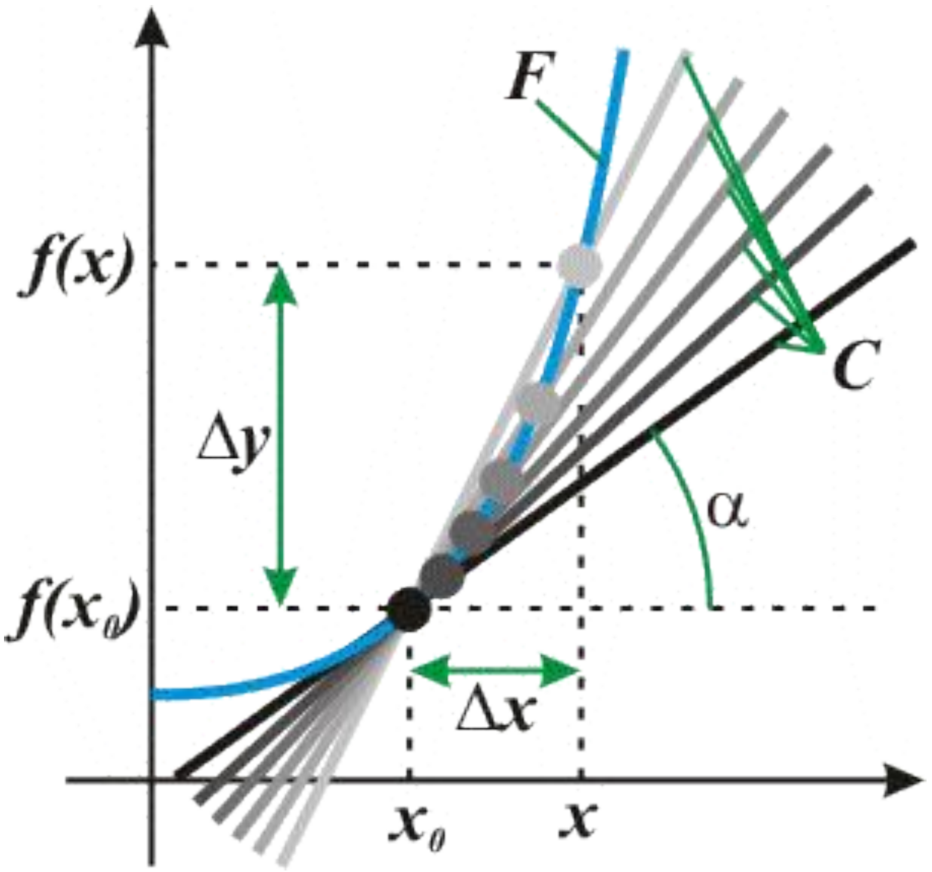
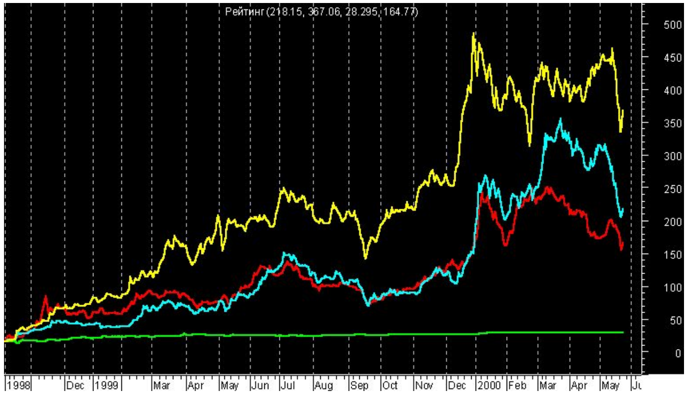
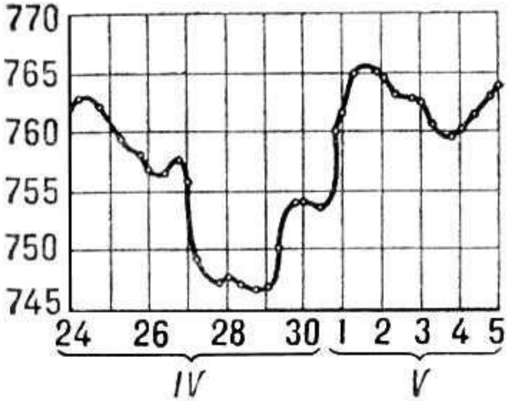
Производная функция.



