x - x_1}{l_1} = \frac{y - y_1}{m_1} = \frac{z - z_1}{p_1},$$

$$L_2: \frac{x - x_2}{l_2} = \frac{y - y_2}{m_2} = \frac{z - z_2}{p_2},$$

- где $\vec{q}_1(l_1, m_1, p_1)$, $\vec{q}_2(l_2, m_2, p_2)$ - направляющие векторы прямых $L_1$ и $L_2$.

- При пересечении прямые образуют 4 угла (две пары смежных углов). Наименьший из двух смежных углов в паре является углом между прямыми.



- Косинус наименьшего угла между прямыми $L_1$ и $L_2$ равен модулю косинуса угла между направляющими векторами этих прямых:

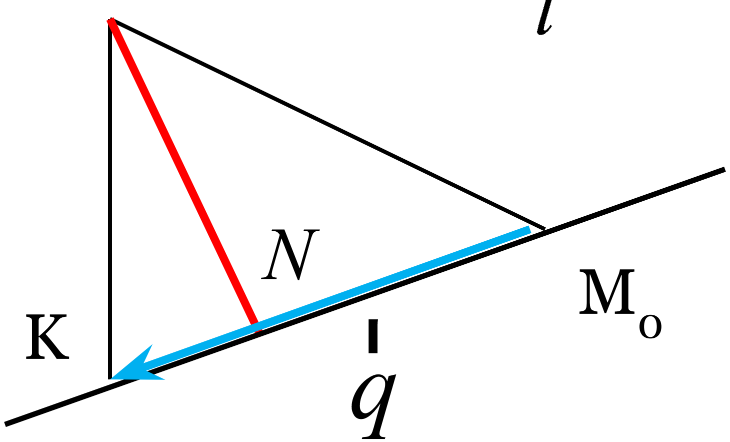
$$\cos(L_1 \wedge L_2) = \left|\cos(\vec{q}_1 \wedge \vec{q}_2)\right| = \frac{\left|(\vec{q}_1, \vec{q}_2)\right|}{\left|\vec{q}_1\right| \cdot \left|\vec{q}_2\right|} =$$

$$= \frac{\left|l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2\right|}{\sqrt{l_1^2 + m_1^2 + n_1^2}\sqrt{l_2^2 + m_2^2 + n_2^2}}.$$

# Расстояние от точки до прямой в пространстве.

- Пусть задана прямая

$$L: \frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{p},$$




- Точка $M_o(x_o, y_o, z_o) \in L$,  $\vec{q}(l, m, p)$ –
- направляющий вектор , точка $M(x_1, y_1, z_1) \notin L$.

- Приложим вектор $\vec{q}(l,m,p)$ к точке $M_0$. Тогда расстояние от точки $M$ до прямой $L$ равно высоте треугольника $MKM_0$.

$$S_{\Delta MKM_0} = \frac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{M_0M}, \vec{q}\right]\right| = \frac{1}{2} h \cdot \left|\vec{q}\right| \Rightarrow \quad h = \frac{\left|\left[\overrightarrow{M_0M}, \vec{q}\right]\right|}{\left|\vec{q}\right|}$$

- Тогда расстояние от точки $M$ до прямой $L$ можно найти по формуле:

$$\boxed{\rho(M,L) = |MN| = \frac{\left|\left[\overrightarrow{M_0M}, \vec{q}\right]\right|}{\left|\vec{q}\right|}.}$$

- **Замечание.**
- Расстояние между параллельными прямыми может быть найдено по этой же формуле, как расстояние от любой точки, принадлежащей одной прямой, до другой прямой.

