

# ПРОДОЛЖЕНИЕ ЛЕКЦИИ №3



# Взаимное расположение прямых в пространстве.

- Прямые в пространстве могут **совпадать**,
- **быть параллельными, пересекаться** или
- **скрещиваться**.
- Две прямые  $L_1$  и  $L_2$  лежат в одной плоскости
- тогда и только тогда, когда компланарны
- векторы  $M_1M_2$ ,  $q_1$  и  $q_2$  где  $q_1$  и  $q_2$  -
- направляющие векторы прямых  $L_1$  и  $L_2$ ,
- соответственно, а  $M_1M_2$  - вектор,
- соединяющий точку  $M_1$ , лежащую на прямой
- $L_1$ , с точкой  $M_2$ , лежащей на прямой  $L_2$ .
-

- Следовательно, если смешанное произведение векторов  $M_1M_2, q_1, q_2$  равно нулю, то прямые лежат в одной плоскости.
- Если прямые принадлежат одной плоскости, то они могут совпадать, пересекаться и быть параллельными.
- Пусть заданы прямые  $L_1$  и  $L_2$ :

$$L_1 : \frac{x - x_1}{l_1} = \frac{y - y_1}{m_1} = \frac{z - z_1}{p_1},$$

$$L_2 : \frac{x - x_2}{l_2} = \frac{y - y_2}{m_2} = \frac{z - z_2}{p_2}.$$

где  $M_1(x_1, y_1, z_1) \in L_1$ ,  $M_2(x_2, y_2, z_2) \in L_2$ , а  
 $\vec{q}_1(l_1, m_1, p_1)$  и  $\vec{q}_2(l_2, m_2, p_2)$   
– направляющие векторы прямых  $L_1$  и  $L_2$ ,  
соответственно:

Тогда прямые  $L_1$  и  $L_2$ :

1) **скрещиваются**, если

$$\begin{vmatrix} l_1 & m_1 & p_1 \\ l_2 & m_2 & p_2 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \end{vmatrix} \neq 0;$$

- 2) пересекаются, если

$$\begin{vmatrix} l_1 & m_1 & p_1 \\ l_2 & m_2 & p_2 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \end{vmatrix} = 0$$

- и вектор  $\vec{q}_1$  не коллинеарен вектору  $\vec{q}_2$ , т. е.
- координаты этих векторов не
- пропорциональны:
- $\frac{l_1}{l_2} = \frac{m_1}{m_2}$  или  $\frac{l_1}{l_2} = \frac{p_1}{p_2}$ ;

- 3) параллельны, если

$$\frac{l_1}{l_2} = \frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2}$$

- и точка  $M_1(x_1, y_1, z_1) \notin L_2$ , то есть

$$\frac{x_1 - x_2}{l_2} = \frac{y_1 - y_2}{m_2} \quad \text{ИЛИ} \quad \frac{x_1 - x_2}{l_2} = \frac{z_1 - z_2}{p_2};$$

- 4) совпадают, если

- $\frac{l_1}{l_2} = \frac{m_1}{m_2} = \frac{p_1}{p_2}$  и точка  $M_1(x_1, y_1, z_1) \in L_2$ , то

- есть

$$\frac{x_1 - x_2}{l_2} = \frac{y_1 - y_2}{m_2} = \frac{z_1 - z_2}{p_2}.$$

## Угол между прямыми в пространстве

- Пусть

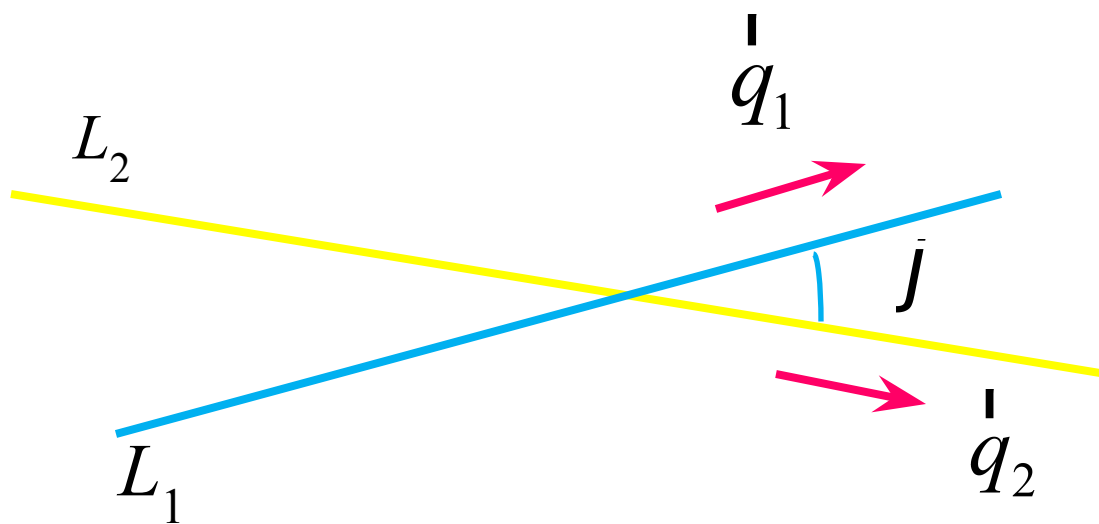
$$L_1 : \frac{x - x_1}{l_1} = \frac{y - y_1}{m_1} = \frac{z - z_1}{p_1},$$