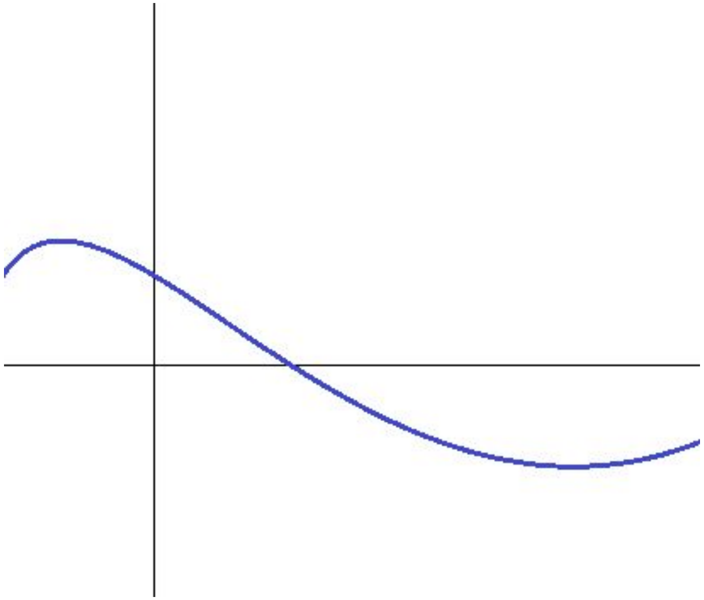
В процессе развития науки и техники появилась необходимость в функции, характеризующей скорость процесса.



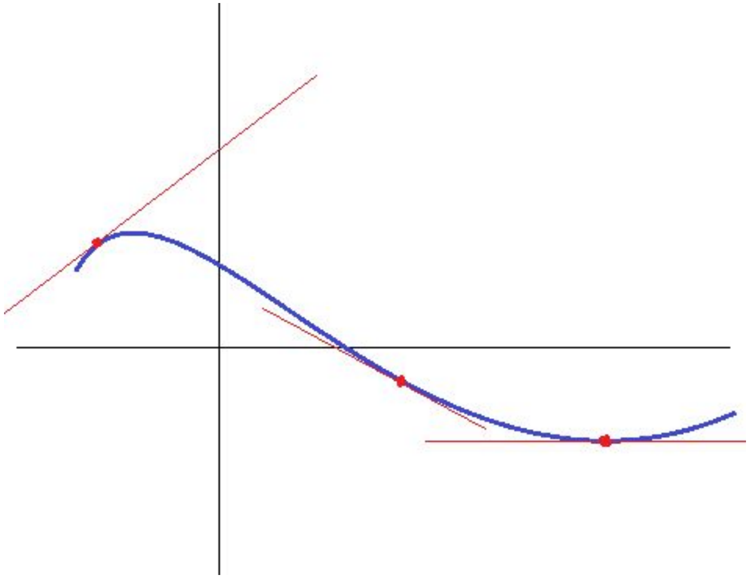


- Любой процесс характеризует некая функция.
- Для характеристики скорости процесса необходимо функции процесса сопоставить функцию, <u>отражающую количественные и качественные характеристики ее изменения.</u>
- Для этого необходимо, чтобы она отражала как скорость ее изменения, так и его характер (рост или спад)

