

Рассмотрение решение задачи 3.3.24 из сборника задач по высшей математике

Подготовила

Самойлова Мария

Найдите длины диагоналей и площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a} = \vec{k} - \vec{j}$, $\vec{b} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$

- Найдем координаты векторов

$$\vec{a} = \vec{k} - \vec{j} = (0; -1; 1)$$

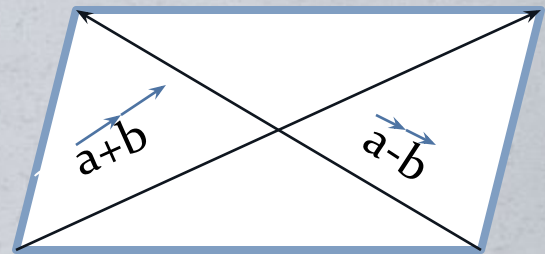
$$\vec{b} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k} = (1; 1; 1)$$

- Найдем сумму и разность

векторов:

$$\vec{a} + \vec{b} = (1; 0; 2)$$

$$\vec{a} - \vec{b} = (-1; -2; 0)$$



● Найдем длины диагоналей: $\left| \vec{a} + \vec{b} \right| = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$

$$\left| \vec{a} - \vec{b} \right| = \sqrt{(-1)^2 + (-2)^2} = \sqrt{5}$$

- По определению векторного произведения двух векторов модуль векторного произведения равен площади параллелограмма, построенного на этих векторах. Поэтому для решения задачи найдем сначала векторное произведение $\vec{a} \times \vec{b}$, а потом его модуль. Согласно

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

имеем

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \Rightarrow \vec{i} \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -2\vec{i} + 1\vec{j} + 1\vec{k}$$

а модуль

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = \sqrt{2^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{6}$$

Искомая площадь параллелограмма $S = \sqrt{6}$

Ответ: $\sqrt{5}, \sqrt{5}, \sqrt{6}$

Дополнительное задание

- Доказать, что площадь параллелограмма, вычисленная через диагонали в 2 раза больше площади вычисленной с помощью модуля векторного произведения:

$$\begin{pmatrix} \vec{a} + \vec{b} \\ \vec{a} - \vec{b} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \vec{a} - \vec{b} \\ \vec{a} + \vec{b} \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 2 \\ -1 & -2 & 0 \end{vmatrix} = \vec{i} \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = 4\vec{i} + 2\vec{j} - 2\vec{k}$$

$$2S_{\text{п}} = \sqrt{4^2 + 2^2 + 2^2} = \sqrt{16 + 4 + 4} = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$$

Действительно, $\frac{2S}{S} = \frac{2\sqrt{6}}{\sqrt{6}} = 2$