

**РАСПРЕДЕЛИТЕЛЬНЫЙ
МЕТОД РЕШЕНИЯ
ТРАНСПОРТНОЙ ЗАДАЧИ**

Мы научились находить первоначальный план поставок. Теперь надо выяснить является ли найденный план оптимальным и, если нет то как его оптимизировать.

Для этого надо составить *матрицу оценок*.

*Оценка клетки (J, j) вычисляется по следующему правилу:
оценка i -й строки + оценка j -го столбца + число в левом
верхнем углу клетки (i, j)*

Оценки строки и столбца выбираются таким образом, чтобы оценки всех отмеченных клеток были равны нулю. После этого оценки всех клеток записываются в виде матрицы — матрицы оценок. Если матрица оценок не содержит отрицательных чисел, то получен оптимальный план поставок. Иначе проводится оптимизация плана поставок.

Двигаясь из клетки с отрицательной оценкой по отмеченным клеткам (причем запрещается делать два последовательных шага в одной строке или в одном столбце), строят так называемый цикл пересчета. Внутри этого цикла *перераспределяют поставки*. Для полученной таблицы находят матрицу оценок и т. д.

Рассмотрим подробнее эту схему на конкретном примере.

Допустим, был получен следующий план поставок:

	70	120	150	130
30	4 30	7	2	3
190	3 40	1 120	2 30	4
250	5	6	3 120	7 130

По данному плану суммарные затраты на доставку равны 1690.

Начинать можно с любой строки или любого столбца. Начнем с 1-го столбца, приписав ему ноль (впрочем, на 1-м шаге можно приписать столбцу любую оценку).

	70	120	150	130	
30	4 30	7	2	3	-4
190	3 40	1 120	2 30	4	-3
250	5	6 120	3 120	7 130	
	0				

В 1-ом столбце находятся две отмеченные клетки (1,1) и (2,1). Их оценки должны быть нулевыми. Из этого условия, зная оценку 1-ого столбца, найдем оценки 1-ой и 2-й строк.

Оценка клетки (1,1) = оценка 1-й строки + оценка 1-го столбца + число в верхнем левом углу клетки (1,1)

Оценка 1-й строки = Оценка клетки (1,1) – оценка 1-го столбца – число в верхнем левом углу клетки (1,1)

$$\text{Оценка 1-й строки} = 0 - 0 - 4 = -4$$

	70	120	150	130	
30	4 30	7	2	3	-4
190	3 40	1 120	2 30	4	-3
250	5	6	3 120	7 130	
	0				

Так же найдем оценку 2-й строки:

Оценка клетки (2,1) = оценка 2-й строки + оценка 1-го столбца + число в верхнем левом углу клетки (2,1)

Оценка 2-й строки = Оценка клетки (2,1) – оценка 1-го столбца – число в верхнем левом углу клетки (2,1)

$$\text{Оценка 2-й строки} = 0 - 0 - 3 = -3$$

	70	120	150	130	
30	4 30	7	2	3	-4
190	3 40	1 120	2 30	4	-3
250	5	6	3 120	7 130	
	0	2			

Теперь надо найти отмеченную клетку, для которой известны оценка строки или оценка столбца.

Например, это клетка (2,2).

Для нее известна оценка строки.

Оценка клетки (2,2) = оценка 2-й строки + оценка 2-го столбца + число в левом верхнем углу клетки (2,2) =

$$0 = (-3) + \text{оценка 2-го столбца} + 1$$

$$\text{Оценка 2-го столбца} = 2$$

Для отмеченной клетки (2,3) мы знаем только оценку строки.

Попробуйте найти оценку 3-го столбца.

Оценка клетки (2,3) = оценка 2-й строки + оценка 3-го столбца + 2 = 0

	70	120	150	130	
30	4 30	7	2	3	-4
190	3 40	1 120	2 30	4	-3
250	5	6	3 120	7 130	
	0	2	?		

Оценка клетки (2,3) = оценка 2-й строки + оценка 3-го столбца + 2 = 0

Оценка 2-й строки = 1

Получаем следующую таблицу:

	70	120	150	130	
30	4 30	7	2	3	-4
190	3 40	1 120	2 30	4	-3
250	5	6	3 120	7 130	
	0	2	1		

Попробуйте самостоятельно найти оценку 3-й строки и оценку 4-го столбца.

	70	120	150	130	
30	4 30	7	2	3	-4
190	3 40	1 120	2 30	4	-3
250	5	6 120	3 120	7 130	-4
	0	2	1	-3	

Найдены оценки всех строк и столбцов. Вычислим оценки всех клеток и составим матрицу оценок.

