

РАДИОТЕХНИЧЕСКИЕ ЦЕПИ И СИГНАЛЫ

*Преобразование сигналов
в нелинейных
радиотехнических цепях*

РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. В.И. Нефёдов «Основы радиоэлектроники и связи», 2009 г
2. С.И. Баскаков «Радиотехнические цепи и сигналы», 2003 г.
3. С.И. Баскаков «Радиотехнические цепи и сигналы.
Руководство к решению задач», 2002 г.
4. М.Т. Иванов, А.Б. Сергиенко, В.Н. Ушаков,
«Теоретические основы радиотехники», 2002 г.
5. М.П. Медиченко, В.П. Литвинов «Радиотехнические цепи и
сигналы, т.1; 2», 2011 г.

Аппроксимация характеристик нелинейных элементов

Нелинейную цепь можно определить не только по входящим в неё элементам, но и по внешним признакам, к числу которых при гармоническом входном сигнале $u_{\text{ВХ}}(t)$ относят:

- ✓ отличие от синусоидальной формы выходного сигнала $i_{\text{ВЫХ}}(t)$;*
- ✓ появление в спектре выходного колебания гармоник входного сигнала;*
- ✓ нелинейность передаточной амплитудной характеристики;*
- ✓ зависимость фазы усиленного сигнала от амплитуды.*

Аппроксимация характеристик нелинейных элементов

Известны и используют следующие методы анализа нелинейных цепей при прохождении через них детерминированных сигналов:

- линеаризация характеристик нелинейного элемента (НЭ) при фильтрации высших гармоник сигнала на выходе цепи;**
- аналитические, как правило, приближенные способы решения системы нелинейных уравнений, описывающих работу устройства;**
- спектральный, оценивающий нелинейные свойства цепи по спектру выходного сигнала;**
- численные способы решения системы нелинейных уравнений с помощью компьютера;**

Аппроксимация характеристик нелинейных элементов

Наиболее часто используют метод анализа нелинейных цепей, основанный на линеаризации характеристик НЭ при фильтрации высших гармоник сигнала на выходе цепи.

Линеаризация (от лат. *linearis* – линейный) – метод приближённого представления замкнутых нелинейных систем, при котором исследование нелинейной системы заменяют анализом линейной системы, в некотором смысле эквивалентной исходной.

Нелинейные элементы

В качестве примера нелинейных цепей, точнее элементов, можно привести полупроводниковый выпрямительный диод, оставляющий от синусоидального сигнала только однополярные (положительные или отрицательные) полусинусоиды, или трансформатор, насыщение сердечника которого магнитным полем приводит к «затуплению» вершин синусоиды (а с точки зрения частотного спектра, это сопровождается появлением гармоник основной частоты, а иногда и частот меньшей в кратное число раз основной частоты – субгармоник).

Структурная схема нелинейного устройства

Большинство нелинейных радиотехнических цепей и устройств определяется структурной схемой, представленной на рис.1.

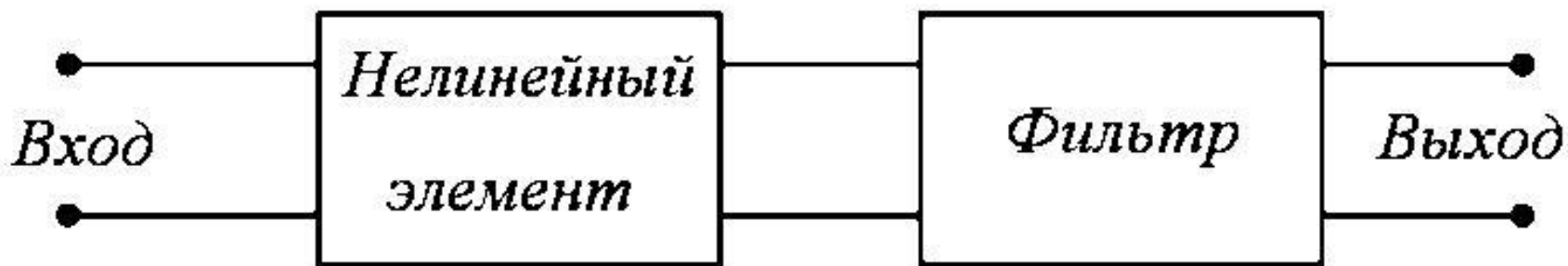


Рис.1. Структурная схема нелинейного устройства

Принцип работы нелинейного устройства

Согласно этой схеме, входной сигнал непосредственно воздействует на нелинейный элемент, к выходу которого подключён фильтр (линейная цепь). В этих случаях процесс в радиоэлектронной нелинейной цепи можно охарактеризовать двумя независимыми друг от друга операциями. В результате первой операции в безынерционном нелинейном элементе происходит такое преобразование формы входного сигнала, при котором в его спектре появляются новые гармонические составляющие.

Принцип работы нелинейного устройства

Вторую операцию осуществляет фильтр, выделяющий нужные спектральные составляющие преобразованного входного сигнала. Меняя параметры входных сигналов и используя различные нелинейные элементы и фильтры, можно осуществлять требуемую трансформацию спектра. К такой удобной теоретической модели сводятся многие схемы модуляторов, детекторов, автогенераторов, выпрямителей, умножителей, делителей и преобразователей частоты.

