

ПРОДОЛЖЕНИЕ ЛЕКЦИИ №3



Взаимное расположение прямых в пространстве.

- Прямые в пространстве могут **совпадать**,
- **быть параллельными, пересекаться** или
- **скрещиваться**.
- Две прямые L_1 и L_2 лежат в одной плоскости
- тогда и только тогда, когда компланарны
- векторы M_1M_2, q_1, q_2 где q_1 и q_2 -
- направляющие векторы прямых L_1 и L_2 ,
- соответственно, а M_1M_2 - вектор,
- соединяющий точку M_1 , лежащую на прямой
- L_1 , с точкой M_2 , лежащей на прямой L_2 .
-

- Следовательно, если смешанное произведение векторов M_1M_2, q_1, q_2 равно нулю, то прямые лежат в одной плоскости.
- Если прямые принадлежат одной плоскости, то они могут совпадать, пересекаться и быть параллельными.
- Пусть заданы прямые L_1 и L_2 :

$$L_1 : \frac{x - x_1}{l_1} = \frac{y - y_1}{m_1} = \frac{z - z_1}{p_1},$$

$$L_2 : \frac{x - x_2}{l_2} = \frac{y - y_2}{m_2} = \frac{z - z_2}{p_2}.$$

где $M_1(x_1, y_1, z_1) \in L_1$, $M_2(x_2, y_2, z_2) \in L_2$, а
 $\vec{q}_1(l_1, m_1, p_1)$ и $\vec{q}_2(l_2, m_2, p_2)$
– направляющие векторы прямых L_1 и L_2 ,
соответственно:

Тогда прямые L_1 и L_2 :

1) **скрещиваются**, если

$$\begin{vmatrix} l_1 & m_1 & p_1 \\ l_2 & m_2 & p_2 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \end{vmatrix} \neq 0;$$

- 2) пересекаются, если

$$\begin{vmatrix} l_1 & m_1 & p_1 \\ l_2 & m_2 & p_2 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \end{vmatrix} = 0$$

- и вектор \vec{q}_1 не коллинеарен вектору \vec{q}_2 , т. е.
- координаты этих векторов не
- пропорциональны:
- $\frac{l_1}{l_2} = \frac{m_1}{m_2}$ или $\frac{l_1}{l_2} = \frac{p_1}{p_2}$;

- 3) параллельны, если

$$\frac{l_1}{l_2} = \frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2}$$

- и точка $M_1(x_1, y_1, z_1) \notin L_2$, то есть

$$\frac{x_1 - x_2}{l_2} = \frac{y_1 - y_2}{m_2} \quad \text{ИЛИ} \quad \frac{x_1 - x_2}{l_2} \neq \frac{z_1 - z_2}{p_2};$$

- 4) совпадают, если

- $\frac{l_1}{l_2} = \frac{m_1}{m_2} = \frac{p_1}{p_2}$ и точка $M_1(x_1, y_1, z_1) \in L_2$, то