# Расстояние между скрещивающимися прямыми в пространстве.

- Пусть

$$L_1: \frac{x-x_1}{l_1} = \frac{y-y_1}{m_1} = \frac{z-z_1}{p_1}, \quad L_2: \frac{x-x_2}{l_2} = \frac{y-y_2}{m_2} = \frac{z-z_2}{p_2},$$

- где $M_1(x_1, y_1, z_1) \in L_1$, $M_2(x_2, y_2, z_2) \in L_2$, а
- $\vec{q_1}(l_1, m_1, p_1)$, $\vec{q_2}(l_2, m_2, p_2)$ - направляющие векторы прямых $L_1$ и $L_2$.
- Тогда

- Тогда расстояние между скрещивающимися прямыми можно найти по формуле:

$$\rho(L_1, L_2) = \frac{\left|\left(\overrightarrow{M_1M_2}, \vec{q}_1, \vec{q}_2\right)\right|}{\left|\left[\vec{q}_1, \vec{q}_2\right]\right|},$$

- где $\left|\left(\overrightarrow{M_1M_2}, \vec{q}_1, \vec{q}_2\right)\right|$ - модуль смешанного произведения векторов, а $\left|\left[\vec{q}_1, \vec{q}_2\right]\right|$ - модуль векторного произведения.

# Взаимное расположение прямой и плоскости в пространстве.

- Пусть в пространстве заданы прямая

$$L: \frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{p}$$

- и $\quad P: Ax + By + Cz + D = 0.$

- Точка $M_o(x_o, y_o, z_o) \in L$, вектор $\overrightarrow{q}(l, m, p)$ – направляющий вектор прямой $L$; вектор $\overrightarrow{n}(A, B, C)$ – нормальный вектор плоскости $P$.
- Прямая может пересекать плоскость, быть ей параллельной или лежать в плоскости.

- 1. Если прямая лежит в плоскости, то
- $\overrightarrow{n} \perp \overrightarrow{q}$ и точка $M(x_o, y_o, z_o) \in P$. Таким
- образом, прямая лежит в плоскости,
- если: $Al + Bm + Cp = 0$ и

$$Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0.$$

- 2. Если прямая параллельна плоскости,
- то $\vec{n} \perp \vec{q}$ и точка $M(x_o, y_o, z_o) \in P$.
- Таким образом, прямая параллельна
- плоскости, если: $Al + Bm + Cp = 0$ и

$$Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D \neq 0.$$

- 3. Прямая пересекает плоскость, если направляющий вектор прямой не перпендикулярен нормальному вектору плоскости, а значит их скалярное произведение не равно нулю: $(\vec{n}, \vec{q}) \neq 0$, т. е. $Al + Bm + Cp \neq 0$.

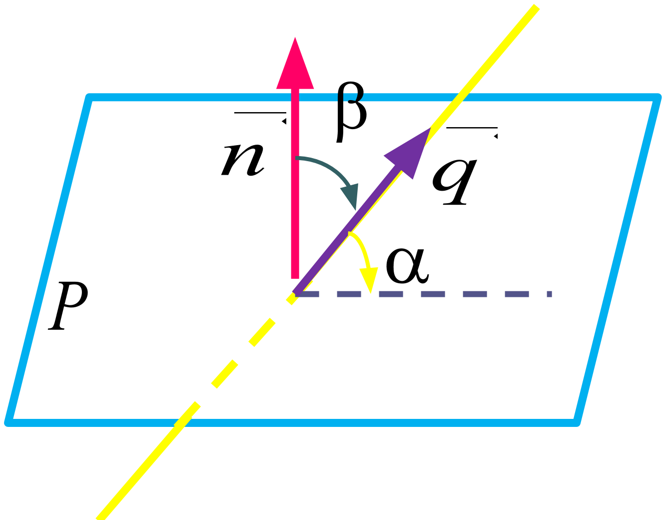
# Угол между прямой и плоскостью.

- Углом между прямой и плоскостью называется угол между прямой и ее проекцией на эту плоскость.
- Рассмотрим прямую

$$L: \frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{p}$$

- и плоскость

$$Ax + By + Cz + D = 0$$




$$\cos\beta = \frac{(\vec{n}, \vec{q})}{|\vec{n}| \cdot |\vec{q}|} \Rightarrow \quad \sin(L \hat{,} P) = \left|\cos(\vec{n}, \vec{q})\right| = \frac{\left|(\vec{n}, \vec{q})\right|}{|\vec{n}| \cdot |\vec{q}|} =$$

$$= \frac{|Al + Bm + Cn|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\sqrt{l^2 + m^2 + n^2}}$$