

РАССТОЯНИЯ В ПРОСТРАНСТВЕ

Использованы материалы методического
журнала «Математика» №17

Разработчики:
Киншт М., Тропина А. –
лицейсты группы 11-2
Инженерного лицея НГТУ
Февраль 2012г

Цель занятия:

научиться находить расстояния:

- между точками;
- от точки до прямой;
- от точки до плоскости;
- между скрещивающимися прямыми.



Для успешного решения задач повторите определения указанных расстояний и следующие теоремы:

- о перпендикулярности прямой и плоскости,
- о перпендикулярности плоскостей,
- о трех перпендикулярах,
- о перпендикулярности двух параллельных прямых плоскости,
- о параллельности двух прямых, перпендикулярных одной плоскости,
- о параллельности прямой и плоскости,
- о параллельности плоскостей.

Повторить определения и теоремы можно по любому учебнику геометрии (стереометрия) для 10-11 классов.



Простейшие задачи



Задача №1

Ребро куба $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ равно 2.
Найти расстояние между точками B_1 и M , где M – середина ребра AD .



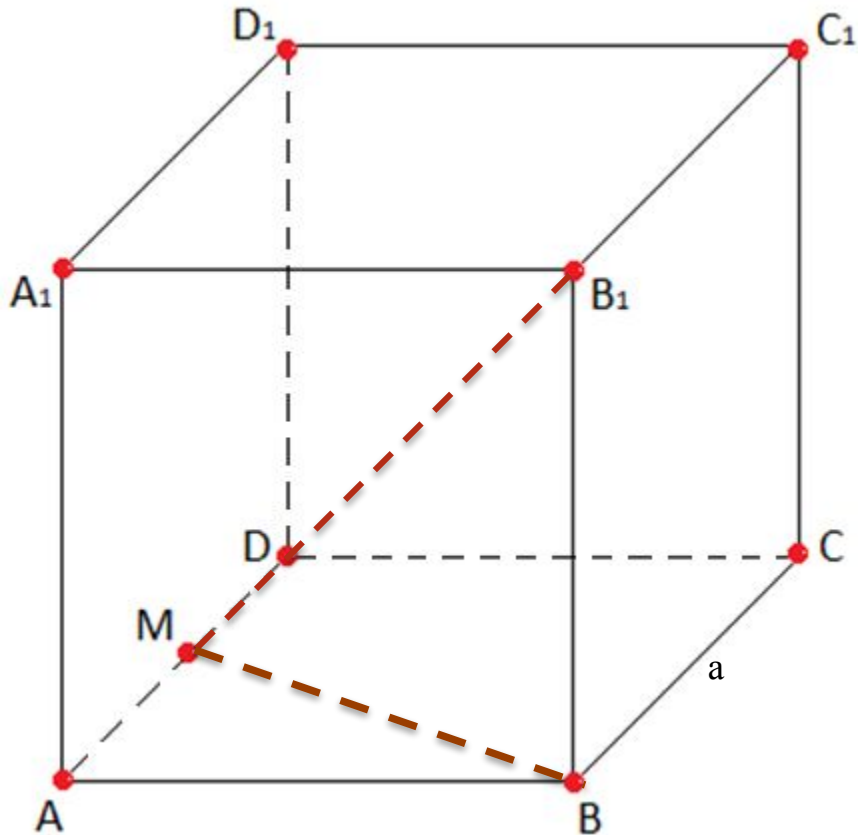
Дано:

$ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ – куб

$a = 2$

Найти:

$B_1 M$ - ?



РЕШЕНИЕ:

1) Соединим точки B_1 и M и спроецируем отрезок MB_1 на плоскость ABC ($ABCD$).

2) Получим прямоугольный треугольник BAM ($\angle A = 90^\circ$, т.к. в основании квадрат)

3) Применим теорему Пифагора к треугольникам BAM и B_1BM :

$$MB = \sqrt{AM^2 + AB^2}$$

$$B_1M = \sqrt{MB^2 + BB_1^2}$$

Ответ: 3.