Вольт-амперная характеристика нелинейного устройства

Нелинейные цепи характеризуются сложной зависимостью между входным сигналом $U_{\text{ВХ}}(t)$ и выходной реакцией $U_{\text{ВЫХ}}(t)$, которую в общем виде можно записать так:

$$U_{\text{ВЫХ}}(t) = f[U_{\text{ВХ}}(t)]$$

В нелинейных цепях с безынерционными НЭ в качестве воздействия наиболее удобно рассматривать входное напряжение $U_{\text{ВХ}}(t)$, а отклика – выходной ток $i_{\text{ВЫХ}}(t)$, связь между которыми определяется нелинейной функциональной зависимостью:

$$i_{\text{ВЫХ}}(t) = f[U_{\text{ВХ}}(t)] \quad \dots\dots\dots (1)$$

Данное соотношение аналитически может представлять собой обычную вольтамперную характеристику НЭ.

Аппроксимация вольт-амперной характеристики

Задача аппроксимации – представление исходных сложных функций $f(u)$ простыми и удобными для практического использования относительно простыми функциями $i(u)$ (или их набором) таким образом, чтобы отклонение $i(u)$ от $f(u)$ в области её задания было наименьшим по определённому критерию приближения.

Функции $i(u)$ называют функциями аппроксимации.

Нахождение аналитической функции по экспериментальной вольт-амперной характеристике нелинейного элемента называют аппроксимацией.

Аппроксимация вольт-амперной характеристики

В радиотехнике и теории передачи информации используются несколько способов аппроксимации характеристик НЭ – степенная, показательная, кусочно-линейная (линейно-ломаная). Наибольшее распространение получили аппроксимация степенным полиномом и кусочно-линейная аппроксимация сложных функций.

Аппроксимация ВАХ степенным полиномом

Данный вид аппроксимации особенно эффективен при малых амплитудах входных сигналов (как правило, доли вольта) в тех случаях, когда характеристика НЭ имеет вид гладкой кривой, т. е. кривая и её производные непрерывны и не имеют скачков.

Наиболее часто при аппроксимации в качестве степенного полинома используют ряд Тейлора:

$$i(u) = a_0 + a_1(u - U_0) + a_2(u - U_0)^2 + \dots + a_n(u - U_0)^n \dots\dots (2)$$

где: $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ – постоянные коэффициенты;

U_0 – значение напряжения u , относительно которого ведётся разложение в ряд и называемое **рабочей точкой.**

Постоянные коэффициенты ряда Тейлора определяются формулой

$$a_n = \frac{1}{n!} \cdot \frac{d^n i}{du^n} \Big|_{(u = U_0)} \dots\dots\dots (3)$$

Аппроксимация ВАХ степенным полиномом

Оптимальное число членов ряда берётся в зависимости от требуемой точности аппроксимации. Чем больше выбрано членов ряда, тем точнее аппроксимация.

Аппроксимацию характеристик обычно удаётся достаточно точно осуществить полиномом не выше второй-третьей степени.

Для отыскания неизвестных коэффициентов ряда (2) необходимо задаться диапазоном U_1, U_2 нескольких возможных значений напряжения u и положением рабочей точки U_0 в этом диапазоне.

Аппроксимация ВАХ степенным полиномом

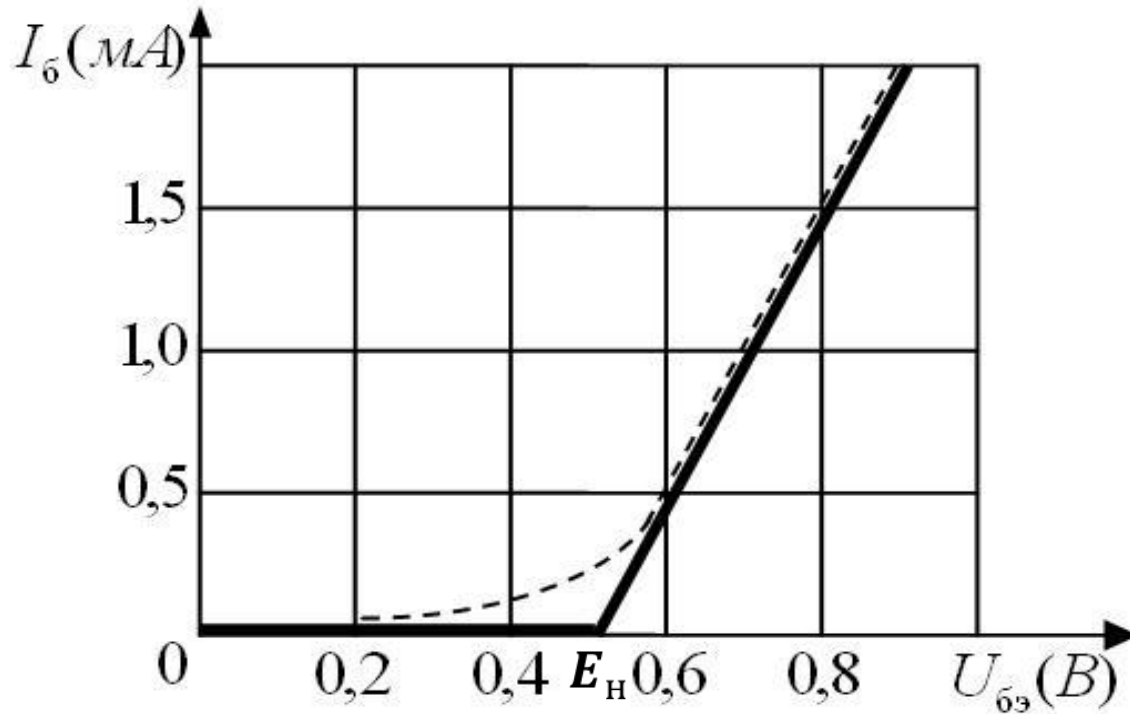
Если требуется определить n коэффициентов ряда, то на заданной характеристике выбирается $n + 1$ точек со своими координатами (i_n, u_n) . Для упрощения расчётов одну точку совмещают с рабочей точкой U_0 , имеющей координаты (U_0, I_0) ; ещё две точки выбираются на границах диапазона $u = U_1$ и $u = U_2$.