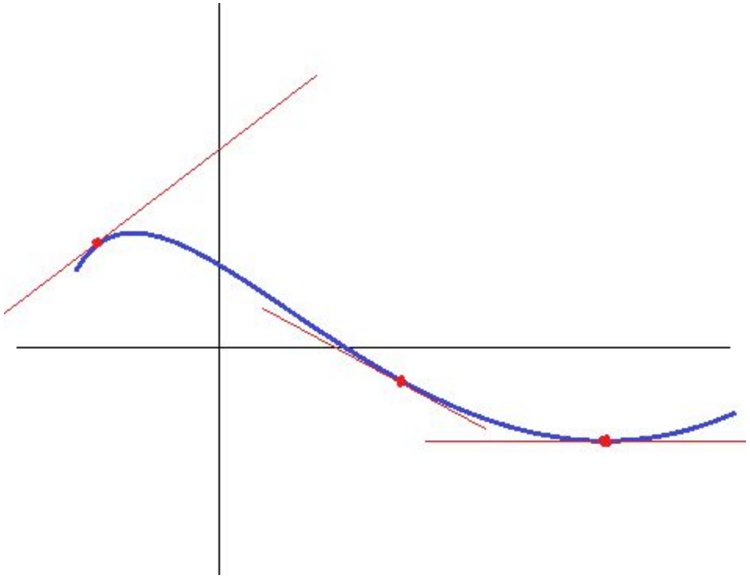
Рассмотрим непрерывную функцию $f(x)$

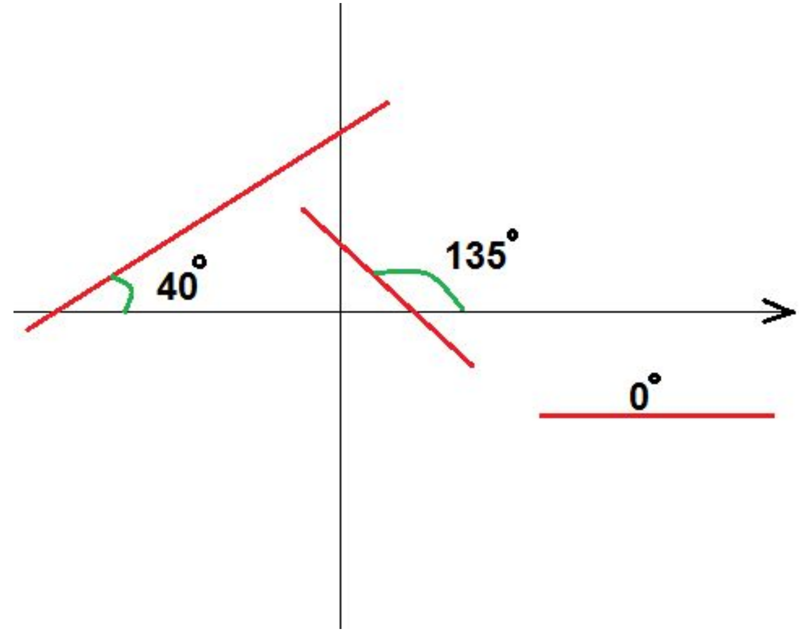


Так как функция непрерывна, в каждой ее точке можно провести касательную к ней.



Каждая касательная наклонена к оси Ох под определенным углом





Если функция возрастает – угол между осью Ох и касательной **острый.**

Если функция возрастает - угол между осью Ох и касательной **тупой.**

В точках экстремума (минимумах и максимумах) функция не возрастает и не убывает – угол между осью Ох и касательной **равен нулю.**

Для характеристики функции роста функции была выбрана **функция тангенса** **по аргументу угла наклона касательной к оси Ох.**

Функция y=tgα полностью отражает количественные и качественные характеристики изменения функции:

- *Функция возрастает -> угол острый ->* ***tgα > 0***
- *Функция убывает -> угол тупой ->* ***tgα < 0***
- *Функция ни возрастает ни убывает -> угол равен нулю ->* ***tgα = 0***

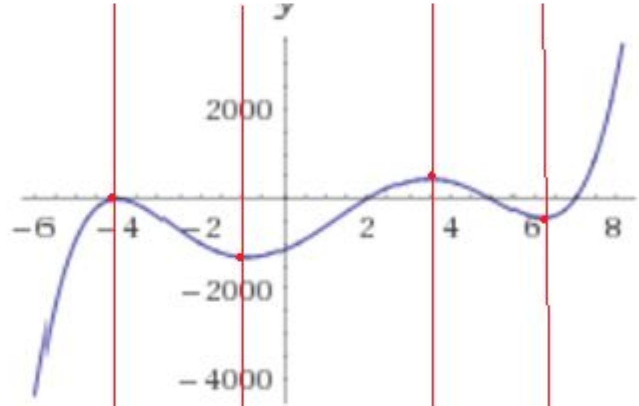
Итого: чем быстрее функция растет – тем больше тангенс по модулю. Если скорость отрицательна (спад) – тангенс также отрицателен.

