Производственные функции

Основные свойства.

Мультипликативная производная функция Кобба-Дугласа.

Лекция 6

Определение производственной функции

- **Определение.** Производственная функция n независимых переменных – это функция, независимые переменные которой принимают значения объемов затрачиваемых или используемых ресурсов, а зависимая переменная – значения объемов выпускаемой продукции.

$$y = f(x, a) = f(x_1, \ldots, x_n, a_1, \ldots a_m)$$

x – вектор ресурсов ;

a – вектор параметров производственной функции ;

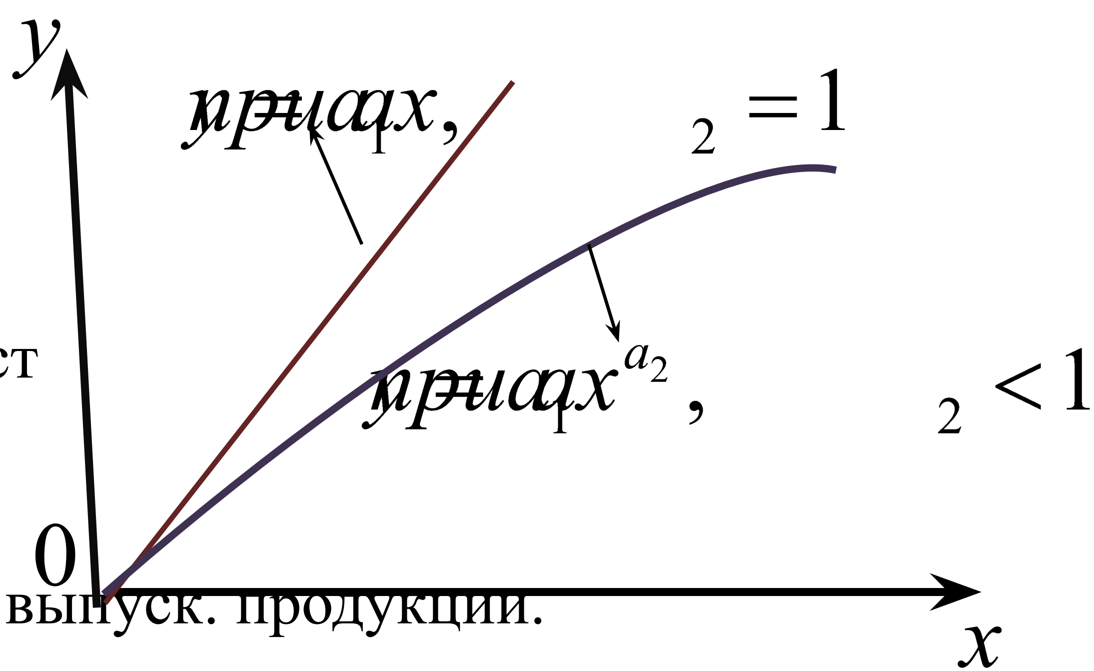
n – количество переменных, равное количеству ресурсов;

m – количество параметров производственной функции.

Производственную функцию называют многоресурсный, или многофакторный.

Пример. Рассмотрим однофакторную производную функцию

$y = a_1 x^{a_2}$, a_1, a_2 — положительные числа, $a_2 \le 1$.



Из графика этой функции следует, что с ростом величины ресурса объем выпуска растет, но прирост каждой дополнительной единицы ресурса дает меньший прирост объема выпуск. продукции.

Типы производственных функций

- **Определение 1.** Производственная функция называется *статической,* если ее переменные относятся к определенному моменту времени или природу времени, без учета временных изменений этих параметров.
- **Определение 2.** Производственная функция называется *динамической,* если ее переменные зависят от времени, а также взаимосвязаны во времени.