Для упрощения подсчета можно составить таблицу:

Адрес ячейки	Оценка клетки (i, j)	Оценка i-ой строки	Оценка j-ого столбца	Число в верхнем углу
1,1		-4	0	4
1,2		-4	2	7
1,3		-4	1	2
1,4		-4	-3	3
2,1		-3	0	3
2,2		-3	2	1
2,3		-3	1	2
2,4		-3	-3	4
3,1		-4	0	5
3,2		-4	2	6
3,3		-4	1	3
3,4		-4	-3	7

Попробуйте рассчитать оценки клеток.

Адрес ячейки	Оценка клетки (i, j)	Оценка i-ой строки	Оценка j-ого столбца	Число в верхнем углу
1,1	0	-4	0	4
1,2	5	-4	2	7
1,3	-1	-4	1	2
1,4	-4	-4	-3	3
2,1	0	-3	0	3
2,2	0	-3	2	1
2,3	0	-3	1	2
2,4	-2	-3	-3	4
3,1	1	-4	0	5
3,2	4	-4	2	6
3,3	0	-4	1	3
3,4	0	-4	-3	7

$$\begin{bmatrix} 0 & 5 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 1 & 4 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Так как матрица оценок содержит отрицательные числа, то наш план является неоптимальным.

Проведем его оптимизацию.

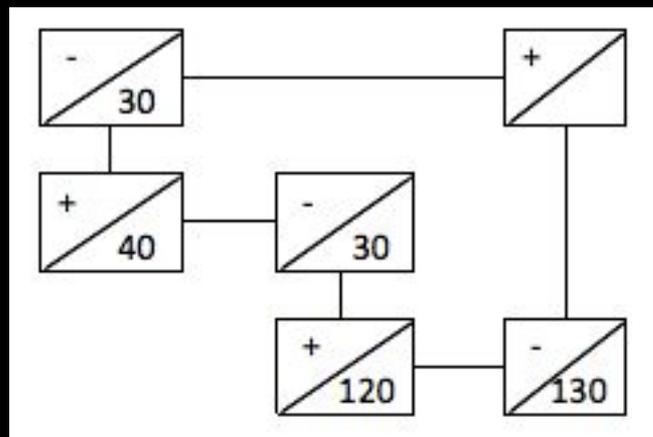
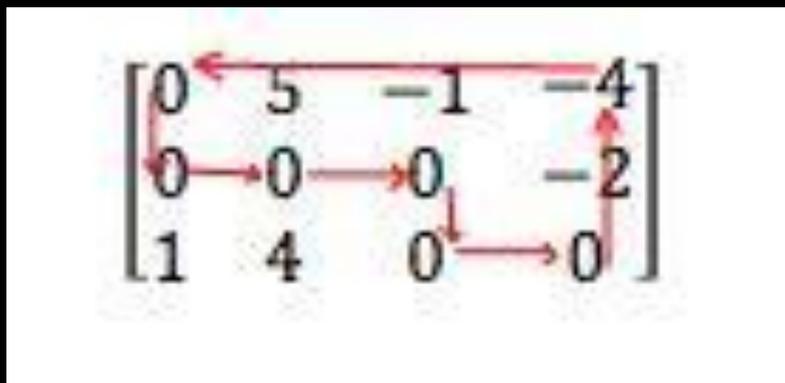
Выбираем клетку с наименьшей оценкой. Это клетка (1,4). Ее оценка **-4**.

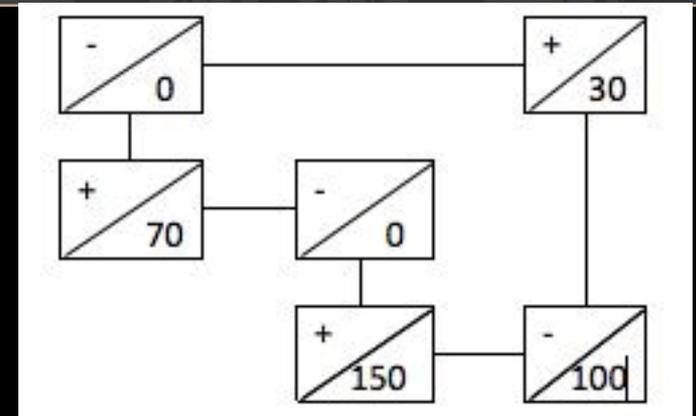
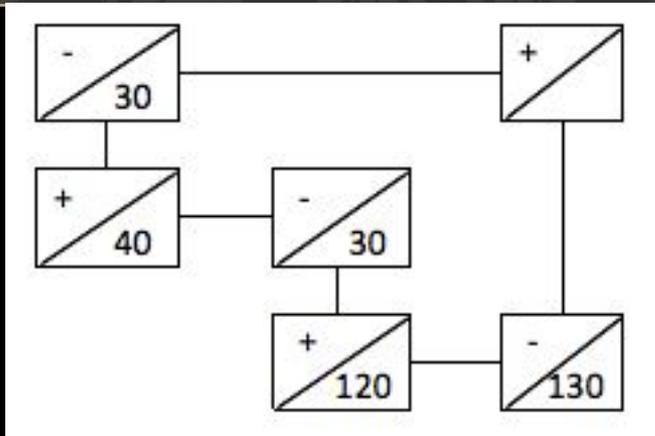
Наша задача – построить цикл пересчета.