Остальные точки располагают произвольно, но с учётом важности аппроксимируемого участка ВАХ. Подставляя координаты выбранных точек в формулу (2), составляют систему из $n + 1$ уравнений, которая решается относительно известных коэффициентов a_n ряда Тейлора.

Кусочно-линейная аппроксимация ВАХ

Когда на нелинейный элемент радиоэлектронной цепи воздействует сигнал значительной амплитуды, реальную ВАХ нелинейного элемента можно аппроксимировать кусочно-линейной линией, состоящей из нескольких отрезков прямых с различными углами наклона к оси абсцисс. Данная аппроксимация связана непосредственно с двумя важными параметрами нелинейного элемента – напряжением начала характеристики E_H и её крутизной S .

Кусочно-линейная аппроксимация ВАХ



***Кусочно-линейная аппроксимация
входной
характеристики транзистора***

Кусочно-линейная аппроксимация входной ВАХ транзистора

В общем случае дифференциальная крутизна характеристики в рабочей точке определяется отношением приращения тока к приращению напряжения, и при малых (4) значениях имеем

$$\frac{\Delta i}{\Delta u} \approx \frac{di}{du}$$

Крутизна вольт-амперной характеристики S измеряется в мА/В.

Уравнение отрезка прямой при кусочно-линейной аппроксимации характеристики записывается в виде

$$i = \begin{cases} 0 & \text{при } u < E_H \\ S(u - E_H) & \text{при } u \geq E_H \end{cases} \dots\dots\dots (5)$$

где E_H – напряжение начала входной ВАХ транзистора.

Чаще всего характеристику нелинейного элемента, к которому под-водится сигнал большой амплитуды, удаётся с приемлемой точно-стью аппроксимировать всего двумя отрезками прямых линий

Расчёт кусочно-линейной аппроксимации входной ВАХ транзистора

Пример. Экспериментально снятая входная характеристика $I_{\text{б}} = f(U_{\text{бэ}})$ транзистора КТ601А представлена на слайде штриховой линией. Выполнить кусочно-линейную аппроксимацию данной характеристики в окрестности рабочей точки $U_0 = 0,6 \text{ В}$.

Решение. В соответствии с заданной ВАХ транзистора находим, что величина тока базы в рабочей точке $I_0 = 0,5 \text{ мА}$. Крутизну характеристики в рабочей точке вычислим приближённо по формуле (4). Задав линейное приращение напряжения $\Delta u_{\text{бэ}} = 0,8 - 0,6 = 0,2 \text{ В}$, находим приращение тока базы:

$$\Delta i_{\text{б}} = 1,5 - 0,5 = 1 \text{ мА}$$

Тогда крутизна ВАХ определится как

$$S = \Delta i_{\text{б}} / \Delta u_{\text{бэ}} = 1 / 0,2 = 5 \text{ мА/В}$$

Расчёт кусочно-линейной аппроксимации входной ВАХ транзистора

В результате проведенной аппроксимации характеристики ток базы транзистора в окрестности рабочей точки с координатами $U_0 = 0,6 \text{ В}$, $I_0 = 0,5 \text{ мА}$ определится как:

$$i_b = i_{b0} + S(u_{бэ} - U_0)$$

Подставив значения величин $i_{b0} = I_0 = 0,5 \text{ мА}$, $S = 5 \text{ мА/В}$ и $U_0 = 0,6 \text{ В}$, получим:

$$i_b = 0,5 + 5(u_{бэ} - 0,6) = 5(u_{бэ} - 0,5)$$

Из этой формулы следует, что при $U_{бэ} < 0,5 \text{ В}$ ток базы транзистора должен принимать отрицательные значения, что не отражается заданной характеристикой. Значит, полученная функция будет аппроксимировать заданную зависимость только при амплитуде входного напряжения $U_{бэ} \geq 0,5 \text{ В}$.

