

# Производственные функции

Основные свойства.

Мультипликативная производная функция Кобба-Дугласа.

Лекция 6

# Определение производственной функции

- **Определение.** Производственная функция  $n$  независимых переменных – это функция, независимые переменные которой принимают значения объемов затрачиваемых или используемых ресурсов, а зависимая переменная – значения объемов выпускаемой продукции.

$$y = f(x, a) = f(x_1, \dots, x_n, a_1, \dots, a_m)$$

*вектор ресурсов ;*

*вектор параметров производственной функции ;*

*количество переменных равно количеству ресурсов;*

*количество параметров производственной функции.*

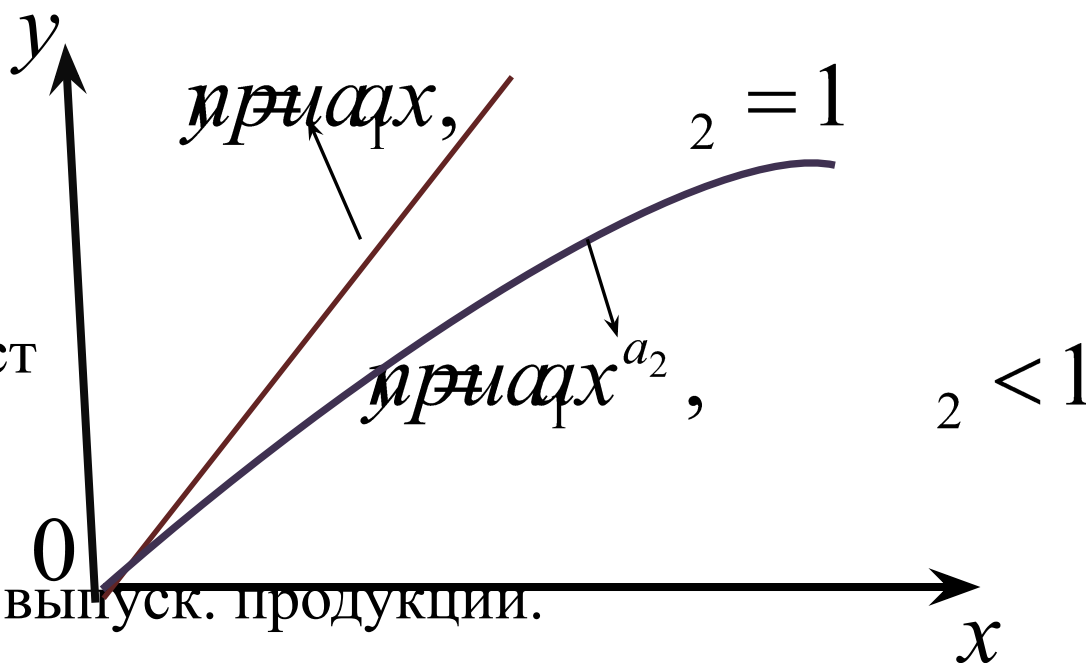
Производственную функцию называют многофакторной, или многофакторной.

Пример. Рассмотрим однофакторную производную функцию

$y = a_1 x + a_2 x^2$ , где  $a_1, a_2 > 0$ ,  $a_2 < 1$ .

$a_2 \leq 1$ .

Из графика этой функции следует, что с ростом величины ресурса объем выпуска растет, но прирост каждой дополнительной единицы ресурса дает меньший прирост объема выпуска.



# Типы производственных функций

- **Определение 1.** Производственная функция называется *статической*, если ее переменные относятся к определенному моменту времени или природе времени, без учета временных изменений этих параметров.
- **Определение 2.** Производственная функция называется *динамической*, если ее переменные зависят от времени, а также взаимосвязаны во времени.