Итого:

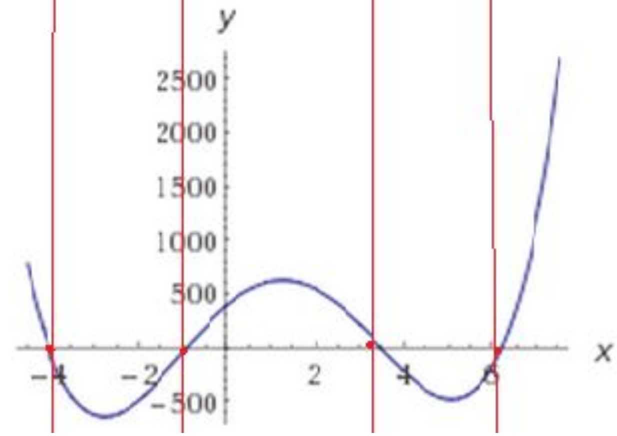
Производная функция – функция, при которой ***каждой точки*** *первообразной функции ставиться в соответствие* ***тангенс угла наклона*** *касательной к данной функции в этой точке.*

f'*: *f □ $\alpha_{\text{касательной}}$ □ **tg** α

$$f(x) = (x-3)(x-2)(x+4)^2(x-7)$$

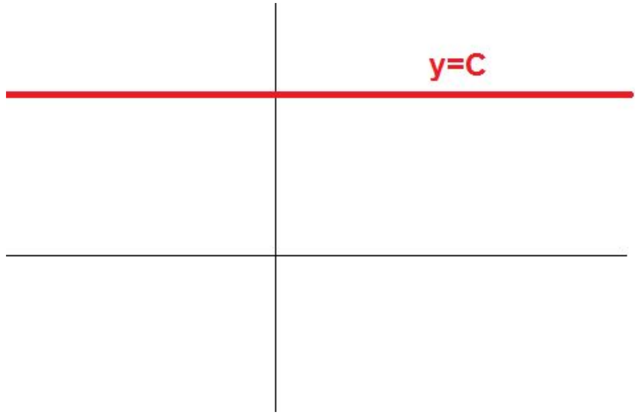


$$f'(x)$$

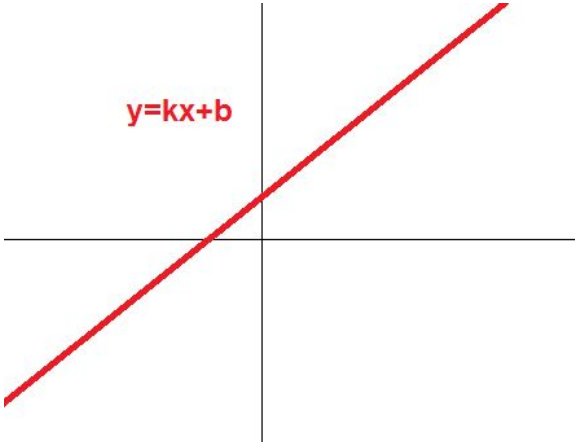


Правила вычисления производной

$$(C)' = 0$$



$$(kx + b)' = k$$



Правила вычисления производной

1. $c' = 0,\ c = \text{const}$
2. $\left(x^n\right)' = nx^{n-1}$
3. $\left(a^x\right)' = a^x \cdot \ln a$
4. $\left(e^x\right)' = e^x$
5. $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a}$
6. $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$
7. $(\sin x)' = \cos x$
8. $(\cos x)' = -\sin x$
9. $\left(\sqrt{x}\right)' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$
10. $(\text{tg}\,x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$
11. $(\text{ctg}\,x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$
12. $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
13. $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
14. $(\text{arctg}\,x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$
15. $(\text{arcctg}\,x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$
16. $(\text{sh}\,x)' = \text{ch}\,x$
17. $(\text{ch}\,x)' = \text{sh}\,x$
18. $(\text{th}\,x)' = \dfrac{1}{\text{ch}^2 x}$
19. $(\text{th}\,x)' = -\dfrac{1}{\text{sh}^2 x}$