Задача №2

Ребро куба $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ равно 2. Найти расстояние от точки D_1 до прямой AC .



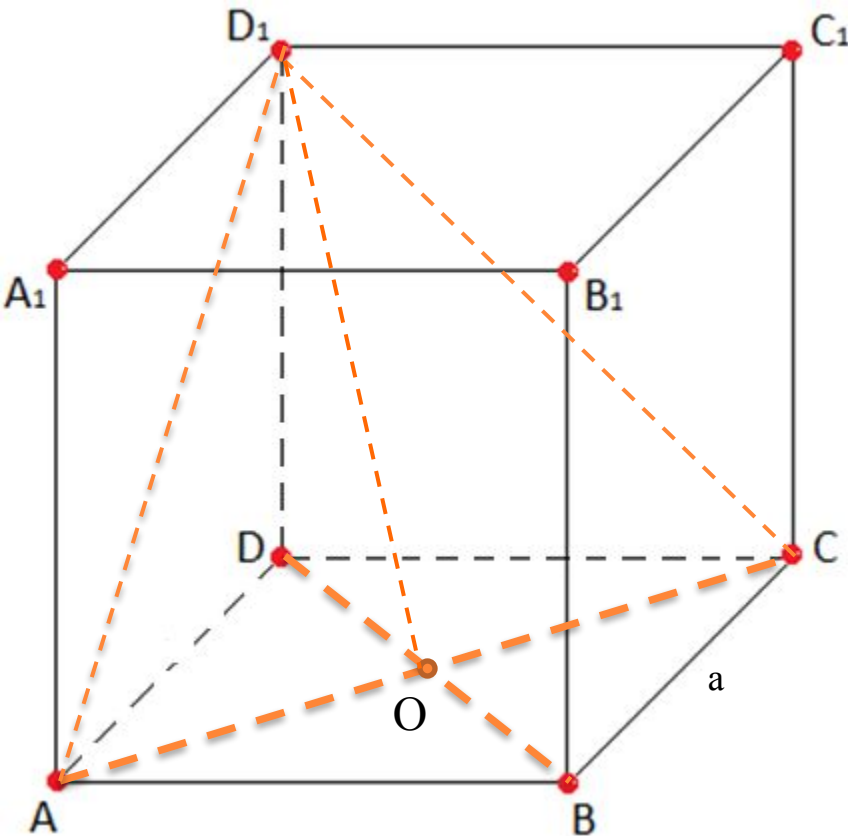
Дано:

$ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ – куб

$a = 2$

Найти:

$D_1 O$ - ?



Решение:

- 1) Проведем диагонали куба и обозначим точку их пересечения через O .
- 2) Соединим точку D_1 с точками A, C (точки A и $D_1 \in$ плоскости $AA_1 D_1 D$, точки C и $D_1 \in$ плоскости $D_1 D C C_1$)
- 3) Соединим точки D_1 и O .
- 4) Из треугольника $D_1 D O$ найдем $D_1 O$:
Треугольник $D_1 D O$ – прямоугольный (угол $D_1 D O = 90^\circ$ (по теореме о трех перпендикулярах))
 DO – радиус описанной окружности $ABCD \Rightarrow$
 $DO = a\sqrt{2}; DO = \sqrt{2}$
По Теореме Пифагора
 $D_1 O = \sqrt{4 + 2} = \sqrt{6}$