# Основные свойства производственной функции

- ✓ При отсутствии одного из ресурсов производство невозможно:

$$F(0, L) = F(K, 0) = 0.$$

- ✓ С ростом ресурсов выпуск растет:

$$\frac{\partial F(K, L)}{\partial K} > 0; \frac{\partial F(K, L)}{\partial L} > 0.$$

- ✓ С ростом ресурсов скорость роста выпуска замедляется:

$$\frac{\partial^2 F(K, L)}{\partial K^2} < 0; \frac{\partial^2 F(K, L)}{\partial L^2} < 0.$$

- ✓ При неограниченном увеличении одного из ресурсов выпуск неограниченно растет:

$$F(+\infty, L) = +\infty; F(K, +\infty) = +\infty.$$

Для решения и анализа задач экономики часто используют мультипликативную производственную функцию вида:

$$Y = a_0 K^{\alpha_1} L^{\alpha_2}.$$

Частным случаем мультипликативной производственной функции является функция Кобба-Дугласа, у которой

$$\alpha_1 = \alpha, \quad \alpha_2 = 1 - \alpha; \quad 0 < \alpha < 1.$$

Функцию Кобба-Дугласа представляется

$$Y = a_0 K^{\alpha} L^{1-\alpha}.$$

## Свойства функции Кобба-Дугласа

1. При  $K = 0$   $L = 0$   
 $Y(0, L) = Y(K, 0) = 0.$

2. Первые частные производные положительные:

$$\frac{\partial Y(K, L)}{\partial K} = a_0 \alpha K^{\alpha-1} L^{1-\alpha} = \frac{\alpha Y}{K} > 0;$$

$$\frac{\partial Y(K, L)}{\partial L} = a_0 (1-\alpha) K^\alpha L^{-\alpha} = \frac{(1-\alpha) Y}{L} > 0.$$

Функция Кобба - Дугласа возрастающая.

3. Вторые частные производные отрицательные:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 F(K, L)}{\partial K^2} &= \alpha(\alpha - 1)a_0 K^{\alpha-2} L^{1-\alpha} = \\ &= \frac{\alpha(\alpha - 1)Y}{K^2} < 0;\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 F(K, L)}{\partial L^2} &= (1 - \alpha)(-\alpha)a_0 K^\alpha L^{-\alpha-1} = \\ &= \frac{\alpha(\alpha - 1)Y}{L^2} < 0.\end{aligned}$$

$$\alpha - 1 < 0, \text{ т.к. } \alpha < 1.$$



С ростом ресурсов скорость роста выпуска замедляется.

4. При неограниченном увеличении одного из ресурсов выпуск неограниченно растет:

$$Y(+\infty, L) = +\infty; Y(K, +\infty) = +\infty.$$

5. Функция Кобба – Дугласа не имеет экстремумов.

6. Линии уровня производственной функции Кобба – Дугласа гиперболы.

7. Найдем эластичности мультипликативной производственной функции. Эластичность выпуска по основным фондам определяется формулами:

$$E_K(Y) = \frac{\partial Y(K, L)}{\partial K} \cdot \frac{K}{Y} = \alpha \cdot a \cdot K^{\alpha-1} \cdot L^{1-\alpha} \cdot \frac{K}{Y} = \alpha \cdot \frac{K}{Y} \cdot \frac{Y}{K} = \alpha \cdot$$

Вывод.

Показатель  $\alpha$  является эластичностью выпуска по основным фондам.

Аналогично доказывается, что эластичность выпуска по труду равна  $1 - \alpha$ .

Для мультипликативной производственной функции

$Y = a_0 K^{\alpha_1} L^{\alpha_2}$  показатель степени  $\alpha_1$  является эластичностью выпуска по основным фондам, а эластичность выпуска по труду равна  $\alpha_2$ .

При  $\alpha_1 > \alpha_2$  имеет место трудосберегающий (интенсивный) рост, а при  $\alpha_1 < \alpha_2$  - фондосберегающий (экстенсивный).

