

# *Производная и ее применение*

*Занятие №1*

# Определение

- ▣ Производной функции в данной точке называется предел отношения приращения функции к приращению аргумента при условии ,что приращение аргумента стремится к нулю

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

# Производные основных элементарных функций

$$(x^n)' = n x^{n-1}$$

$$(\cos x)' = -\sin x$$

$$(\sin x)' = \cos x$$

$$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$$

$$(x)' = 1$$

$$(a^x)' = a^x \ln a$$

$$(e^x)' = e^x$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}$$

$$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$$

# ПРАВИЛА ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ

$$(U + V)' = U' + V'$$

$$(UV)' = U'V + UV'$$

$$\left(\frac{U}{V}\right)' = \frac{U'V - UV'}{V^2}$$

$$(cU)' = cU', \text{ где } c - \text{const}$$

# НАЙДИТЕ ПРОИЗВОДНУЮ

1)  $f(x) = \frac{3}{4}x^4 + 2x^3 - x + 5$

*1 ответ*

2)  $f(x) = 2x^4 + 8\sqrt{x}$

*2 ответ*

3)  $f(x) = 10e^x + \ln 4x$

*3 ответ*

4)  $f(x) = \sin^2 5x$

*4 ответ*

5)  $f(x) = 2^x + 10x^3 - 12x$

$f'(x) =$

*5 ответ*

## Найти производную функции

$$1) f(x) = 3x^7 + 5x^5 - 2x^3 + 4x - 6$$

*Решение*

$$f'(x) = 3 \cdot (x^7)' + 5 \cdot (x^5)' - 2 \cdot (x^3)' + 4 \cdot (x)' - 6'$$

$$f'(x) = 3 \cdot 7x^6 + 5 \cdot 5x^4 + 2 \cdot 3x^2 + 4 \cdot 1 - 0$$

$$f'(x) = 21x^6 + 25x^4 - 6x^2 + 4$$

## Найти производную функции

$$2) f(x) = (5 \sin x - x^6)$$

*Решение*

$$\begin{aligned} f'(x) &= (5 \sin x - x^6)' = \\ &= 5(\sin x)' - (x^6)' = \\ &= 5 \cos x - 6x^5 \end{aligned}$$

## Найти производную функции

$$3) f(x) = 12x - \operatorname{tg}(x)$$

*Решение*

$$f'(x) = 12 \cdot (x') - (\operatorname{tg}(x))'$$

$$f'(x) = 12 \cdot 1 - \frac{1}{\cos^2 x} \quad f'(x) = 12 - \frac{1}{\cos^2 x}$$



# Найти производную функции

$$f(x) = x^4 \cdot \sin x$$

*Решение*

$$f'(x) = (x^4)' \cdot \sin x + x^4 \cdot (\sin x)'$$

$$f'(x) = 4x^3 \cdot \sin x + x^4 \cdot \cos x$$

# Найти производную функции

$$5) f(x) = \frac{2x}{4x + 3}$$

*Решение*

$$f'(x) = \frac{(2x)' \cdot (4x + 3) - 2x \cdot (4x + 3)'}{(4x + 3)^2}$$

$$f'(x) = \frac{2(4x + 3) - 2x \cdot 4}{(4x + 3)^2} = \frac{8x + 6 - 8x}{(4x + 3)^2} = \frac{6}{(4x + 3)^2}$$

