Проверка правильности рассуждений. Нормальные формы формул алгебры высказываний

1. *Отношение следствия.* Говорят, что из P следует Q, а если Q истинно всякий раз, когда истинно P; Q называют следствием P.

Пусть P и Q - сложные высказывания, составленные из элементарных высказываний A, B следующим образом $Q=A\to B$, $P=A\leftrightarrow B$.

Таблица 4.1

A	B	$A\to B=Q$	$A\leftrightarrow B=P$
1	1	1	1
1	0	0	0
0	1	1	0
0	0	1	1

В этом примере из Q не следует P, так как в третьей строке таблицы 4.1 Q принимает значение 1, в то время как P=0. Но из P следует Q, так как Q принимает значение 1 в первой и четвертой строках таблицы, т. е. тогда, когда истинно P.

Между отношением следствия и импликацией существует тесная связь. Но следует помнить, что это не одно и то же. Импликация - сложное высказывание, составленное из двух данных, а следствие - отношение между двумя высказываниями.

Определение 1. Элементарным произведением (или основной конъюнкцией) называется конъюнкция элементарных высказываний или их отрицаний.

Определение 2. Элементарной суммой (или основной дизъюнкцией) называется дизъюнкция элементарных высказываний или их отрицаний.

Определение 3. Формула, равносильная данной формуле алгебры высказываний и являющаяся дизъюнкцией элементарных произведений, называется дизъюнктивной нормальной формой данной формулы и обозначается ДНФ.

Пример: $ABC \vee B\overline{C} \vee \overline{A}$.

Определение 4. Формула, равносильная данной формуле алгебры высказываний и являющаяся конъюнкцией элементарных произведений, называется конъюнктивной нормальной формой данной формулы и обозначается КНФ.

Пример: $(B \vee \overline{C} \vee \overline{A})(A \vee B)B$.

Для каждой формулы алгебры высказываний можно найти множество дизъюнктивных и конъюнктивных нормальных форм. Для этого нужно:

1. Избавиться от всех логических операций, содержащихся в формуле, заменив их основными - конъюнкцией, дизъюнкцией, отрицанием. Это можно сделать, используя равносильные формулы:

$$A \to B = \overline{A} \vee B,$$

$$A \leftrightarrow B = (\overline{A} \vee B)(A \vee \overline{B}) = AB \vee \overline{A}\,\overline{B}.$$

2. Заменить знак отрицания, относящийся к выражениям типа $\overline{A \wedge B}$ или $\overline{A \vee B}$, знаками отрицания, относящимся к отдельным переменным высказываниям на основании формул:

$$\overline{A \wedge B} = \overline{A} \vee \overline{B},$$

$$\overline{A \vee B} = A \wedge B.$$

3. Избавиться от знаков двойного отрицания на основании равенства $\overline{\overline{A}} = A$.

4. Применить, если нужно, к операциям конъюнкции и дизъюнкции свойства дистрибутивности.

Определение. Формула называется ***тождественно-истинной*** (***тавтологией***), если для любых наборов переменных она принимает значение И (истина).
Определение. Формула называется ***тождественно-ложной***, если для любых наборов переменных она принимает значение Л (ложь).
Определение. Формула называется ***выполнимой***, если для некоторых наборов переменных она принимает значение И.
Проблема ***разрешимости*** для логики высказываний заключается в том, чтобы установить, является ли произвольная формула тождественно-истинной.

Теорема 1.1. Формула является тождественно-истинной тогда и только тогда, когда в ее КНФ в каждую из элементарных дизъюнкций одновременно входят какая-либо переменная и ее отрицание.
Теорема 1.2. Формула является тождественно-ложной тогда и только тогда, когда в ее ДНФ в каждую из элементарных конъюнкций одновременно входят какая-либо переменная и ее отрицание.

Формализация рассуждений. Правильные рассуждения

Рассуждение – это построение нового высказывания D на основании уже имеющихся высказываний $P_1, P_2, \ldots, P_n$. Высказывания $P_1, P_2, \ldots, P_n$ называются посылками, а высказывание D – заключением.

Определение. Рассуждение называется ***правильным***, если из конъюнкции посылок следует заключение, т. е. формула

$$P_1 \& P_2 \& \ldots \& P_n \Rightarrow D \text{ тождественно-истинна.}$$

Если все посылки истинны (т. е. их конъюнкция равна И), то истинное заключение соответствует правильному рассуждению, а ложное заключение – неправильному.

При ложности хотя бы одной из посылок независимо от истинностного значения заключения рассуждение будет правильным.

Схематически рассуждение изображается следующим образом:

$$\frac{P_1, P_2, \ldots, P_n}{D}$$

Пример.

Проверить правильность следующих рассуждений:

а) “Если книга сложная, то она неинтересная. Эта книга интересная. Значит, она несложная”.

Введем высказывания: А = “Книга сложная”; B = “Книга интересная”. Схема рассуждения имеет вид:

$$\frac{A \Rightarrow \neg B,\ B}{\neg A}$$

Докажем, что формула $((A \Rightarrow \neg B) \& B) \Rightarrow \neg A$ является тождественно-истинной. Приведем эту формулу к КНФ и воспользуемся теоремой 1.1:

$((A \Rightarrow \neg B) \& B) \Rightarrow \neg A \equiv \neg((A \Rightarrow \neg B) \& B) \vee \neg A \equiv (A \& B) \vee \neg B \vee \neg A$
$\equiv (\neg A \vee \neg B \vee A) \& (\neg A \vee \neg B \vee B) \equiv$ И.

Значит, рассуждение правильное.