Расчёт кусочно-линейной аппроксимации входной ВАХ транзистора

Если же входное напряжение будет $U_{бэ} < 0,5 \text{ В}$, то можно принять $i_б = 0$. Таким образом, аппроксимирующая функция (сплошная линия на рис.2), отражающая характеристику транзистора, запишется в следующем виде:

$$i = \begin{cases} 0 & \text{при } u_{бэ} < 0,5 \text{ В} \\ 5(u_{бэ} - 0,5) & \text{при } u_{бэ} \geq 0,5 \text{ В} \end{cases}$$

Повышение точности аппроксимации характеристик нелинейных элементов достигается увеличением количества отрезков линий. Однако это усложняет аналитическое выражение аппроксимирующей функции.

Отклик нелинейной цепи на гармонический входной сигнал

Проанализируем физические процессы, протекающие в нелинейной цепи (рис.3), при воздействии на вход безынерционного нелинейного элемента Z гармонического сигнала $u_1(t) = U_m \cos \omega t$ и постоянного напряжения смещения U_0 .

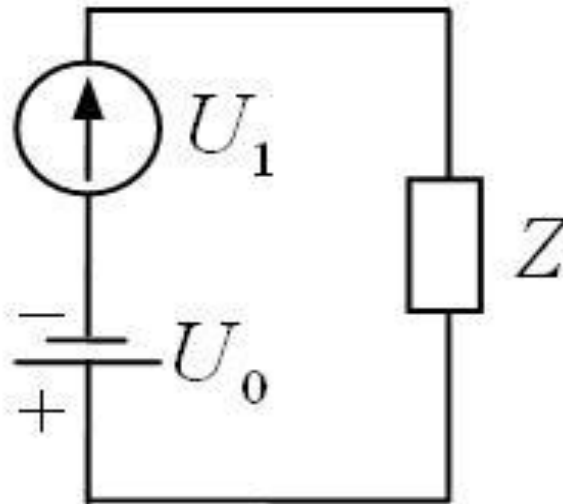


Рис.3. Схема цепи с нелинейным элементом

ВАХ нелинейного элемента

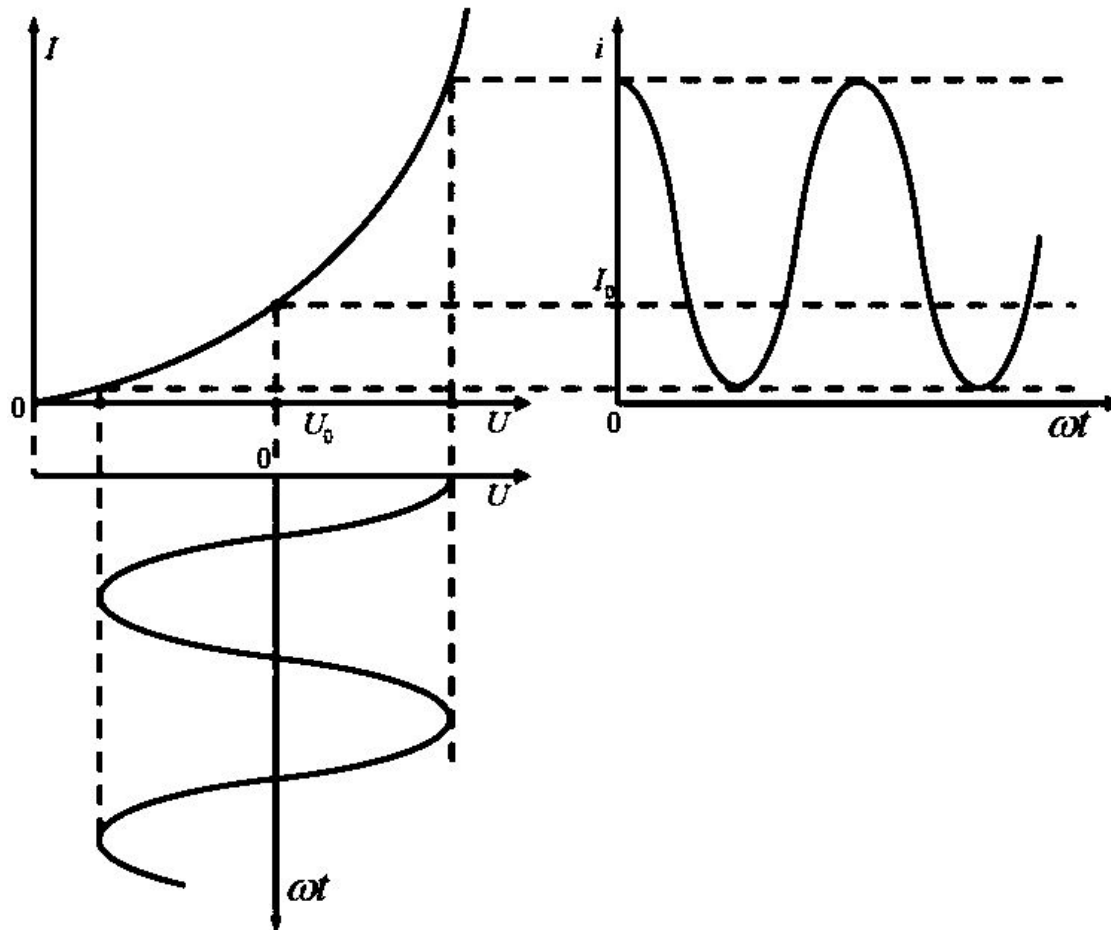


Рис.4. График процессов в нелинейном элементе

Отклик нелинейной цепи на входной гармонический сигнал

Вследствие нелинейности характеристики форма тока на выходе становится несинусоидальной. Причину этого искажения гармонического колебания можно пояснить следующим образом.