Выходя из клетки (1,4) и двигаясь **ТОЛЬКО ПО ОТМЕЧЕННЫМ КЛЕТКАМ**, нужно вернуться в стартовую клетку (1,4). При этом запрещается делать два последовательных шага в одной строке или в одном столбце.

Например, нам подходит цикл (1,4)-(1,1)-(2,1)-(2,3)-(3,3)-(3,4)-(1,4).

Нарисуем этот цикл. Для каждой клетки указаны ее индексы и объем поставок.

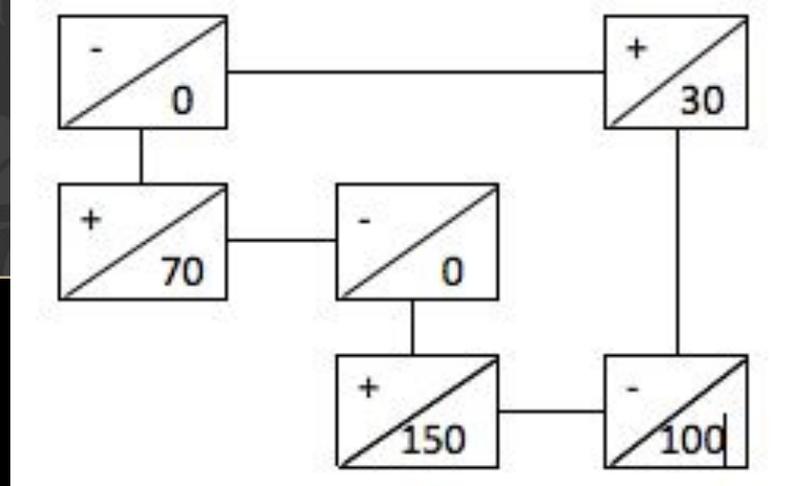




Стартовой клетке (1,4) припишем знак «+». Двигаясь по циклу **ЧЕРЕДУЕМ** знаки.

Найдем минимальное значение поставки среди тех клеток, где стоит знак «-». Это значение = 30.

В тех клетках, где стоит знак «-» необходимо уменьшить значение поставки на этот минимум, т.е. На 30, а там, где стоит знак «+» необходимо увеличить на этот минимум.



Если получена одна клетка с нулевой поставкой, то она становится пустой.

У нас таких клеток две: (1,1) и (2,3).

Пустой объем поставим там, где наибольший тариф на доставку, т.е. В клетку (1,1).

Это делается для того, чтобы выполнялось соотношение:

число отмеченных клеток = число строк + число столбцов - 1

Получаем новый план поставок.

Для нового плана находим оценки строк и столбцов.

	70	120	150	130	
30	4	7	2	3	
190	3	1	2	4	30
250	5	6	3	7	(0)
			150	100	

Начнем с 1-го столбца, приписав ему ноль.

В 1-ом столбце находится одна отмеченная клетка (2,1). Ее оценка должны быть нулевая. Из этого условия, зная оценку 1-ого столбца, найдем оценку 2-й строки.

Оценка клетки (1,1) = оценка 1-й строки + оценка 1-го столбца + число в верхнем левом углу клетки (1,1)

Оценка 2-й строки = Оценка клетки (2,1) – оценка 1-го столбца – число в верхнем левом углу клетки (2,1)

$$\text{Оценка 2-й строки} = 0 - 0 - 3 = -3$$

Для нового плана находим оценки строк и столбцов.

	70	120	150	130	
30	4	7	2	3	
190	3	1	2	4	30
250	5	6	3	7	(0)
			150	100	

Для клетки (2,2) известна оценка строки.

Оценка клетки (2,2) = оценка 2-й строки + оценка 2-го столбца + число в левом верхнем углу
клетки (2,2) =