Ответ: $\sqrt{6}$



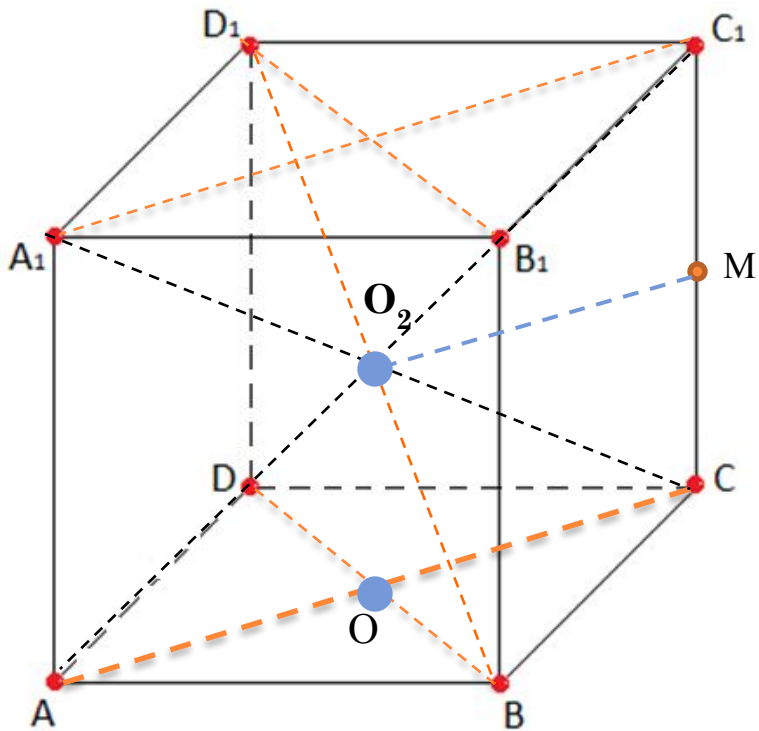
Задача №3

Ребро куба $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ равно 2. Найти расстояние от точки M , середины ребра CC_1 , - до плоскости DBB_1 .



Дано:
 $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ - куб
 $a=2$

Найти:



РЕШЕНИЕ:

1) AC перпендикулярна плоскости BDD_1B_1

2) В плоскости CAA_1C_1
проведем $MO_2 \perp AC$. MO_2
перпендикулярна BDD_1 .
Следовательно MO_2 – искомое
расстояние.

3) $CO = MO_2$ (Как отрезки
параллельных прямых,
заключенные между
параллельными плоскостями)

$$MO_2 = \frac{AC}{2}$$

$$MO_2 = \frac{\sqrt{2}a^2}{2}$$

Ответ: $\sqrt{2}$



Задача №4

Ребро куба $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ равно 2. Найти расстояние между прямыми $D_1 C$ и AA_1

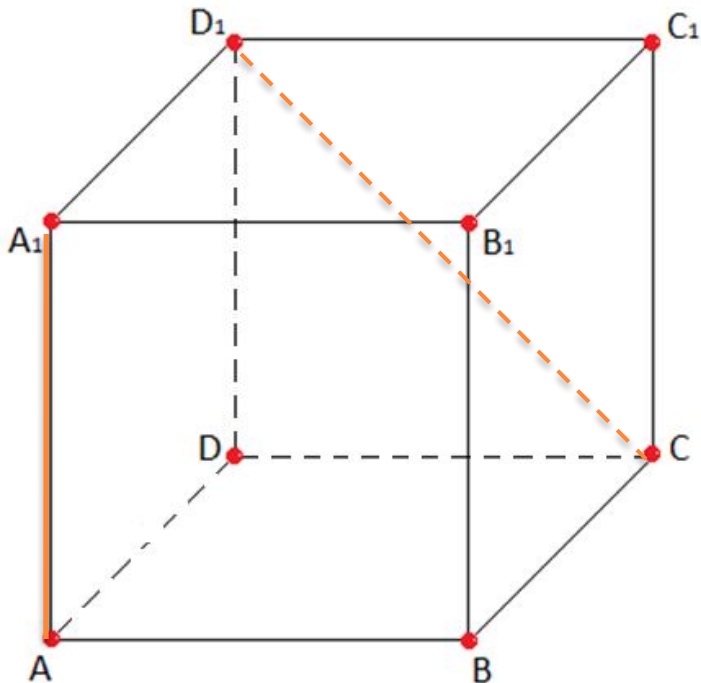


Дано:

$ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ – куб
 $a=2$

Найти:

Расстояние между прямыми $D_1 C$
и AA_1



Решение:

1) $D_1 C$ и AA_1 – скрещивающиеся
прямые (по определению: две
прямые называются
скрещивающимися, если они не
лежат в одной плоскости)

2) AD перпендикулярна AA_1 (т.к.
у куба все углы прямые)

3) AD перпендикулярна плоскости
 $DD_1 C_1 C$ (т.к. AD
перпендикулярна DD_1 , DD_1
принадлежит плоскости $DD_1 C_1 C$)

4) AD перпендикулярна $C_1 D_1$ (
по свойству параллельных
прямых (AD перпендикулярна
 CD , $CD \parallel C_1 D_1$))

5) AD – искомое расстояние.

Ответ: $AD=2$

ТИПИЧНЫЕ ЗАДАЧИ ИЗ ЧАСТИ С2 ЕГЭ



Задача №1

В кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ все ребра равны 1. Найти расстояние от точки C_1 до BD_1 .

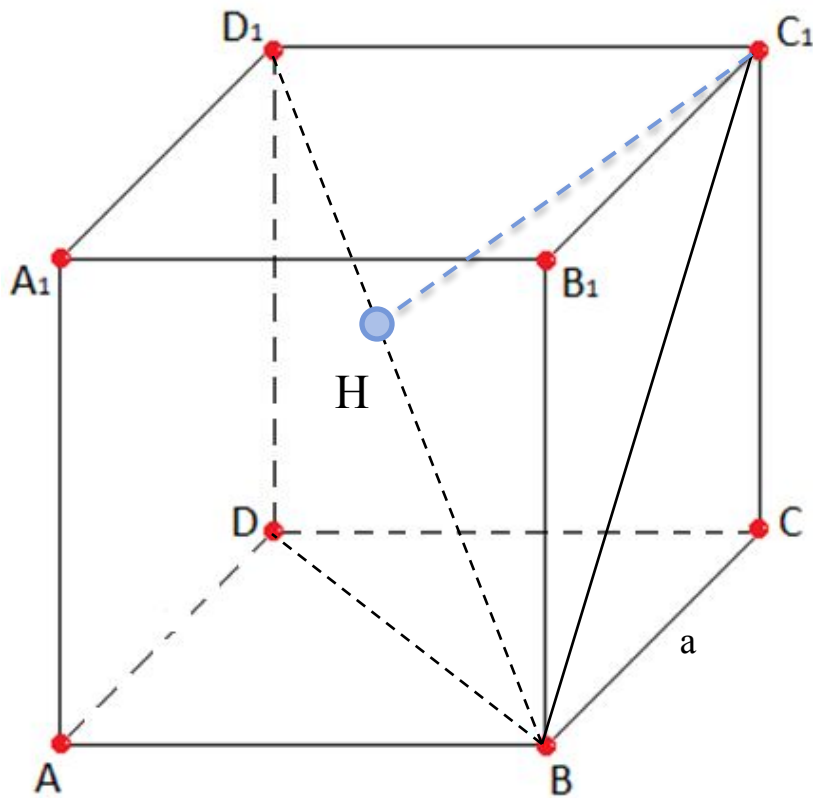


Дано:
 $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ - куб

$a=1$

Найти:

$C_1 H$ -?



Решение:

1) Из точки C_1 проведем перпендикуляр к прямой BD_1 . $C_1 H$ – искомое расстояние.

2) В треугольнике ABD :

$$BD = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$

3) В треугольнике $BD_1 D$:

$$DD_1 = 1; BD = \sqrt{2}; BD_1 = \sqrt{2+1} = \sqrt{3}$$

4) В треугольнике $BC_1 D_1$:

$$C_1 D_1 = 1; BD_1 = \sqrt{3}; BC_1 = \sqrt{2}$$

По теореме о среднем пропорциональном:

$$C_1 D_1^2 = BD_1 \times HD_1; HD_1 = \frac{C_1 D_1^2}{BD_1}; HD_1 = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

5) В треугольнике $C_1 H D$:

$$C_1 H = \sqrt{C_1 D_1^2 - HD_1^2};$$

Ответ: $\sqrt{\frac{2}{3}}$



Задача №2

В кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ все ребра равны 1.
Найдите расстояние от точки B_1 до плоскости $A_1 B C_1$.