Так как ток и напряжение связаны линейной зависимостью $\Delta i = S \Delta u$, а крутизна ВАХ на разных участках неодинаковая (имеет нелинейный характер), то равным приращениям напряжения соответствуют неравные приращения тока.

Поскольку функция тока обладает периодичностью, то её можно представить тригонометрическим рядом Фурье:

$$i(t) = I_0 + \sum_{n=1}^{\infty} I_n \cos n\omega t \quad \dots\dots\dots (6)$$

Здесь I_0, I_n , – амплитуды постоянной и гармонических составляющих.

Спектр тока в цепи с НЭ при степенной аппроксимации его характеристики

Пусть суммарное напряжение источников смещения u входного гармонического сигнала

$$u(t) = U_0 + U_m \cos \omega t \quad \dots\dots\dots (7)$$

приложено к нелинейному элементу, ВАХ которого в окрестности рабочей точки аппроксимирована полиномом

Тейлора вида:

$$i(u) = a_0 + a_1(u - U_0) + a_2(u - U_0)^2 + a_3(u - U_0)^3 + \dots \quad \dots\dots (8)$$

Подставив формулу (7) в выражение (8), получим:

$$i(u) = a_0 + a_1 U_m \cos \omega t + a_2 U_m^2 \cos^2 \omega t + a_3 U_m^3 \cos^3 \omega t + \dots$$

Спектр тока в цепи с НЭ при степенной аппроксимации его характеристики

Используя известные формулы разложения степеней косинусов, получим:

$$\cos^2 x = \frac{1}{2} (1 + \cos 2x)$$

$$\cos^3 x = \frac{1}{4} (3\cos x + \cos 3x)$$

$$\cos^4 x = \frac{1}{8} (3 + 4\cos 2x + \cos 4x)$$

Выполнив подстановки и упростив выражения, запишем общее выражение для тока нелинейной цепи в компактной форме:

$$i(t) = I_0 + I_1 \cos \omega t + I_2 \cos 2\omega t + I_3 \cos 3\omega t + \dots \quad \dots (9)$$

Спектр тока в цепи с НЭ при степенной аппроксимации его характеристики

Здесь постоянная составляющая и амплитуды гармоник тока:

$$I_0 = a_0 + \frac{1}{2} a_2 U_m^2 + \frac{3}{8} a_4 U_m^4 + \dots$$

$$I_1 = a_1 U_m + \frac{3}{4} a_3 U_m^3 + \frac{5}{8} a_5 U_m^5 + \dots$$

$$I_2 = \frac{1}{2} a_2 U_m^2 + \frac{1}{8} a_4 U_m^4 + \dots$$

$$I_3 = \frac{1}{4} a_3 U_m^3 + \frac{5}{16} a_5 U_m^5 + \dots$$

..... (10)

Анализ состава формул (10) показывает, что при степенной аппроксимации характеристики гармонический состав тока в цепи с НЭ существенно зависит от степени полинома. При этом постоянная составляющая и амплитуды чётных гармоник определяются чётными, а амплитуды нечётных гармоник – нечётными коэффициентами степенного полинома.

Спектр тока в цепи с НЭ при кусочно-линейной аппроксимации его характеристики

Пусть суммарное гармоническое и постоянное напряжение вида (7) подаётся на вход электрической цепи с НЭ, характеристика которого аппроксимирована кусочно-линейной линией и описывается формулой (5). В этом случае временная диаграмма тока, протекающего через нелинейные цепи, имеет форму косинусоидальных импульсов с отсечкой их нижней части (рис.5).