Основные свойства производственной функции

- При отсутствии одного из ресурсов производство невозможно: $$F(0, L) = F(K, 0) = 0.$$
- С ростом ресурсов выпуск растет: $$\frac{\partial F(K, L)}{\partial K} > 0; \frac{\partial F(K, L)}{\partial L} > 0.$$
- С ростом ресурсов скорость роста выпуска замедляется: $$\frac{\partial^2 F(K, L)}{\partial K^2} < 0; \frac{\partial^2 F(K, L)}{\partial L^2} < 0.$$

✔ При неограниченном увеличении одного из ресурсов выпуск неограниченно растет:

$$F(+\infty, L) = +\infty;\ F(K, +\infty) = +\infty.$$

Для решения и анализа задач экономики часто используют мультипликативную производственную функцию вида:

$$Y = a_0 K^{\alpha_1} L^{\alpha_2}.$$

Частным случаем мультипликативной производственной функции является функция Кобба-Дугласа, у которой

$$\alpha_1 = \alpha, \quad \alpha_2 = 1 - \alpha;\ 0 < \alpha < 1.$$

Функцию Кобба-Дугласа представляется

$$Y = a_0 K^{\alpha} L^{1-\alpha}.$$

Свойства *функции Кобба-Дугласа*

1. При $K = 0$ $L = 0$ $= 0$

$$Y(0, L) = Y(K, 0) = 0.$$

2. Первые частные производные положительные:

$$\frac{\partial Y(K, L)}{\partial K} = a_0 \alpha K^{\alpha - 1} L^{1-\alpha} = \frac{\alpha Y}{K} > 0;$$

$$\frac{\partial Y(K, L)}{\partial L} a_0 \left(1 - \alpha\right) K^{\alpha - 1} L^{-\alpha} = \frac{\left(1 - \alpha\right) Y}{L} > 0.$$

Функция Кобба - Дугласа возрастающая.

3. Вторые частные производные отрицательные:

$$\frac{\partial^2 F(K,L)}{\partial K^2} = \alpha\left(\alpha - 1\right) a_0 K^{\alpha-2} L^{1-\alpha} =$$

$$= \frac{\alpha\left(\alpha - 1\right) Y}{K^2} < 0;$$

$$\frac{\partial^2 F(K,L)}{\partial L^2} = \left(1-\alpha\right)\left(-\alpha\right) a_0 K^{\alpha} L^{-\alpha-1} =$$

$$= \frac{\alpha\left(\alpha - 1\right) Y}{L^2} < 0.$$

$$\alpha - 1 < 0, \textit{т.к.} \quad \alpha < 1.$$

С ростом ресурсов скорость роста выпуска замедляется.

4. При неограниченном увеличении одного из ресурсов выпуск неограниченно растет:

$$Y(+\infty, L) = +\infty; \; Y(K, +\infty) = +\infty.$$

5. Функция Кобба – Дугласа не имеет экстремумов.
6. Линии уровня производственной функции Кобба – Дугласа гиперболы.
7. Найдем эластичности мультипликативной производственной функции. Эластичность выпуска по основным фондам определяется формулами:

$$E_K(Y) = \frac{\partial Y(K,L)}{\partial K} \cdot \frac{K}{Y} = \alpha \cdot a \cdot K^{\alpha-1} \cdot L^{1-\alpha} \cdot \frac{K}{Y} = \alpha \cdot \frac{K}{Y} \cdot \frac{Y}{K} = \alpha \cdot$$

Вывод.

Показатель α является эластичностью выпуска по основным фондам.

Аналогично доказывается, что эластичность выпуска по труду равна $1-\alpha$.

Для мультипликативной производственной функции

$Y = a_0 K^{\alpha_1} L^{\alpha_2}$ показатель степени α_1 является эластичностью выпуска по основным фондам, а эластичность выпуска по труду равна α_2 .

При $\alpha_1 > \alpha_2$ имеет место трудосберегающий (интенсивный) рост, а при $\alpha_1 < \alpha_2$ -фондосберегающий (экстенсивный).