При  $\alpha_1 + \alpha_2 > 1$  мультипликативная производственная функция описывает растущую экономику. Действительно, темп роста выпуска определяется соотношением

$$\frac{Y_{t+1}}{Y_t} = \frac{a_0 (K_{t+1})^{\alpha_1} (L_{t+1})^{\alpha_2}}{a_0 (K_t)^{\alpha_1} (L_t)^{\alpha_2}}.$$

Возведем обе части выражения в степень  $\frac{1}{\alpha_1 + \alpha_2}$ .

Получим

$$\left( \frac{Y_{t+1}}{Y_t} \right)^{1/(\alpha_1 + \alpha_2)} = \left( \frac{K_{t+1}}{K_t} \right)^\alpha \cdot \left( \frac{L_{t+1}}{L_t} \right)^{1-\alpha},$$

$$\text{где } \alpha = \frac{\alpha_1}{\alpha_1 + \alpha_2}, 1 - \alpha = \frac{\alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2}.$$

Производственная функция характеризуется следующими понятиями:

$\frac{Y}{L}$  – *производительность (эффективность) труда;*

$\frac{L}{Y}$  – *трудоемкость;*

$\frac{Y}{K}$  – *производительность капитала (фондов) или капиталотдача;*

$\frac{K}{Y}$  – *капиталоемкость (фондоемкость);*

$\frac{K}{L}$  – *капиталовооруженность (фондовооруженность);*

$\frac{\partial Y}{\partial L}$  – *предельная производительность труда;*

$\frac{\partial Y}{\partial K}$  – *предельная капиталотдача.*

# Изокванты. Изоклинали.

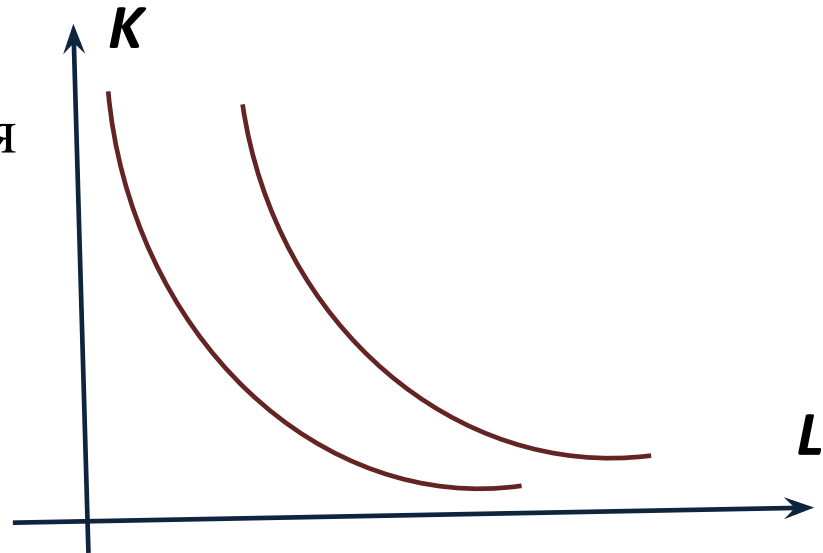
**Изоквантой** называется линия уровня в системе координат **ЛОК**.

Функция изокванты определяется уравнением:

$$F(K, L) = Y_0 = \text{const.}$$

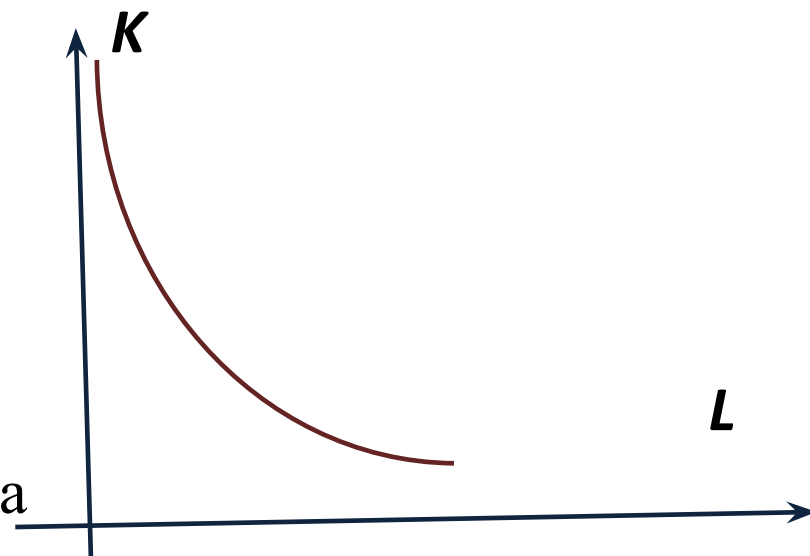
Для мультипликативной

Производственной функции уравнение изокванты имеет вид:



$$Y_0 = a_0 K^{\alpha_1} L^{\alpha_2}, \quad = \left( \frac{Y_0}{a_0 L^{\alpha_2}} \right)^{\frac{1}{\alpha_1}} = \frac{Y_0^{\frac{1}{\alpha_1}}}{a_0^{\frac{1}{\alpha_1}} L^{\frac{\alpha_2}{\alpha_1}}}.$$

Эта степенная гипербола,  
асимптотами которой служат оси  
координат. На изокванте выпуск  
равен одному и тому же значению  
при различных значениях капитала  
 $K$  и труда  $L$ . Отсюда следует



возможность взаимозаменяемости ресурсов.

Так как на изокванте  $F(K, L) = Y_0 = const$ , то  
дифференциал при перемещении по ней равен нулю.

$$dF(K, L) = \frac{\partial F}{\partial K} dK + \frac{\partial F}{\partial L} dL = 0.$$

Так как

$$\frac{\partial F(K, L)}{\partial K} > 0; \frac{\partial F(K, L)}{\partial L} > 0, \quad \text{то}$$

дифференциалы  $dK$   $dL$  имеют разные знаки.

**Определение.** Предельной нормой замены труда капиталом (фондами)  $S_K$  называется отношение модулей дифференциалов капитала и труда:

$$S_K = \left| \frac{dK}{dL} \right| = -\frac{dK}{dL} = \frac{\partial F / \partial L}{\partial F / \partial K}.$$

Аналогично определяется предельная норма замены

капитала трудом  $S_L$  :

$$S_L = \left| \frac{dL}{dK} \right| = - \frac{dL}{dK} = \frac{\partial F / \partial K}{\partial F / \partial L}.$$

Из двух формул видно, что  $S_L \cdot S_K = 1$ .

Для мультипликативной производственной функции имеем

$$\frac{\partial F}{\partial K} = a_1 \frac{Y}{K}, \quad \frac{\partial F}{\partial L} = a_2 \frac{Y}{L},$$

$$S_K = \frac{\partial F}{\partial L} \div \frac{\partial F}{\partial K} = \frac{a_2}{a_1} \cdot \frac{K}{L}, \quad S_L = \frac{\partial F}{\partial K} \div \frac{\partial F}{\partial L} = \frac{a_1}{a_2} \cdot \frac{L}{K}.$$



**Определение.** Изоклиналию называется линия наибольшего роста производственной функции.

Изоклинали ортогональны изаквантам. Уравнение изоклинали имеет вид:

$$\frac{dK}{\partial F / \partial K} = \frac{dL}{\partial F / \partial L}.$$

Для мультипликативной производственной функции имеем

$$\frac{KdK}{a_1} = \frac{LdL}{a_2}.$$

Решение этого дифференциального уравнения имеет вид:

$$\frac{K^2}{a_1} = \frac{L^2}{a_2} + C.$$

$C$ - произвольная постоянная.