$$0 = (-3) + \text{оценка 2-го столбца} + 1$$

$$\text{Оценка 2-го столбца} = 2$$

	70	120	150	130	
30	4	7	2	3	0
190	3	1	2	4	-3
250	5	6	3	7	-4
	0	2	1	-3	

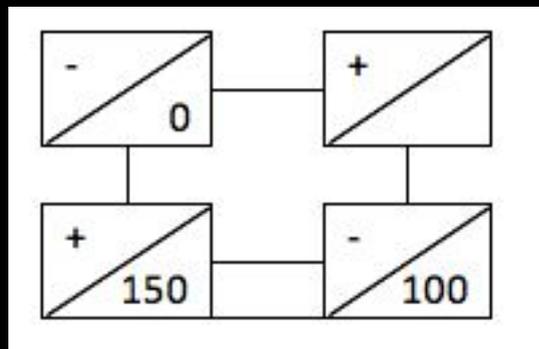
Адрес ячейки	Оценка клетки (l, j)	Оценка i-ой строки	Оценка j-ого столбца	Число в верхнем углу
1,1	4	0	0	4
1,2	9	0	2	7
1,3	3	0	1	2
1,4	0	0	-3	3
2,1	0	-3	0	3
2,2	0	-3	2	1
2,3	0	-3	1	2
2,4	-2	-3	-3	4
3,1	1	-4	0	5
3,2	4	-4	2	6
3,3	0	-4	1	3
3,4	0	-4	-3	7

Составляем матрицу оценок:

$$\begin{bmatrix} 4 & 9 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 1 & 4 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

План является **неоптимальным**, т.к. **Оценка** клетки (2,4) **меньше 0**.

Строим для него *цикл пересчета*.



$$\text{Min} = 0.$$

Клетка (2,3) становится пустой, а клетка (2,4) – **ОТМЕЧЕННОЙ** (нулевая поставка).

Получаем новый план поставок:

	70	120	150	130	
30	4	7	2	3	-2
190	3	1	2	4	-3
250	5	6	3	7	-6
	0	2	3	-1	

Найдите оценки клеток.

Оценка клетки (j, j) вычисляется по следующему правилу:

оценка i -й строки + оценка j -го столбца + число в левом верхнем углу клетки (i, j)

Оценки клеток:

Адрес ячейки	Оценка клетки (i, j)	Оценка i-ой строки	Оценка j-ого столбца	Число в верхнем углу
1,1	2	-2	0	4
1,2	7	-2	2	7
1,3	3	-2	3	2
1,4	0	-2	-1	3
2,1	0	-3	0	3
2,2	0	-3	2	1
2,3	2	-3	3	2
2,4	0	-3	-1	4
3,1	-1	-6	0	5
3,2	2	-6	2	6
3,3	0	-6	3	3
3,4	0	-6	-1	7

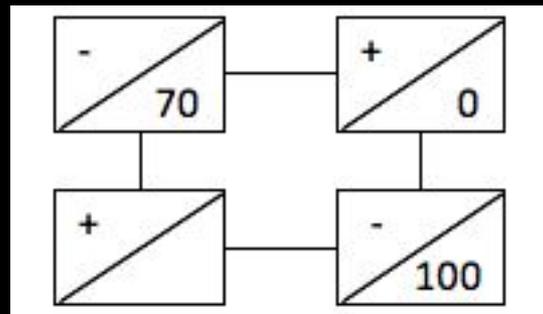
Получаем следующую матрицу оценок:

$$\begin{bmatrix} 2 & 7 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

План является неоптимальным, т.к. Оценка клетки (3,1) меньше 0.

Постройте цикл пересчета.

Нам подходит цикл (3,1)-(2,1)-(2,4)-(3,4)-(3,1)



Минимум (70, 100) = 70.

В клетках со знаком «+» поставки увеличиваются на 70, а в клетках со знаком «-» поставки уменьшаются на 70.

Клетка (2,1) становится пустой.

Поучаем новый план поставок:

	70	120	150	130	
30	4	7	2	3	-1
190	3	1	2	4	-2
250	5	6	3	7	-5
	0	1	2	-2	

Составим матрицу оценок:

$$\begin{vmatrix} 3 & 7 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Матрица оценок не содержит отрицательных чисел.

Получен оптимальный план поставок.

Суммарные затраты на перевозку груза равны:

$$3 * 30 + 1 * 120 + 4 * 70 + 5 * 70 + 3 * 150 + 7 * 30 = 1500$$

Напомню, что суммарные затраты на перевозку груза 1690.

ОКРЫТАЯ МОДЕЛЬ

Открытая модель сводится к закрытой.

Если суммарная мощность поставщиков больше суммарного спроса потребителей, то вводится фиктивный потребитель, которому приписывается спрос, **равный разнице между суммарной мощностью поставщиков и суммарным спросом потребителей.**

Полученная закрытая модель решается.

	30	40	60
40	7	8	6
60	6	5	10
50	4	3	9

Суммарная мощность поставщиков = $40+60+50=150$.

Суммарный спрос потребителей = $30+40+60+130$.

Модель – открытая.

Вводим фиктивного потребителя, которому приписываем спрос:

$$150-130=20$$

Стоимость перевозки единицы груза до фиктивного потребителя равна 0.

Получаем закрытую модель:

	30	40	60	20
40	7	8	6	0
60	6	5	10	0
50	4	3	9	0