При $\alpha_1 + \alpha_2 > 1$ мультипликативная производственная функция описывает растующую экономику. Действительно, темп роста выпуска определяется соотношением

$$\frac{Y_{t+1}}{Y_t} = \frac{a_0 \left(K_{t+1}\right)^{\alpha_1} \left(L_{t+1}\right)^{\alpha_2}}{a_0 \left(K_t\right)^{\alpha_1} \left(L_t\right)^{\alpha_2}}.$$

Возведем обе части выражения в степень $\dfrac{1}{\alpha_1 + \alpha_2}$.

Получим

$$\left(\frac{Y_{t+1}}{Y_t}\right)^{1/\left(\alpha_1+\alpha_2\right)} = \left(\frac{K_{t+1}}{K_t}\right)^{\alpha} \cdot \left(\frac{L_{t+1}}{L_t}\right)^{1-\alpha},$$

$$\textit{где}\ \alpha = \frac{\alpha_1}{\alpha_1 + \alpha_2}, 1 - \alpha = \frac{\alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2}.$$

Производственная функция характеризуется следующими понятиями:

$$\frac{Y}{L} - \textit{производительность (эффективность) труда};$$

$$\frac{L}{Y} - \textit{трудоемкость};$$

$$\frac{Y}{K} - \textit{производительность капитала (фондов) или капиталоотдача};$$

$$\frac{K}{Y} - \textit{капиталоемкость (фондоемкость)};$$

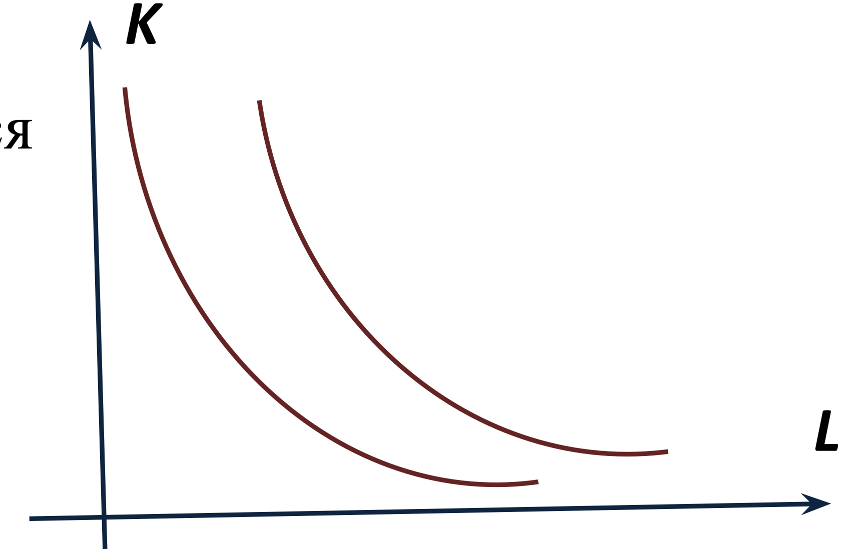
$$\frac{K}{L} - \textit{капиталовооруженность (фондовооруженность)};$$

$$\frac{\partial Y}{\partial L} - \textit{предельная производительность труда};$$

$$\frac{\partial Y}{\partial K} - \textit{предельная капиталоотдача}.$$

Изокванты. Изоклинали.

Изоквантой называется линия уровня в системе координат ***LOK.***



Функция изокванты определяется уравнением:

$$F(K, L) = Y_0 = const.$$

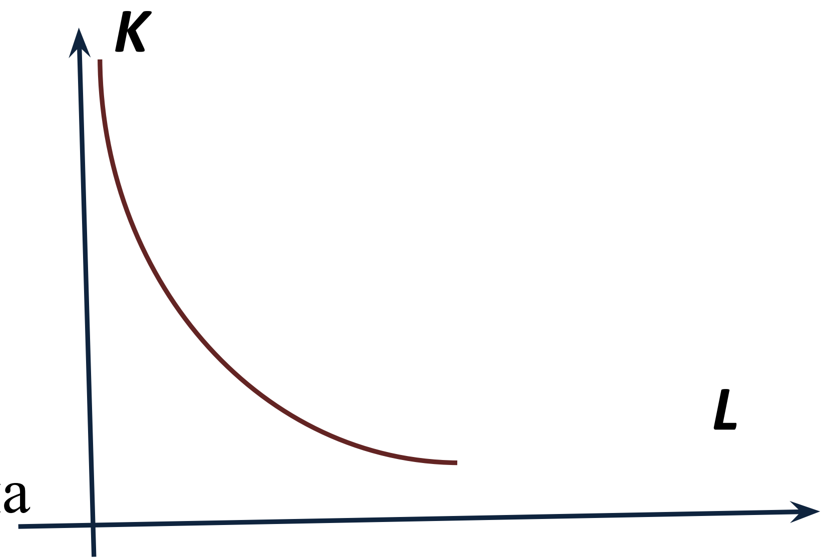
Для мультипликативной Производственной функции уравнение изокванты имеет вид:

$$Y_0 = a_0 K^{\alpha_1} L^{\alpha_2},$$

или

$$K = \left(\frac{Y_0}{a_0 L^{\alpha_2}}\right)^{\frac{1}{\alpha_1}} = \frac{Y_0^{\frac{1}{\alpha_1}}}{a_0^{\frac{1}{\alpha_1}} \, L^{\frac{\alpha_2}{\alpha_1}}}.$$

Эта степенная гипербола, асимптотами которой служат оси координат. На изокванте выпуск равен одному и тому же значению при различных значениях капитала



K и труда ***L*.** Отсюда следует возможность взаимозаменяемости ресурсов.

Так как на изокванте $F(K,L)=Y_0=const$, то дифференциал при перемещении по ней равен нулю.

$$dF(K,L)=\frac{\partial F}{\partial K}dK+\frac{\partial F}{\partial L}dL=0.$$

Так как

$$\frac{\partial F(K,L)}{\partial K} > 0; \frac{\partial F(K,L)}{\partial L} > 0, \quad mo$$

дифференциалы $dK\ dL$ имеют разные знаки.

Определение. Предельной нормой замены труда капиталом (фондами) S_K называется отношение модулей дифференциалов капитала и труда:

$$S_K = \left|\frac{dK}{dL}\right| = -\frac{dK}{dL} = \frac{\partial F / \partial L}{\partial F / \partial K}.$$

Аналогично определяется предельная норма замены капитала трудом S_L:

$$S_L = \left|\frac{dL}{dK}\right| = -\frac{dL}{dK} = \frac{\partial F / \partial K}{\partial F / \partial L}.$$

Их двух формул видно, что $S_L \cdot S_K = 1.$

Для мультипликативной производственной функции имеем

$$\frac{\partial F}{\partial K} = a_1 \frac{Y}{K}, \quad \frac{\partial F}{\partial L} = a_2 \frac{Y}{L},$$

$$S_K = \frac{\partial F}{\partial L} : \frac{\partial F}{\partial K} = \frac{a_2}{a_1} \cdot \frac{K}{L}, \quad S_L = \frac{\partial F}{\partial K} : \frac{\partial F}{\partial L} = \frac{a_1}{a_2} \cdot \frac{L}{K}.$$

Определение. Изоклиналью называется линия наибольшего роста производственной функции.

Изоклинали ортогональны изаквантам. Уравнение изоклинали имеет вид:

$$\frac{dK}{\partial F / \partial K} = \frac{dL}{\partial F / \partial L}.$$

Для мультипликативной производственной функции имеем

$$\frac{KdK}{a_1} = \frac{LdL}{a_2}.$$

Решение этого дифференциального уравнения имеет вид:

$$\frac{K^2}{a_1} = \frac{L^2}{a_2} + C.$$

C- произвольная постоянная.