- есть

$$\frac{x_1 - x_2}{l_2} = \frac{y_1 - y_2}{m_2} = \frac{z_1 - z_2}{p_2}.$$

Угол между прямыми в пространстве

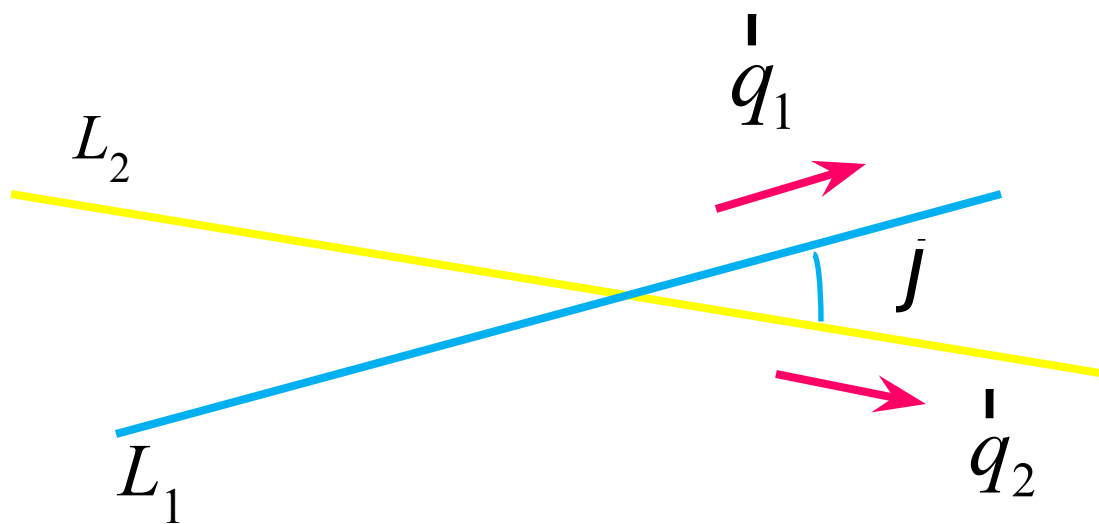
- Пусть

$$L_1 : \frac{x - x_1}{l_1} = \frac{y - y_1}{m_1} = \frac{z - z_1}{p_1},$$

$$L_2 : \frac{x - x_2}{l_2} = \frac{y - y_2}{m_2} = \frac{z - z_2}{p_2},$$

- где $\vec{q}_1(l_1, m_1, p_1)$, $\vec{q}_2(l_2, m_2, p_2)$ - направляющие векторы прямых L_1 и L_2 .

- При пересечении прямые образуют 4 угла (две пары смежных углов). Наименьший из двух смежных углов в паре является углом между прямыми.



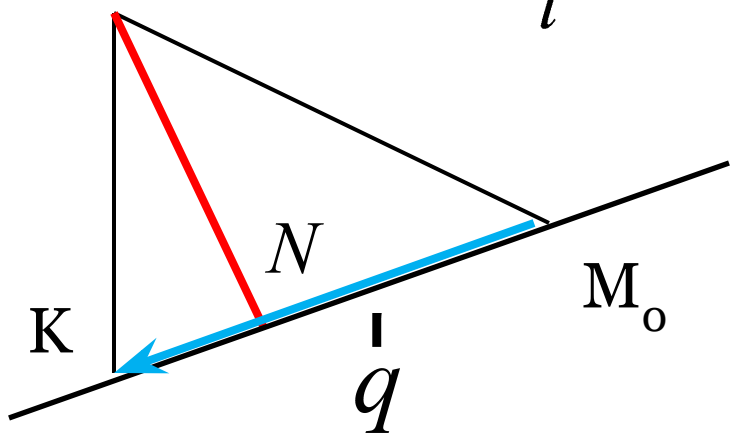
- Косинус наименьшего угла между прямыми L_1 и L_2 равен модулю косинуса угла между направляющими векторами этих прямых:

$$\begin{aligned} \cos(L_1, L_2) &= \left| \cos(q_1, q_2) \right| = \frac{|(q_1, q_2)|}{|q_1| |q_2|} = \\ &= \frac{|l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2|}{\sqrt{l_1^2 + m_1^2 + n_1^2} \sqrt{l_2^2 + m_2^2 + n_2^2}}. \end{aligned}$$

Расстояние от точки до прямой в пространстве.

- Пусть задана прямая

$$L: \frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{p},$$



- Точка $M_0(x_0, y_0, z_0) \in L$, $\vec{q}(l, m, p)$
- направляющий вектор, точка $M(x_1, y_1, z_1) \in L$.

- Приложим вектор $\vec{q}(l, m, p)$ к точке M_0 . Тогда расстояние от точки M до прямой L равно высоте треугольника MKM_0 .

$$S_{\triangle MKM_0} = \frac{1}{2} |\vec{r}_{M_0M} \times \vec{q}| = \frac{1}{2} h |\vec{q}| \quad \text{и} \quad h = \frac{|\vec{r}_{M_0M} \times \vec{q}|}{|\vec{q}|}$$

- Тогда расстояние от точки M до прямой L можно найти по формуле:

$$r(M, L) = |MN| = \frac{|\vec{r}_{M_0M} \times \vec{q}|}{|\vec{q}|}.$$

- **Замечание.**

- Расстояние между параллельными прямыми может быть найдено по этой же формуле, как расстояние от любой точки, принадлежащей одной прямой, до другой прямой.

Расстояние между скрещивающимися прямыми в пространстве.