# Производная сложной функции

$$f(g(x))' = f'(x) \cdot g'(x)$$

*Пример*

$$f(x) = (-5x + 11)^4$$

*Решение*

$$f'(x) = ((-5x + 11)^4)' \cdot (5x + 11)'$$

$$f(x)' = 4 \cdot (-5x + 11)^3 \cdot (-5) = -20 \cdot (-5x + 11)^3$$

# *Производная сложной функции*

$$f(x) = \cos 5x$$

*Решение*

$$f'(x) = (\cos 5x)' \cdot (5x)' = -\sin 5x \cdot 5$$

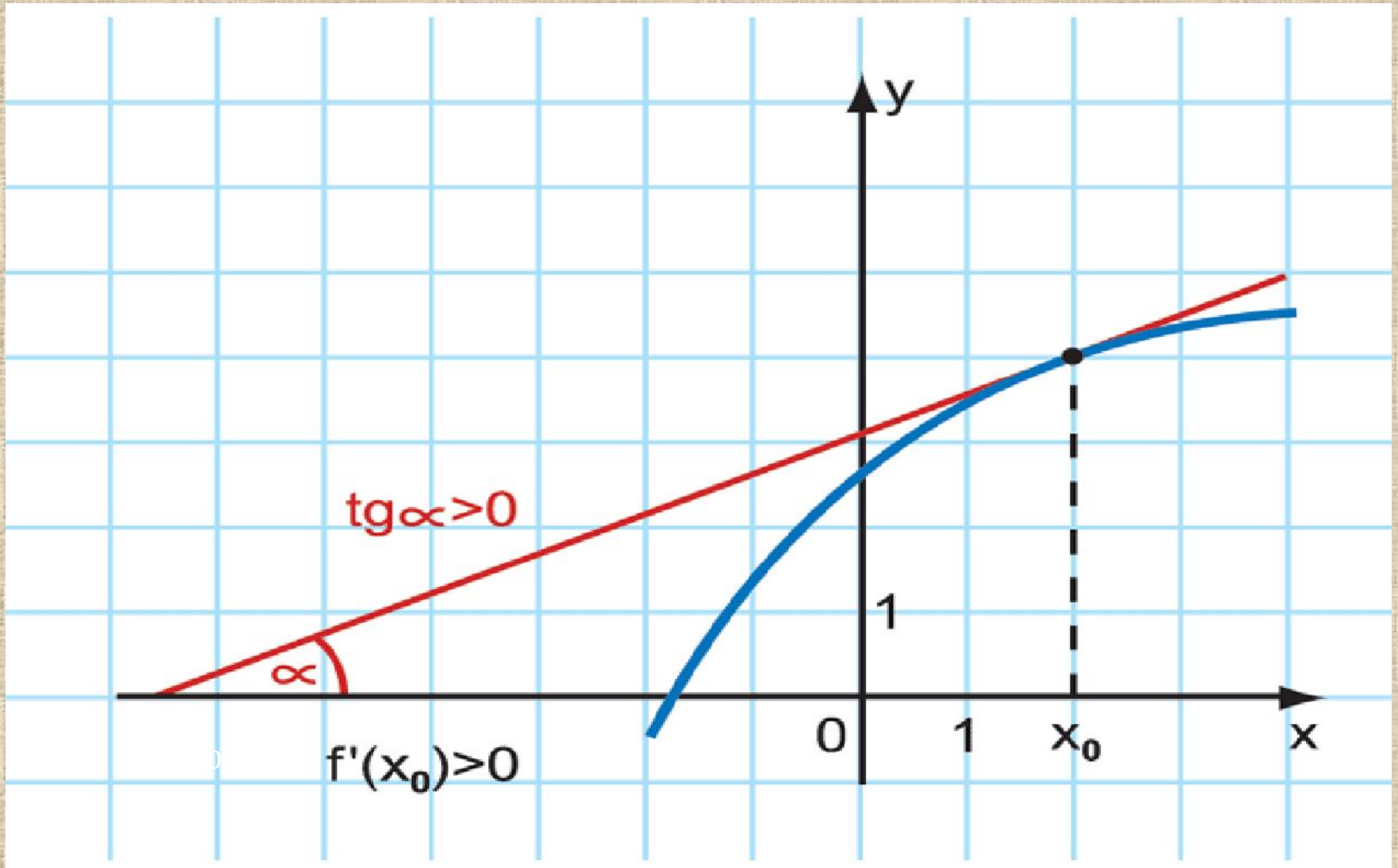
$$f'(x) = -5\sin 5x$$

# Геометрический смысл производной

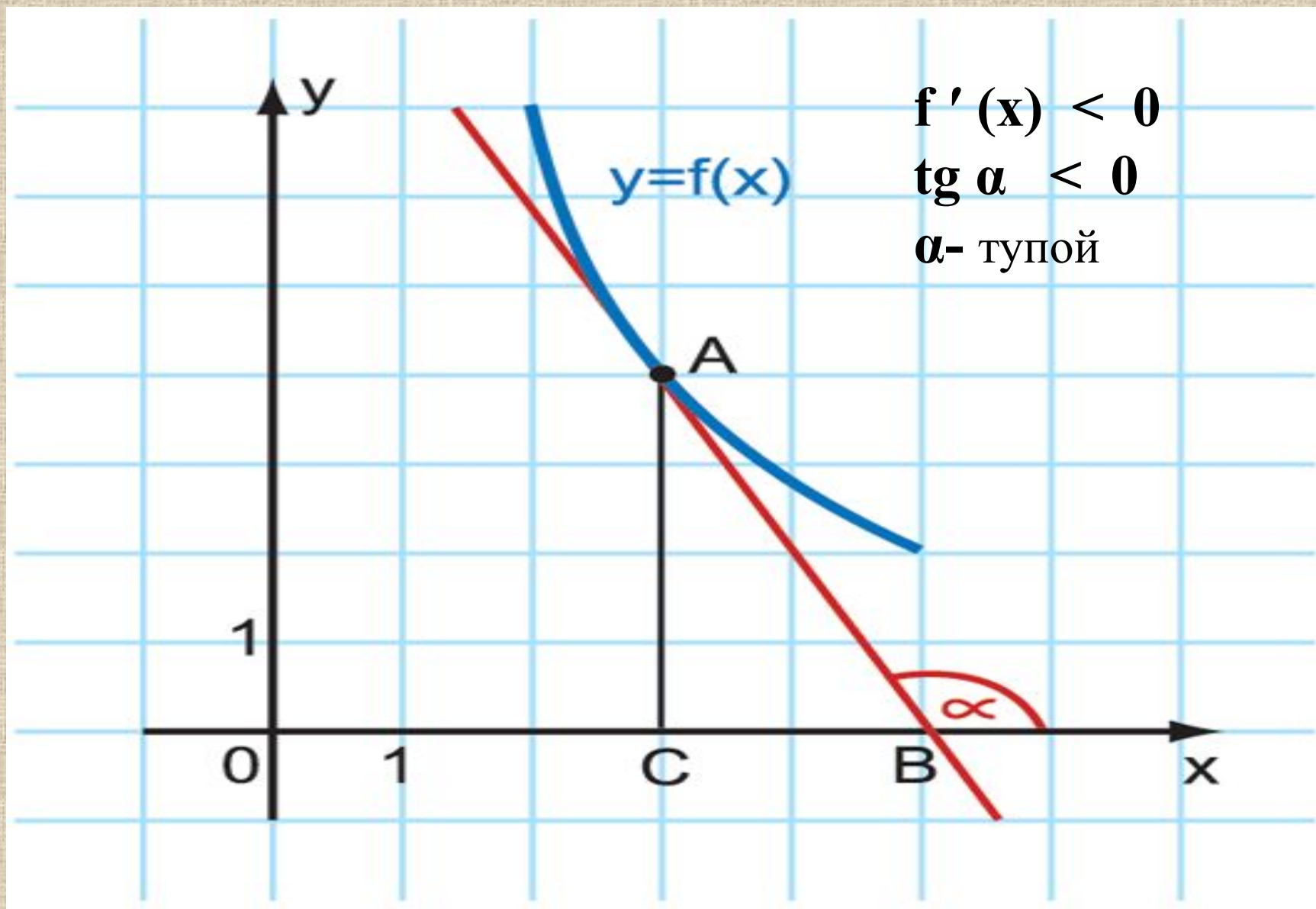
Геометрический смысл производной состоит в том, что значение производной функции  $y = f(x)$  в точке  $x$  равно угловому коэффициенту касательной к графику функции в точке с абсциссой  $x$ .