Свойства:

$$(f(x)+g(x))' = f'(x)+g'(x)$$

$$(c\cdot f(x))' = c\cdot f'(x)$$

$$\big(f(g(x))\big)' = f'(g(x))\cdot g'(x)$$

Примеры нахождения производной функции:

$$\left(x^3-\frac{4}{x}+\sqrt{2x}\right)^I=\left(x^3\right)^I-4\left(x^{-1}\right)^I+\sqrt{2}\left(x^{\frac{1}{2}}\right)^I=$$

$$=3x^2-4(-1)x^{-2}+\sqrt{2}\cdot\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}=3x^2+\frac{4}{x^2}+\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{x}}$$

$$\left(3\cos(7x+5)\right)^l=3\cdot(-\sin(7x+5))\cdot(7x+5)^l=$$

$$=-21\sin(7x+5)$$

$$\left(\sin^2(3-4x)\right)^l=2\sin(3-4x)\cdot(3-4x)'=$$

$$=2\sin(3-4x)\cdot(-4)=-8\sin(3-4x)$$

Производная в физике

Скорость материальной точки в каждый момент времени определяется как ***производная по времени функции положения этой точки*** *(уравнения движения).*

$$v(t) = s'(t) = \frac{ds}{dt}$$

Производная в физике

Ускоре́ние — быстрота изменения скорости, то есть ***производная по времени от функции скорости*** материальной точки.

$$a(t) = v'(t) = s''(t) = \frac{d^2 s}{dt^2}$$

Второй закон Ньютона

В инерциальных системах отсчёта ***производная импульса материальной точки по времени равна действующей на неё силе.***

$$F = p'(t) = \frac{dp}{dt}$$

Мощность электрического тока в цепи:

- –
$$W(t) = A'(t) = \frac{dA}{dt}$$

Сила тока:

- –
$$I(t) = q'(t) = \frac{dq}{dt}$$

дифференциальное уравнение гармонических колебаний груза на пружине

При малых колебаниях $F_{тяжести} = F_{пружины}$

$$ma = -kx$$

$$mx'' = -kx$$

$$x'' + \frac{k}{m} x, \qquad {}_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$x'' + w_0{}^2 x = 0$$

Решением этого дифференциального уравнения является:

$$\left[\begin{array}{l} x(t) = A \cdot \sin(w_0 t + \varphi_0) \\ x(t) = A \cdot \cos(w_0 t + \varphi_0) \end{array}\right.$$

Пример из ЕГЭ

С5. В идеальном колебательном контуре, состоящем из конденсатора и катушки индуктивности, амплитуда силы тока $I_m = 50$ мА. В таблице приведены значения разности потенциалов на обкладках конденсатора, измеренные с точностью до 0,1 В в последовательные моменты времени.

t, мкс	0	1	2	3	4	5	6	7	8
U, В	0,0	2,8	4,0	2,8	0,0	−2,8	−4,0	−2,8	0,0

Найдите значение электроёмкости конденсатора.

Образец возможного решения

1. Судя по приведённым в таблице данным, в контуре наблюдаются гармонические электромагнитные колебания с периодом $T = 8$ мкс и амплитудой разности потенциалов на обкладках конденсатора $U_m = 4$ В.
2. Согласно тем же данным, разность потенциалов на обкладках конденсатора изменяется по закону $U(t) = U_m \sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right)$.
3. Поскольку заряд $q(t) = CU(t)$ на обкладках конденсатора совершает гармонические колебания, а сила тока связана с зарядом соотношением $I(t) = q'_t$, получаем $q'_t = \frac{2\pi}{T}CU_m\cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right) = I_m\cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right)$, что приводит к равенству $CU_m = \frac{T}{2\pi}I_m$.
4. Отсюда $C = \frac{TI_m}{2\pi U_m} \approx 0,016$ мкФ.

Ответ: $C \approx 0,016$ мкФ.

- Пояснения:

Взято решение $x(t) = A \cdot \sin(w_0 t + \varphi_0)$ *(а не косинус) тк при* $t = 0$ *по таблице* $U = 0$

Самостоятельно:

С5. В идеальном колебательном контуре амплитуда колебаний силы тока в катушке индуктивности $I_m = 5$ мА, а амплитуда напряжения на конденсаторе $U_m = 2{,}0$ В. В момент времени t напряжение на конденсаторе равно 1,2 В. Найдите силу тока в катушке в этот момент.

Ответ: 4 мА