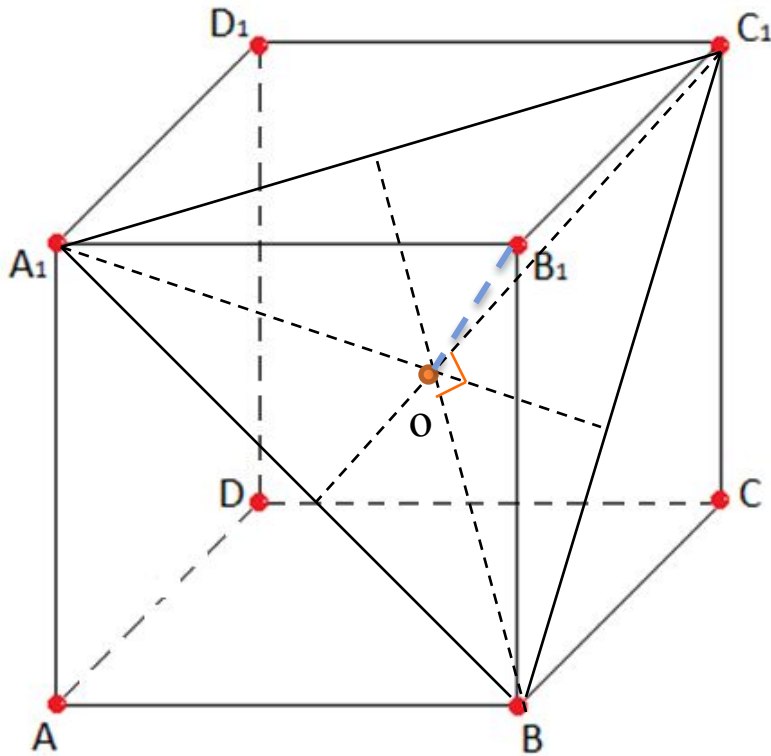


Дано:
 $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ - куб

$a=1$

Найти:

$B_1 O$ -?



Решение:

1) Проведем из точки B_1 прямую, перпендикулярную плоскости $A_1 B C_1$ ($B_1 O$)

2) В треугольнике $A_1 B C_1$:

$$A_1 C_1 = B C_1 = A_1 B = \sqrt{2}$$

$\Rightarrow \Delta A_1 B C_1$ - правильный.

$O B$ - радиус описанной окружности:

$$R = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{2}{3}}$$

3) В треугольнике $B_1 O B$:

$$B_1 O = \sqrt{B B_1^2 - O B^2}$$

Ответ: $\frac{1}{\sqrt{3}}$

Задачи для САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ



1) В кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ ребро равно 1. O_1 -точка пересечения диагоналей верхней грани. Найти расстояние от O_1 до прямой BC .

$$(\text{ответ} : \frac{\sqrt{5}}{2})$$

2) В кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ ребро равно 1. Найти расстояние от точки M – середины ребра BB_1 – до плоскости ACC_1 .

$$(\text{ответ} : \frac{1}{2})$$



3) В единичном кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ на диагоналях граней AD_1 и $D_1 B_1$ взяты точки E и F так, что

$$D_1 E = \frac{1}{3} AD_1, D_1 F = \frac{2}{3} D_1 B_1.$$

Найти длину отрезка EF .

(ответ: $\frac{1}{3}$)

4) В правильной шестиугольной призме $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$ все ребра равны 2. Найти расстояние от точки C до прямой $E_1 F_1$.

(ответ: 4)