$$f'(x) = k = \operatorname{tg} \alpha$$

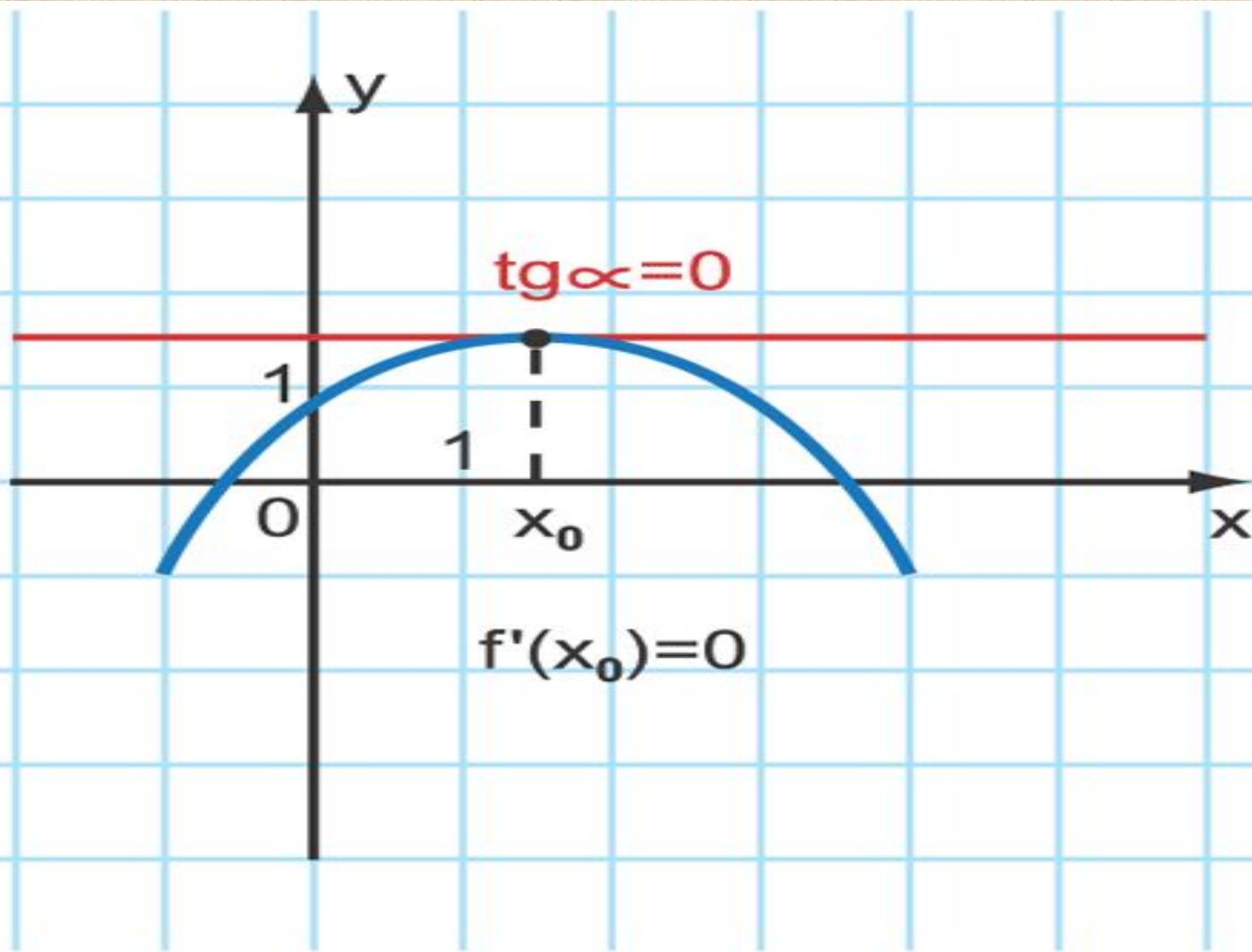
# Геометрический смысл производной



# Геометрический смысл производной

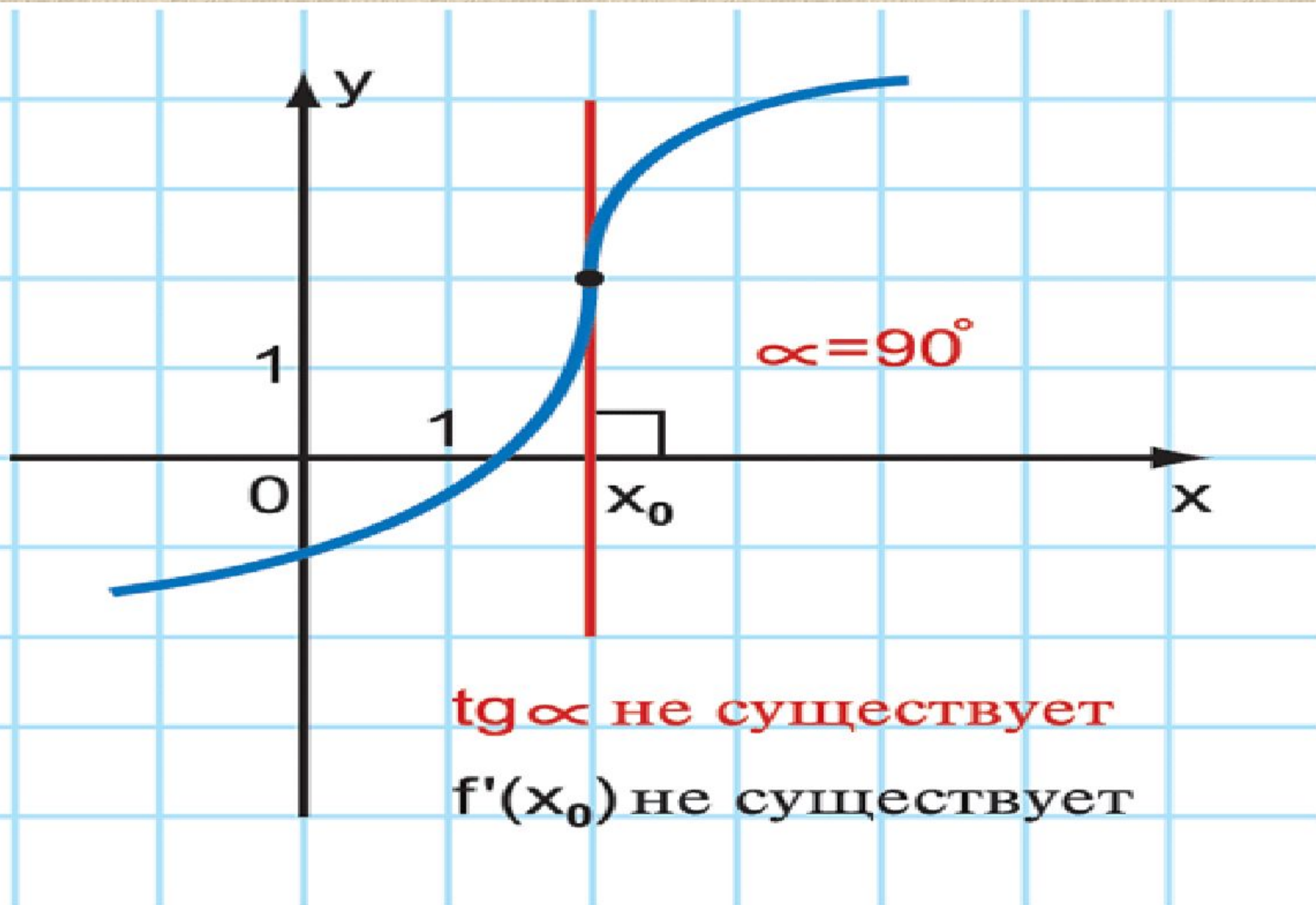


# Геометрический смысл производной