- Пусть

$$L_1 : \frac{x - x_1}{l_1} = \frac{y - y_1}{m_1} = \frac{z - z_1}{p_1}, \quad L_2 : \frac{x - x_2}{l_2} = \frac{y - y_2}{m_2} = \frac{z - z_2}{p_2},$$

- где $M_1(x_1, y_1, z_1) \in L_1$, $M_2(x_2, y_2, z_2) \in L_2$, а

- $\vec{q}_1(l_1, m_1, p_1)$, $\vec{q}_2(l_2, m_2, p_2)$ - направляющие векторы прямых L_1 и L_2 .

- Тогда

- Тогда расстояние между скрещивающимися прямыми можно найти по формуле:

$$\rho(L_1, L_2) = \frac{\left| \left(\begin{array}{c} \overrightarrow{M_1 M_2} \quad \vec{q}_1 \quad \vec{q}_2 \\ \hline \vec{q}_1 \quad \vec{q}_2 \end{array} \right) \right|}{\left| [\vec{q}_1, \vec{q}_2] \right|},$$

- где $\left| \left(\begin{array}{c} \overrightarrow{M_1 M_2} \quad \vec{q}_1 \quad \vec{q}_2 \\ \hline \vec{q}_1 \quad \vec{q}_2 \end{array} \right) \right|$ - модуль смешанного произведения векторов, а $\left| [\vec{q}_1, \vec{q}_2] \right|$ - модуль векторного произведения.

Взаимное расположение прямой и плоскости в пространстве.

- Пусть в пространстве заданы прямая

$$L: \frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{p}$$

- и $P: Ax + By + Cz + D = 0.$

- Точка $M_0(x_0, y_0, z_0) \in L$, вектор $\vec{q}(l, m, p)$ – направляющий вектор прямой L ; вектор $\vec{n}(A, B, C)$ – нормальный вектор плоскости P .
- Прямая может пересекать плоскость, быть ей параллельной или лежать в плоскости.
- 1. Если прямая лежит в плоскости, то
- $\vec{n} \perp \vec{q}$ и точка $M(x_0, y_0, z_0) \in P$. Таким
- образом, прямая лежит в плоскости,
- если: $Al + Bm + Cp = 0$ и

$$Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0.$$

- 2. Если прямая параллельна плоскости,
- то $\vec{n} \perp \vec{q}$ и точка $M(x_0, y_0, z_0) \in P$.
- Таким образом, прямая параллельна
- плоскости, если: $Al + Bm + Cp = 0$ и

$$Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D \neq 0.$$

- 3. Прямая пересекает плоскость, если направляющий вектор прямой не перпендикулярен нормальному вектору плоскости, а значит их скалярное произведение не равно нулю: $(\vec{n}, \vec{q}) \neq 0$, т. е. $Al + Bm + Cp \neq 0$.

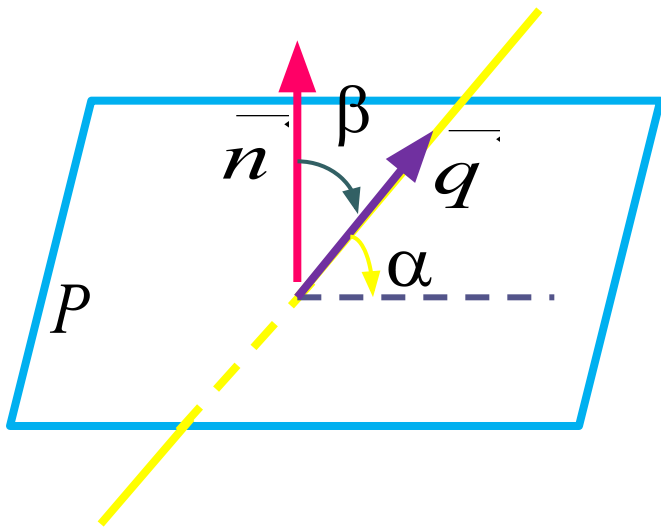
Угол между прямой и плоскостью.

- Углом между прямой и плоскостью называется угол между прямой и ее проекцией на эту плоскость.
- Рассмотрим прямую

$$L : \frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{p}$$

- и плоскость

$$Ax + By + Cz + D = 0$$



$$\cos \beta = \frac{(\vec{n}, \vec{q})}{|\vec{n}| \cdot |\vec{q}|} \Rightarrow \sin(\hat{L}, P) = \left| \cos(\vec{n}, \vec{q}) \right| = \frac{|(\vec{n}, \vec{q})|}{|\vec{n}| \cdot |\vec{q}|} =$$

$$= \frac{|Al + Bm + Cn|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \sqrt{l^2 + m^2 + n^2}}$$