При прохождении изоклинали через точку с координатами

$\left(K_0, L_0\right)$ постоянная интегрирования определяется формулой:

$$C = \frac{{K_0}^2}{a_1} - \frac{{L_0}^2}{a_2}.$$

Подставляя полученное значение в выражение $\dfrac{K^2}{a_1} = \dfrac{L^2}{a_2} + C$,

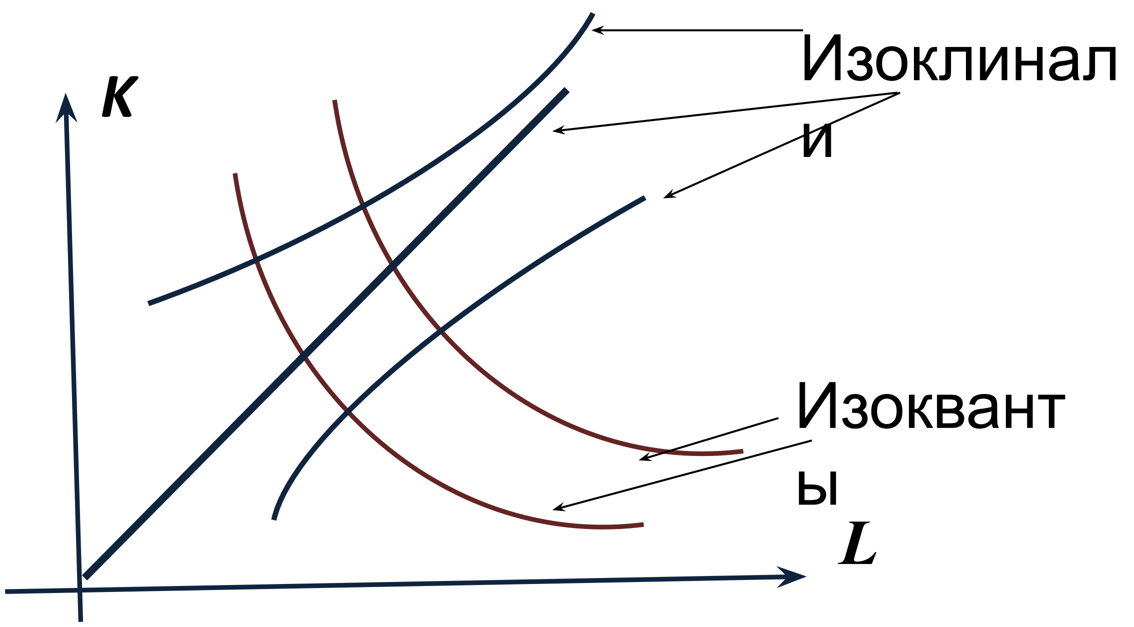
получим сл.

$$K = \sqrt{\frac{a_1}{a_2}\left(L^2 - {L_0}^2\right) + {K_0}^2}.$$

Изоклиналь, проходящая через начало координат, определяется

формулой: $K = L\sqrt{\dfrac{a_1}{a_2}},$ т.е. является прямой линией.

Пример графиков изоквант и изоклиналей .



З а д а ч а . Пусть некоторое производство можно описать с помощью функции Кобба – Дугласа. В настоящее время один работник производит в месяц продукции на 1 млн. руб. Общая численность работников 1000 человек. Основные фонды оцениваются в 10 млрд.руб. Известно, что для увеличения выпуска продукции на 3 % следует увеличить или стоимость фондов на 6 %, или численность работников на 9%.

1. Составить для данного предприятия производственную функцию, определив коэффициенты эластичности.
2. Определить среднюю и предельную производительность труда.
3. Определить среднюю и предельную фондоотдачу.
4. Найти нормы замещения ресурсов, предельные нормы замещения ресурсов.
5. Определить численность работников, если стоимость основных фондов увеличить в 100 раз, уменьшить в 100 раз.

Р е ш е н и е.

1. Производственная функция Кобба –Дугласа имеет вид:

$$y = \alpha_0 x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \quad ,$$

где x_1 - затраченный труд, x_2 - капитал. Найдем коэффициенты эластичности. По условию имеем $x_1 = 1000$ человек, $x_2 = 10^{10}$ руб.