При прохождении изоклинали через точку с координатами

$(K_0, L_0)$  постоянная интегрирования определяется формулой:

$$C = \frac{K_0^2}{a_1} - \frac{L_0^2}{a_2}.$$

Подставляя полученное значение в выражение  $\frac{K^2}{a_1} = \frac{L^2}{a_2} + C$ ,

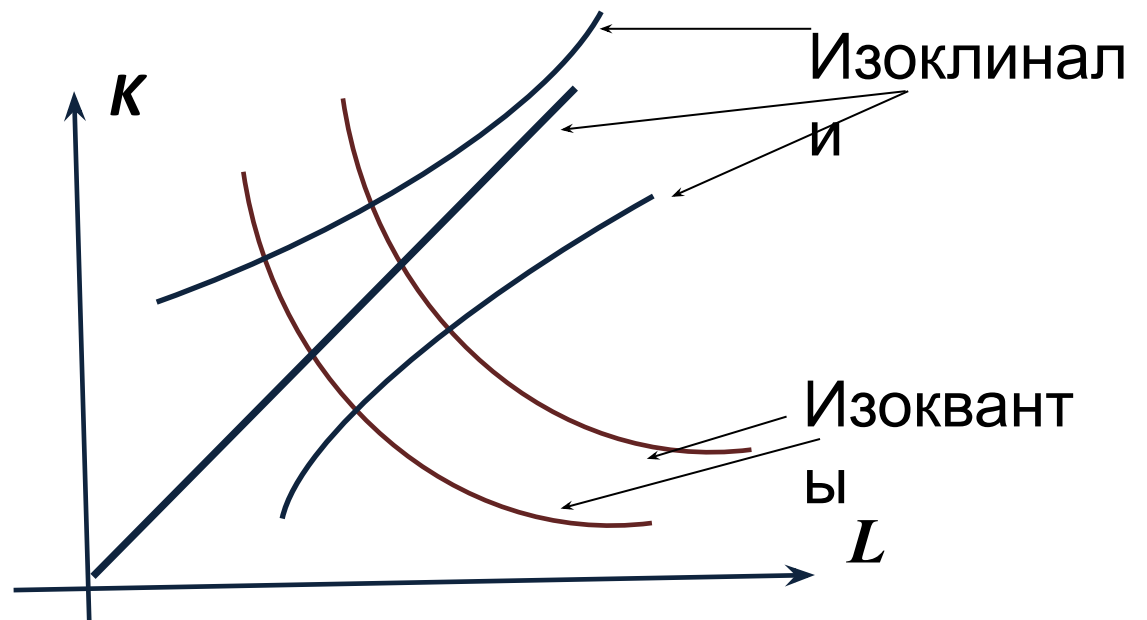
получим сл.

$$K = \sqrt{\frac{a_1}{a_2} (L^2 - L_0^2) + K_0^2}.$$

Изоклираль, проходящая через начало координат, определяется

формулой:  $K = L \sqrt{\frac{a_1}{a_2}}$ , т.е. является прямой линией.

# Пример графиков изоквант и изоклиналей .



**З а д а ч а .** Пусть некоторое производство можно описать с помощью функции Кобба – Дугласа. В настоящее время один работник производит в месяц продукции на 1 млн. руб. Общая численность работников 1000 человек. Основные фонды оцениваются в 10 млрд.руб. Известно, что для увеличения выпуска продукции на 3 % следует увеличить или стоимость фондов на 6 %, или численность работников на 9%.

1. Составить для данного предприятия производственную функцию, определив коэффициенты эластичности.
2. Определить среднюю и предельную производительность труда.
3. Определить среднюю и предельную фондоотдачу.
4. Найти нормы замещения ресурсов, предельные нормы замещения ресурсов.
5. Определить численность работников, если стоимость основных фондов увеличить в 100 раз, уменьшить в 100 раз.

## Решение.

1. Производственная функция Кобба –Дугласа имеет вид:

$$y = \alpha_0 x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} ,$$

где  $x_1$  - затраченный труд,  $x_2$  - капитал. Найдем

коэффициенты эластичности. По условию имеем  $x_1 = 1000$

человек,  $x_2 = 10^{10}$  руб.