Кусочно-линейная аппроксимация ВАХ

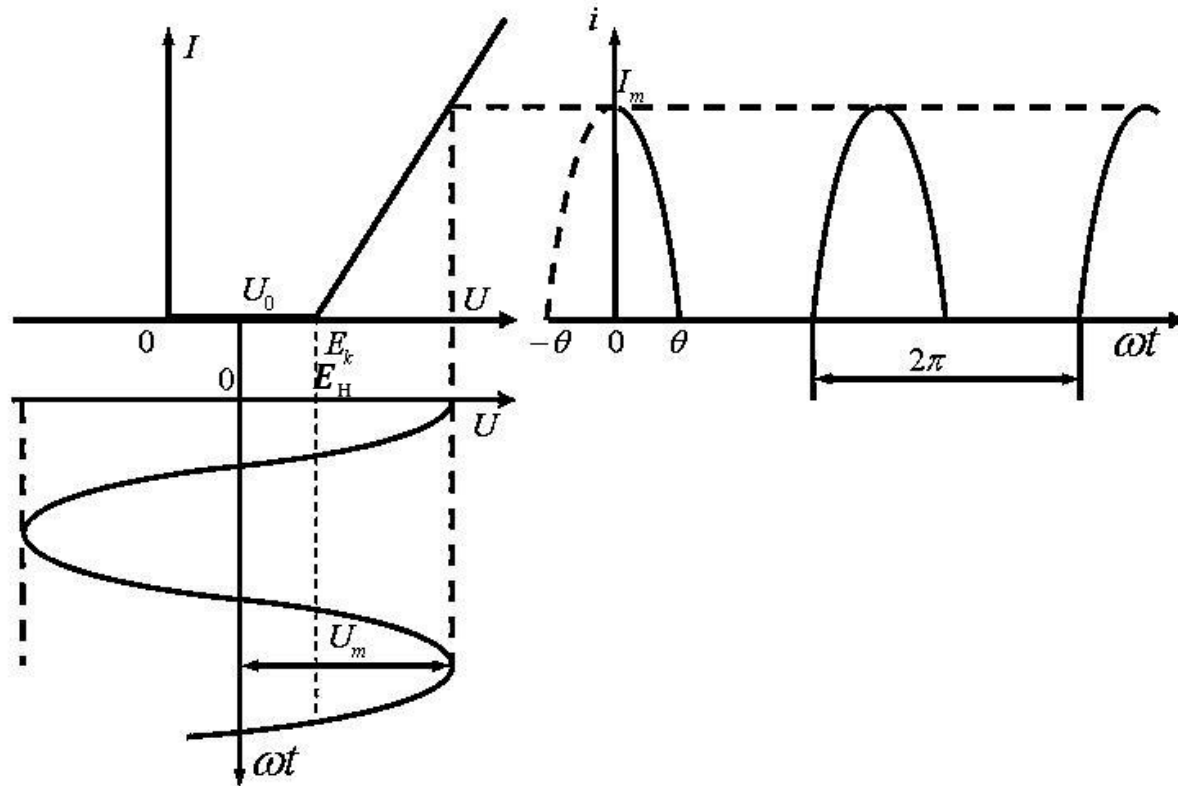


Рис.5. Форма тока при кусочно-линейной аппроксимации ВАХ НЭ

Кусочно-линейная аппроксимация ВАХ

Параметр θ (в радианах или градусах), при котором ток изменяется от максимального значения I_m до нуля, называется углом отсечки тока.

(Другое определение этого параметра: угол, соответствующий половине той части периода, в течение которой в выходной цепи нелинейного элемента протекает ток, называется углом отсечки и обозначается буквой θ).

Изменение фазы, соответствующее длительности полного импульса на выходе цепи, равно 2θ . Из графиков предыдущего слайда можно определить, что при фазовом угле $\omega t = 0$ напряжение начала характеристики $E_H = U_0 + U_m \cos\theta$, откуда

$$\cos\theta = (E_H - U_0) / U_m \quad \dots\dots\dots (11)$$

Кусочно-линейная аппроксимация ВАХ

Подставив в формулу (5) суммарное напряжение источников сигнала и смещения из выражения (7) и напряжение начала характеристики E_H получим аналитическую запись формы тока в зависимости от фазового угла:

$$**$i(\omega t) = SU_m(\text{Cos}\omega t - \text{Cos}\theta)$ при условии $-\theta \leq \omega t \leq \theta$ (12)**$$

Полученную чётную функцию $i(\omega t)$ периодической последовательности импульсов тока (12) можно разложить в тригонометрический ряд Фурье (8), в котором период повторения составляет 2π , длительность импульса - 2θ , а текущей переменной является мгновенный фазовый угол $\nu = \omega t$.

Кусочно-линейная аппроксимация ВАХ

В этих импульсах тока постоянная составляющая запишется следующим образом:

$$I_0 = \frac{SU_m}{2\pi} \int_{-\theta}^{\theta} (\cos\omega t - \cos\theta) d\omega t = \frac{SU_m}{\pi} (\sin\theta - \theta \cos\theta) \quad \dots (13)$$

Амплитуда первой гармоник:

$$I_1 = \frac{SU_m}{2\pi} \int_{-\theta}^{\theta} (\cos\omega t - \cos\theta) \cos\omega t d\omega t = \frac{SU_m}{\pi} (\theta - \sin\theta \cos\theta) \quad \dots (14)$$

Подобным же образом определяются амплитуды гармонических составляющих I_n и для $n = 2, 3, \dots$. При этом обобщённая формула для вычисления этих гармоник будет:

$$I_n = \frac{2SU_m \sin n\theta \cos\theta - n \cos n\theta \sin\theta}{\pi n(n^2 - 1)} \quad \dots (15)$$

Функции (коэффициенты) Берга

В радиотехнике полученные результаты записываются в специальной форме:

$$\begin{aligned} I_0 &= SU_m \gamma_0 \\ I_1 &= SU_m \gamma_1 \\ &\dots\dots\dots \\ I_n &= SU_m \gamma_n \end{aligned} \quad \dots\dots (16)$$

Здесь $\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_n$ – так называемые функции (коэффициенты) Берга, или коэффициенты гармоник, отражающие величины присутствующих гармоник в спектре преобразованного тока, которые аналитически записываются следующим образом:

Функции (коэффициенты) Берга

$$\gamma_0 = \frac{1}{\pi} (\sin\theta - \theta \cos\theta)$$

$$\gamma_1 = \frac{1}{\pi} (\theta - \sin\theta \cos\theta) \dots\dots\dots (17)$$

$$\gamma_n = \frac{2 \sin n\theta \cos\theta - n \cos n\theta \sin\theta}{\pi n(n^2 - 1)}$$

где $n = 2, 3, \dots$

Коэффициенты гармоник очень часто используются в инженер-ных расчётах, например, при проектировании схем нелинейных уси-лителей мощности, умножителей частоты и автогенераторов. Поэтому они приводятся в специальной литературе.