Тогда объем продукции в стоимостном соотношении можно определить как произведение общая численность работников на производительность одного работника в месяц:

$$y = 1000 * 1000000 = 10^9 \text{ руб.}$$

Запишем функцию Кобба –Дугласа через приращения:

$$\frac{\Delta y}{y} = \alpha_1 \frac{\Delta x_1}{x_1} + \alpha_2 \frac{\Delta x_2}{x_2},$$

где $\frac{\Delta y}{y}$ - прирост объема продукции;

$\frac{\Delta x_1}{x_1}$ - прирост трудовых ресурсов;

$\frac{\Delta x_2}{x_2}$ - прирост фондов.

По условию известно, что для увеличения выпуска продукции на 3 % (т.е. $\Delta y / y = 0,03$) следует увеличить стоимость фондов на 6 % (т.е. $\Delta x_2 / x_2 = 0,06$ или численность работников увеличить на 9 % (т.е. $\Delta x_1 / x_1 = 0,09$). Имеем следующую систему:

$$\begin{cases} 0{,}03 = \alpha_1 \cdot 0 + \alpha_2 \cdot 0{,}06, \\ 0{,}03 = \alpha_1 \cdot 0{,}09 + \alpha_2 \cdot 0 \end{cases}$$

Получим коэффициенты эластичности: $\begin{cases} \alpha_1 = \dfrac{1}{3} \\ \alpha_2 = \dfrac{1}{2} \end{cases}$.

Тогда производственная функция имеет вид:

$$y = \alpha_0 x_1^{1/3} x_2^{1/2} \quad ,$$

$$\alpha_0 = \frac{y}{x_1^{1/3} x_2^{1/2}} = \frac{10^9}{\sqrt[3]{1000}\sqrt{10^{10}}} = 1000$$

Итак, производственная функция имеет вид:

$$y = 1000 x_1^{1/3} x_2^{1/2}.$$

2) Средняя производительность труда: $\frac{y}{x_1} = \frac{10^9}{10^3} = 10^6 = 1000000$

Предельная производительность труда:

$$P_{x_1} = \alpha_1 \frac{y}{x_1} = \frac{1}{3} \cdot 10^6 \approx 333333{,}3$$

3) Средняя фондоотдача: $\frac{y}{x_2} = \frac{10^9}{10^{10}} = 0{,}1$

Предельная фондоотдача:

$$P_{x_2} = \alpha_2 \frac{y}{x_2} = \frac{1}{2} \cdot 0{,}1 = 0{,}05$$

4) Норма замещения первого ресурса вторым:

$$h_1 = \frac{x_2}{x_1} = \frac{10^{10}}{10^3} = 10^7$$

Норма замещения второго ресурса первым:

$$h_2 = \frac{x_1}{x_2} = \frac{10^3}{10^{10}} = 10^{-7}$$

Предельная норма замещения второго ресурса первым:

$$R_{21} = \frac{\alpha_2 x_1}{\alpha_1 x_2} = \frac{3}{2} \cdot \frac{10^3}{10^{10}} = 0{,}00000015$$

- Если стоимость основных фондов увеличить в 100 раз, то найдем необходимую численность работников для сохранения объемов производства. Для этого из выражения производственной функции выразим переменную x_1, учитывая, что $x_{2новое} = 100x_2 = 10^{12}$, имеем

$$x_1 = \left(\frac{y}{1000x_{2новое}^{1/2}}\right)^3 = \left(\frac{10^9}{1000 \cdot (10^{12})^{1/2}}\right)^3 = 1$$ чел.

Если стоимость основных фондов уменьшить в 100 раз, то необходимая численность работников для сохранения объемов производства, учитывая, что $x_{2новое} = x_2 / 100 = 10^8$ составит:

$$x_1 = \left(\frac{y}{1000x_{2новое}^{1/2}}\right)^3 = \left(\frac{10^9}{1000 \cdot (10^8)^{1/2}}\right)^3 = 10^6 = 1000000$$

человек.

Определение эффективности и масштаба производства с помощью производственной функции