Тогда объем продукции в стоимостном соотношении можно определить как произведение общая численность работников на производительность одного работника в месяц:

$$y = 1000 * 1000000 = 10^9 \text{ руб.}$$

Запишем функцию Кобба –Дугласа через приращения:

$$\frac{\Delta y}{y} = \alpha_1 \frac{\Delta x_1}{x_1} + \alpha_2 \frac{\Delta x_2}{x_2},$$

где  $\frac{\Delta y}{y}$  - прирост объема продукции;

$\frac{\Delta x_1}{x_1}$  - прирост трудовых ресурсов;

$\frac{\Delta x_2}{x_2}$  - прирост фондов.

По условию известно, что для увеличения выпуска продукции на 3 % (т.е.  $\Delta y / y = 0,03$ ) следует увеличить стоимость фондов на 6 % (т.е.  $\Delta x_2 / x_2 = 0,06$  или численность работников увеличить на 9 % (т.е.  $\Delta x_1 / x_1 = 0,09$ ). Имеем следующую систему:

$$\begin{cases} 0,03 = \alpha_1 \cdot 0 + \alpha_2 \cdot 0,06, \\ 0,03 = \alpha_1 \cdot 0,09 + \alpha_2 \cdot 0 \end{cases}$$

Получим коэффициенты эластичности:

Тогда производственная функция имеет

$$\begin{cases} \alpha_1 = \frac{1}{3} \\ \alpha_2 = \frac{1}{2} \end{cases} .$$

вид:

$$y = \alpha_0 x_1^{1/3} x_2^{1/2} ,$$

$$\alpha_0 = \frac{y}{x_1^{1/3} x_2^{1/2}} = \frac{10^9}{\sqrt[3]{1000} \sqrt{10^{10}}} = 1000$$

Итак, производственная функция имеет вид:

$$y = 1000 x_1^{1/3} x_2^{1/2} .$$

2) Средняя производительность труда:  $\frac{y}{x_1} = \frac{10^9}{10^3} = 10^6 = 1000000$

Предельная производительность труда:

$$P_{x_1} = \alpha_1 \frac{y}{x_1} = \frac{1}{3} \cdot 10^6 \approx 333333,3$$

3) Средняя фондоотдача:  $\frac{y}{x_2} = \frac{10^9}{10^{10}} = 0,1$

Предельная фондоотдача:

$$P_{x_2} = \alpha_2 \frac{y}{x_2} = \frac{1}{2} \cdot 0,1 = 0,05$$

4) Норма замещения первого ресурса вторым:

$$h_1 = \frac{x_2}{x_1} = \frac{10^{10}}{10^3} = 10^7$$

Норма замещения второго ресурса первым:

$$h_2 = \frac{x_1}{x_2} = \frac{10^3}{10^{10}} = 10^{-7}$$

Предельная норма замещения второго ресурса первым:

$$R_{21} = \frac{\alpha_2 x_1}{\alpha_1 x_2} = \frac{3}{2} \cdot \frac{10^3}{10^{10}} = 0,00000015$$



- Если стоимость основных фондов увеличить в 100 раз, то найдем необходимую численность работников для сохранения объемов производства. Для этого из выражения производственной функции выразим

переменную  $x_1$ , учитывая, что  $x_{2\text{новое}} = 100x_2 = 10^{12}$ ,

имеем 
$$x_1 = \left( \frac{y}{1000x_{2\text{новое}}^{1/2}} \right)^3 = \left( \frac{10^9}{1000 \cdot (10^{12})^{1/2}} \right)^3 = 1 \text{ чел.}$$

Если стоимость основных фондов уменьшить в 100 раз, то необходимая численность работников для сохранения

объемов производства, учитывая, что  $x_{2\text{новое}} = x_2 / 100 = 10^8$

составит: 
$$x_1 = \left( \frac{y}{1000x_{2\text{новое}}^{1/2}} \right)^3 = \left( \frac{10^9}{1000 \cdot (10^8)^{1/2}} \right)^3 = 10^6 = 1000000$$

человек.

# **Определение эффективности и масштаба производства с помощью производственной функции**