Расчёт коэффициентов Берга

Пример. Характеристика нелинейного элемента имеет кусочно-линейную аппроксимацию двумя отрезками, у которой $E_H = 0,6 \text{ В}$, $S = 0,25 \text{ мА/В}$. На элемент воздействует суммарное (постоянное и переменное) напряжение $U(t) = 0,2 + 0,8 \cos \omega t \text{ В}$. Определить постоянную составляющую и первую гармонику тока, протекающих через нелинейный элемент цепи.

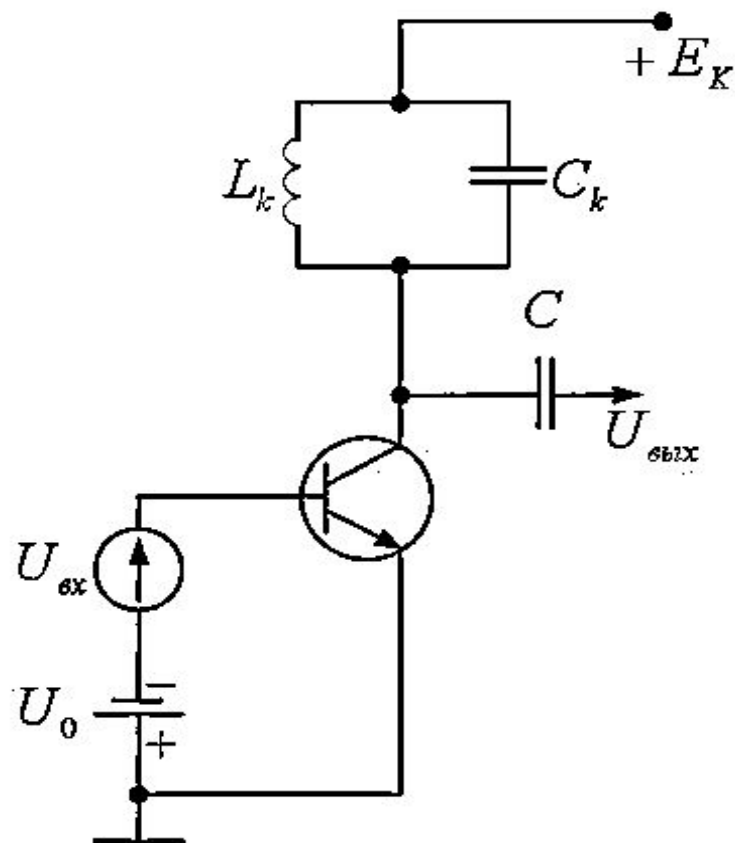
Решение. Воспользовавшись формулой (11), находим, что $\cos \theta = \frac{0,6 - 0,2}{0,8} = 0,5$. Отсюда угол отсечки тока, протекающего через нелинейный элемент, $\theta = 60^\circ$. Два первых коэффициента гармоник, соответствующих этому углу, будут: $\gamma_0 = 0,11$; $\gamma_1 = 0,2$. Подставив последовательно эти значения в соотношение (16), вычисляем соответственно амплитуды постоянной составляющей и первой гармоники: $I_0 = 2 \text{ мА}$, $I_1 = 4 \text{ мА}$.

Нелинейный резонансный усилитель мощности

В радиопередающих устройствах широкое применение находят резонансные усилители мощности и умножители частоты.

Пусть к входу нелинейного резонансного усилителя мощности на транзисторе последовательно подключены источники гармонического напряжения $U_{\text{ВХ}}(t) = U_{m \text{ ВХ}} \text{Cos} \omega_p t$ и постоянного напряжения смещения U_0 , а резонансный контур нагрузки настроен на частоту усиливаемого сигнала ω_p .