$$L_2 : \frac{x - x_2}{l_2} = \frac{y - y_2}{m_2} = \frac{z - z_2}{p_2},$$

- где  $\vec{q}_1(l_1, m_1, p_1)$ ,  $\vec{q}_2(l_2, m_2, p_2)$  - направляющие векторы прямых  $L_1$  и  $L_2$ .



- При пересечении прямые образуют 4 угла (две пары смежных углов). Наименьший из двух смежных углов в паре является углом между прямыми.



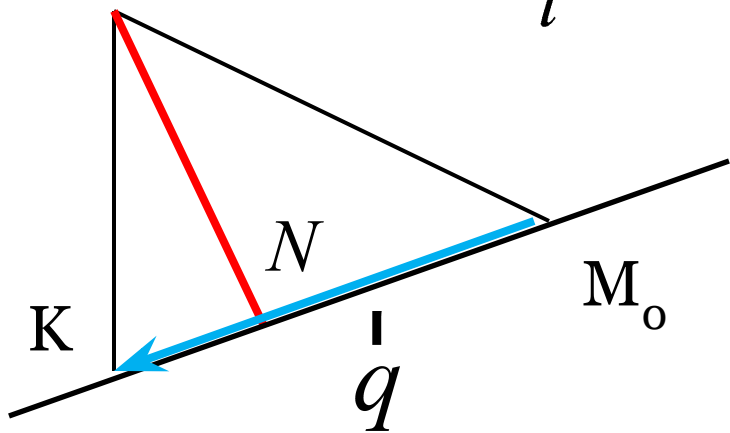
- Косинус наименьшего угла между прямыми  $L_1$  и  $L_2$  равен модулю косинуса угла между направляющими векторами этих прямых:

$$\begin{aligned} \cos(L_1, L_2) &= \left| \cos(\vec{q}_1, \vec{q}_2) \right| = \frac{|\langle \vec{q}_1, \vec{q}_2 \rangle|}{|\vec{q}_1| |\vec{q}_2|} = \\ &= \frac{|l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2|}{\sqrt{l_1^2 + m_1^2 + n_1^2} \sqrt{l_2^2 + m_2^2 + n_2^2}}. \end{aligned}$$

# Расстояние от точки до прямой в пространстве.

- Пусть задана прямая

$$L: \frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{p},$$



- Точка  $M_0(x_0, y_0, z_0) \in L$ , направляющий вектор  $\vec{q}(l, m, p)$ .
- направляющий вектор, точка  $M(x_1, y_1, z_1) \notin L$ .

- Приложим вектор  $\vec{q}(l, m, p)$  к точке  $M_0$ . Тогда расстояние от точки  $M$  до прямой  $L$  равно высоте треугольника  $MKM_0$ .

$$S_{\triangle MKM_0} = \frac{1}{2} |\vec{r}_{M_0M} \times \vec{q}| = \frac{1}{2} h |\vec{q}| \quad \text{и} \quad h = \frac{|\vec{r}_{M_0M} \times \vec{q}|}{|\vec{q}|}$$

- Тогда расстояние от точки  $M$  до прямой  $L$  можно найти по формуле:

$$r(M, L) = |MN| = \frac{|\vec{r}_{M_0M} \times \vec{q}|}{|\vec{q}|}.$$

- **Замечание.**
- Расстояние между параллельными прямыми может быть найдено по этой же формуле, как расстояние от любой точки, принадлежащей одной прямой, до другой прямой.