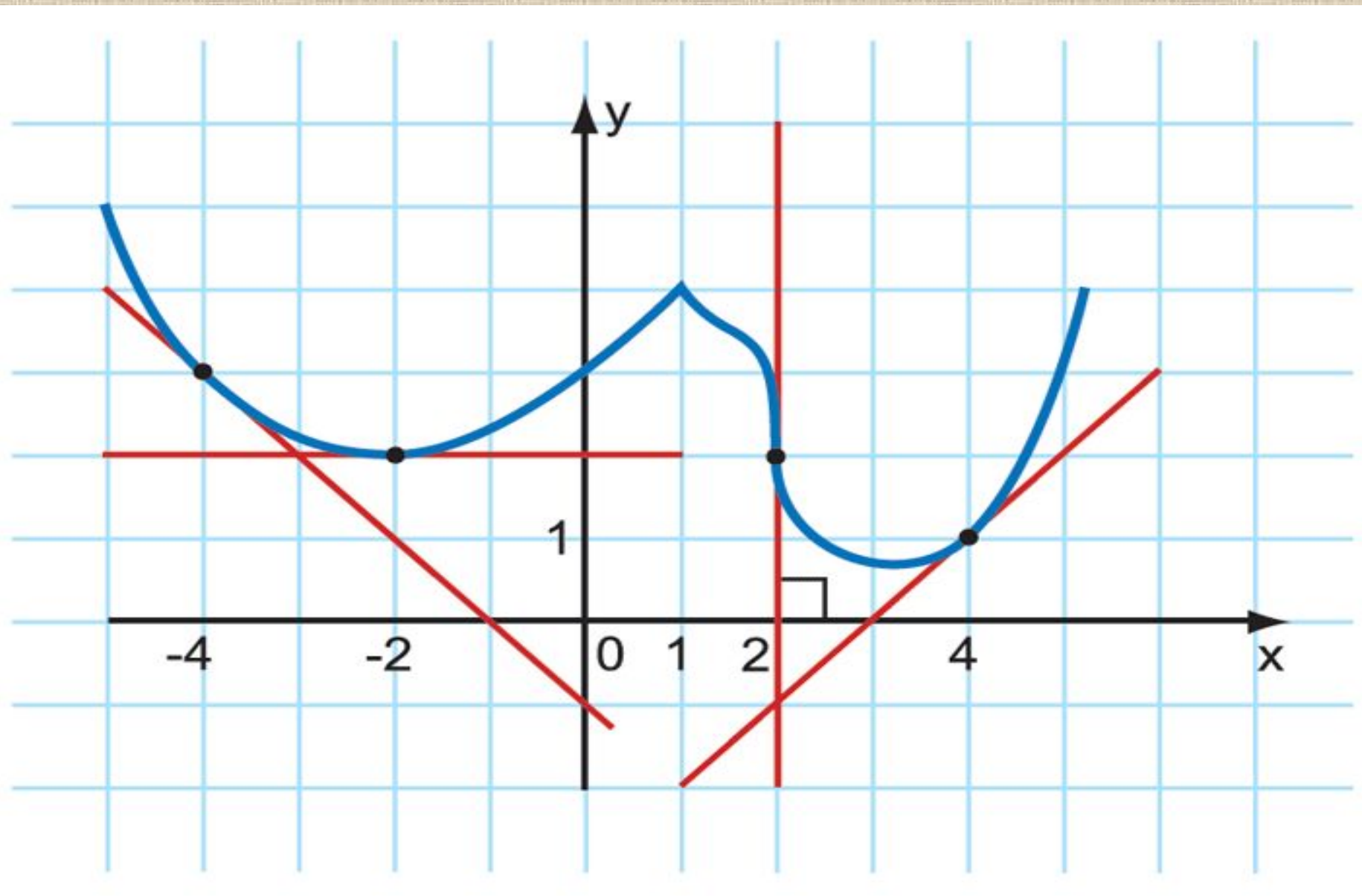




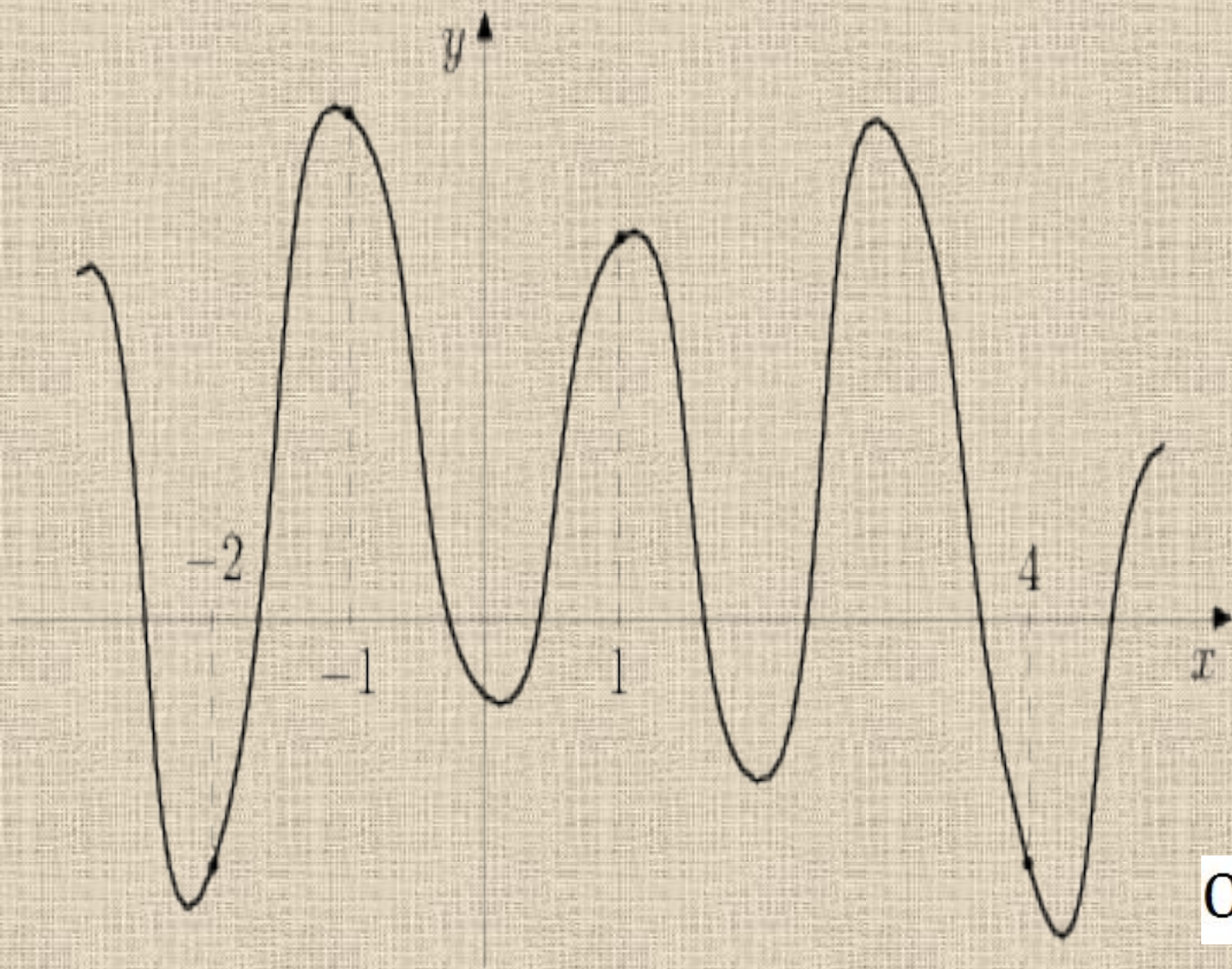
# Геометрический смысл производной



# Геометрический смысл производной



12. На рисунке изображен график функции  $y=f(x)$  и отмечены точки  $-2, -1, 1, 4$ . В какой из этих точек значение производной наименьшее? В ответе укажите эту точку.



Ответ:

**Физический  
(механический)  
смысл производной**

$$S'(t) = v(t)$$

$$v'(t) = a(t)$$

## *Пример*

Материальная точка движется по прямой так, что ее скорость в момент времени  $t$  равна

$$v(t) = t^3 - 2t.$$

Найдите ускорение точки в момент времени  $t = 3$ .

## *Решение*

$$a(t) = v'(t)$$

$$v'(t) = (t^3 - 2t)' = 3 * t^2 - 2$$

$$v'(3) = 3 * 3^2 - 2 = 25$$

*Ответ:*  $a(3) = 25$