Нелинейный резонансный усилитель мощности

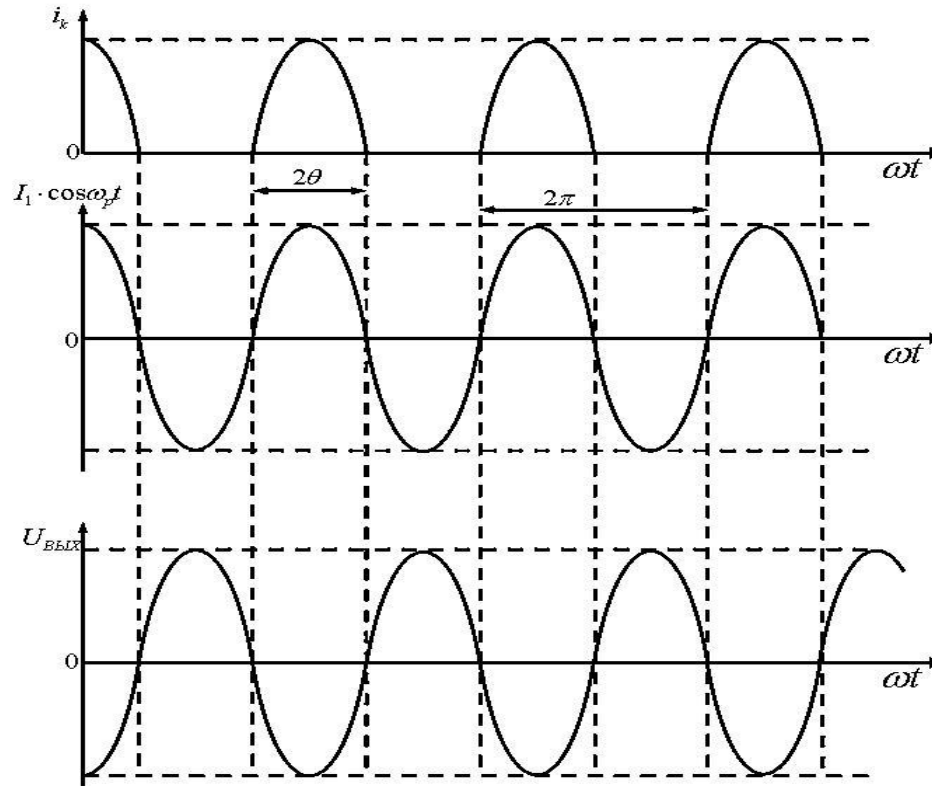


Транзисторный резонансный усилитель

Нелинейный резонансный усилитель мощности

Положим, что коллекторный ток транзистора имеет форму косинусоидальных импульсов с отсечкой. Временные диаграммы импульсов коллекторного тока $i_K(\omega t) = i_K(t)$, тока первой гармоники $i_1(t) = i_1(\omega t) = I_1 \cos \omega_p t$ и выходного напряжения $u_{\text{ВЫХ}}(\omega t) = u_{\text{ВЫХ}}(t)$ показаны на следующем слайде.

Нелинейный резонансный усилитель мощности



Временные диаграммы импульсов коллекторного тока $i_k(\omega t) = i_k(t)$, тока первой гармоники $i_1(t) = i_1(\omega t) = I_1 \cos \omega_p t$ и выходного напряжения $u_{\text{ВЫХ}}(\omega t) = u_{\text{ВЫХ}}(t)$

Нелинейный резонансный усилитель мощности

Спектральный состав косинусоидальных импульсов коллекторного тока содержит множество составляющих кратных частот, однако наибольшую амплитуду имеет первая гармоника. Это объясняется тем, что на резонансной частоте активное сопротивление параллельного контура максимально и поэтому на нём выделяется усиливаемое напряжение с частотой входного сигнала ω_p . Сопротивление же параллельного контура на частотах $2\omega_p, 3\omega_p, \dots$ столь мало, что высшие гармонические составляющие практически не дают вклада в формирование выходного сигнала $u_{\text{ВЫХ}}(t)$.

Используя формулу (16) для коэффициентов Берга, запишем выражение для амплитуды выходного напряжения

$$U_{m \text{ Вых}} = I_1 R_0 = S U_{m \text{ Вх}} \gamma_1 R_0, \dots\dots\dots (18)$$

***где R_0 – резонансное сопротивление параллельного контура;
 γ_1 – коэффициент Берга для первой гармоники.***

Умножитель частоты

Умножитель частоты – это устройство, повышающее частоту входного сигнала в n раз, где n – целое число – коэффициент умножения.

Необходимость в умножителях частоты возникает при разработке высокостабильных источников гармонических колебаний повышенной частоты, когда непосредственное генерирование сигналов такого диапазона затруднительно.

Наличие в спектре коллекторного тока гармонических составляющих с частотами, кратными входной частоте, позволяют использовать нелинейный резонансный усилитель в качестве умножителя частоты.

Умножитель частоты

Для этого достаточно в схеме резонансного усилителя настроить колебательный контур на требуемую частоту. Известно, что при больших значениях n коэффициенты гармоник γ_n довольно малы, поэтому важно выбрать такой угол отсечки коллекторного тока θ , при котором соответствующие коэффициенты гармоник максимальны.

Практически доказано, что оптимальный угол отсечки, дающий наибольшую амплитуду выходного напряжения в умножителях частоты, примерно равен $180^\circ/n$.

Умножитель частоты

Принципы действия умножителя частоты и нелинейного резонансного усилителя мощности в основном одинаковы и различия заключаются лишь в выборе угла отсечки тока. По аналогии с выражением (18) определим амплитуду выходного напряжения умножителя частоты при кусочно-линейной аппроксимации характеристики транзистора

$$U_{mn} = I_n R_{0n} = S U_{m \text{ ВХ}} \gamma_n R_{0n}, \dots\dots\dots (19)$$

**где R_{0n} – резонансное сопротивление контура на n - й гармонике;
 γ_n – коэффициент Берга для n - й гармоника.**