# Расстояние между скрещивающимися прямыми в пространстве.

- Пусть

$$L_1 : \frac{x - x_1}{l_1} = \frac{y - y_1}{m_1} = \frac{z - z_1}{p_1}, \quad L_2 : \frac{x - x_2}{l_2} = \frac{y - y_2}{m_2} = \frac{z - z_2}{p_2},$$

- где  $M_1(x_1, y_1, z_1) \in L_1$ ,  $M_2(x_2, y_2, z_2) \in L_2$ , а

- $\vec{q}_1(l_1, m_1, p_1)$ ,  $\vec{q}_2(l_2, m_2, p_2)$  - направляющие векторы прямых  $L_1$  и  $L_2$ .

- Тогда

- Тогда расстояние между скрещивающимися прямыми можно найти по формуле:

$$\rho(L_1, L_2) = \frac{\left| \left( \begin{array}{c} \overrightarrow{M_1 M_2} \quad \vec{q}_1 \quad \vec{q}_2 \\ \hline \vec{q}_1 \quad \vec{q}_2 \end{array} \right) \right|}{\left| [\vec{q}_1, \vec{q}_2] \right|},$$

- где  $\left| \left( \begin{array}{c} \overrightarrow{M_1 M_2} \quad \vec{q}_1 \quad \vec{q}_2 \\ \hline \vec{q}_1 \quad \vec{q}_2 \end{array} \right) \right|$  - модуль смешанного произведения векторов, а  $\left| [\vec{q}_1, \vec{q}_2] \right|$  - модуль векторного произведения.

# Взаимное расположение прямой и плоскости в пространстве.

- Пусть в пространстве заданы прямая

$$L: \frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{p}$$

- и  $P: Ax + By + Cz + D = 0.$



- Точка  $M_0(x_0, y_0, z_0) \in L$ , вектор  $\vec{q}(l, m, p)$  – направляющий вектор прямой  $L$ ; вектор  $\vec{n}(A, B, C)$  – нормальный вектор плоскости  $P$ .
- Прямая может пересекать плоскость, быть ей параллельной или лежать в плоскости.
- 1. Если прямая лежит в плоскости, то
- $\vec{n} \perp \vec{q}$  и точка  $M(x_0, y_0, z_0) \in P$ . Таким образом, прямая лежит в плоскости, если:  $Al + Bm + Cp = 0$  и

$$Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0.$$

- 2. Если прямая параллельна плоскости,
- то  $\vec{n} \perp \vec{q}$  и точка  $M(x_0, y_0, z_0) \in P$ .
- Таким образом, прямая параллельна
- плоскости, если:  $Al + Bm + Cp = 0$  и

$$Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D \neq 0.$$

- 3. Прямая пересекает плоскость, если направляющий вектор прямой не перпендикулярен нормальному вектору плоскости, а значит их скалярное произведение не равно нулю:  $(\vec{n}, \vec{q}) \neq 0$ , т. е.  $Al + Bm + Cp \neq 0$ .

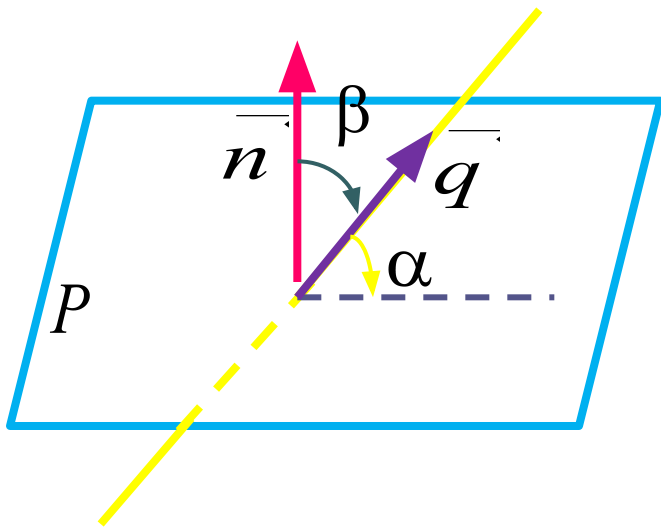
# Угол между прямой и плоскостью.

- Углом между прямой и плоскостью называется угол между прямой и ее проекцией на эту плоскость.
- Рассмотрим прямую

$$L : \frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{p}$$

- и плоскость

$$Ax + By + Cz + D = 0$$



$$\cos \beta = \frac{(\vec{n}, \vec{q})}{|\vec{n}| \cdot |\vec{q}|} \Rightarrow \sin(\hat{L}, P) = \left| \cos(\vec{n}, \vec{q}) \right| = \frac{|(\vec{n}, \vec{q})|}{|\vec{n}| \cdot |\vec{q}|} =$$

$$= \frac{|Al + Bm + Cn|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \sqrt{l^2 + m^2 + n^2}}$$