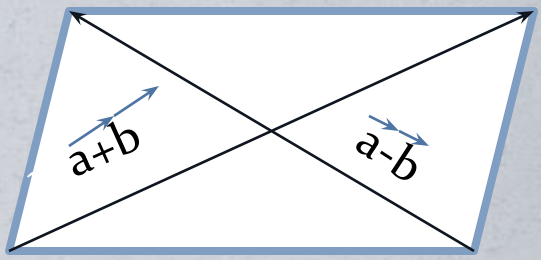
Рассмотрение решение задачи 3.3.24 из сборника задач по высшей математике

Подготовила

Самойлова Мария

Найдите длины диагоналей и площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a} = \vec{k} - \vec{j}$, $\vec{b} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$

- Найдем координаты векторов
  $\vec{a} = \vec{k} - \vec{j} = (0;-1;1)$
  $\vec{b} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k} = (1;1;1)$
- Найдем сумму и разность векторов:
  $\vec{a} + \vec{b} = (1;0;2)$
  $\vec{a} - \vec{b} = (-1;-2;0)$



- Найдем длины диагоналей: $\left|\vec{a}+\vec{b}\right| = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$

$$\left|\vec{a}-\vec{b}\right| = \sqrt{(-1)^2 + (-2)^2} = \sqrt{5}$$

- По определению векторного произведения двух векторов модуль векторного произведения равен площади параллелограмма, построенного на этих векторах. Поэтому для решения задачи найдем сначала векторное произведение $\vec{a}\times\vec{b}$, а потом его модуль. Согласно

$$\vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

имеем

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 0 & -1 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{vmatrix}=\vec{i}\begin{vmatrix}-1 & 1\\ 1 & 1\end{vmatrix}-\vec{j}\begin{vmatrix}0 & 1\\ 1 & 1\end{vmatrix}+\vec{k}\begin{vmatrix}0 & -1\\ 1 & 1\end{vmatrix}=-2\vec{i}+1\vec{j}+1\vec{k}$$

а модуль

$$\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|=\sqrt{2^2+1^2+1^2}=\sqrt{6}$$

Искомая площадь параллелограмма S= √6

Ответ: √5, √5,√6

Дополнительное задание

- Доказать, что площадь параллелограмма, вычисленная через диагонали в 2 раза больше площади вычисленной с помощью модуля векторного произведения:

$$\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\times\left(\vec{a}-\vec{b}\right)=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 0 & 2\\ -1 & -2 & 0\end{vmatrix}=\vec{i}\begin{vmatrix}0 & 2\\ -2 & 0\end{vmatrix}-\vec{j}\begin{vmatrix}1 & 2\\ -1 & 0\end{vmatrix}+\vec{k}\begin{vmatrix}1 & 0\\ -1 & -2\end{vmatrix}=4\vec{i}+2\vec{j}-2\vec{k}$$

$$2S_п=\sqrt{4^2+2^2+2^2}=\sqrt{16+4+4}=\sqrt{24}=2\sqrt{6}$$

Действительно, $\frac{2S}{S}=\frac{2\sqrt{6}}{\sqrt{6}}=2$