

# РАССТОЯНИЯ В ПРОСТРАНСТВЕ

Использованы материалы методического  
журнала «Математика» №17

Разработчики:  
Киншт М., Тропина А. –  
лицейсты группы 11-2  
Инженерного лицея НГТУ  
Февраль 2012г

# *Цель занятия:*

научиться находить расстояния:

- между точками;
- от точки до прямой;
- от точки до плоскости;
- между скрещивающимися прямыми.



Для успешного решения задач повторите определения указанных расстояний и следующие теоремы:

- о перпендикулярности прямой и плоскости,
- о перпендикулярности плоскостей,
- о трех перпендикулярах,
- о перпендикулярности двух параллельных прямых плоскости,
- о параллельности двух прямых, перпендикулярных одной плоскости,
- о параллельности прямой и плоскости,
- о параллельности плоскостей.

Повторить определения и теоремы можно по любому учебнику геометрии (стереометрия) для 10-11 классов.



# Простейшие задачи



## *Задача №1*

Ребро куба  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  равно 2.  
Найти расстояние между точками  $B_1$  и  $M$ , где  $M$  – середина ребра  $AD$ .





## Задача №2

Ребро куба  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  равно 2. Найти расстояние от точки  $D_1$  до прямой  $AC$ .







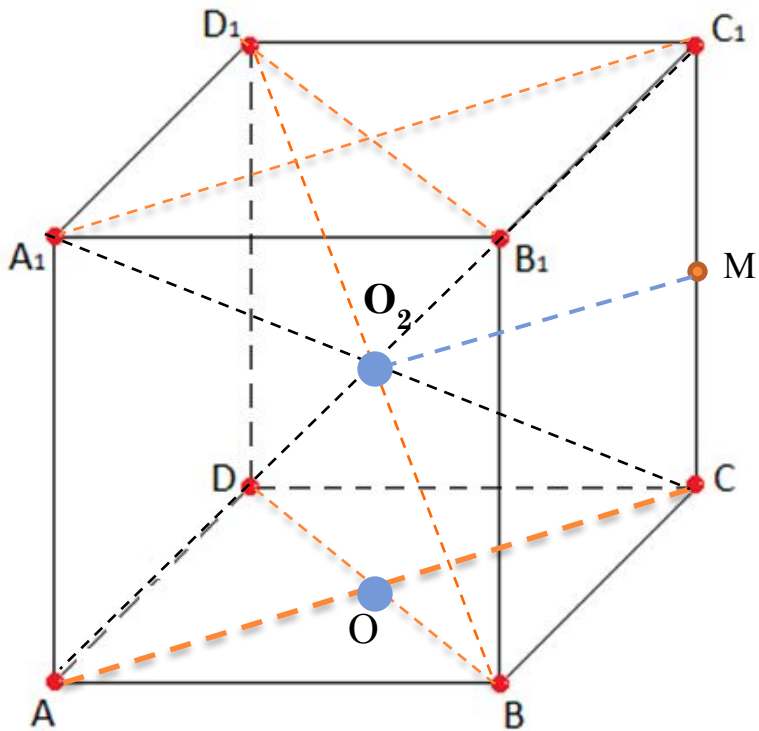
## Задача №3

Ребро куба  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  равно 2. Найти расстояние от точки  $M$ , середины ребра  $CC_1$ , - до плоскости  $DBB_1$ .



Дано:  
 $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  - куб  
 $a=2$

Найти:



РЕШЕНИЕ:

1)  $AC$  перпендикулярна плоскости  $BDD_1B_1$

2) В плоскости  $CAA_1C_1$  проведем  $MO_2 \perp AC$ .  $MO_2$  перпендикулярна  $BDD_1$ . Следовательно  $MO_2$  – искомое расстояние.

3)  $CO = MO_2$  (Как отрезки параллельных прямых, заключенные между параллельными плоскостями)

$$MO_2 = \frac{AC}{2}$$

$$MO_2 = \frac{\sqrt{2}a^2}{2}$$

Ответ:  $\sqrt{2}$



## Задача №4

Ребро куба  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  равно 2. Найти расстояние между прямыми  $D_1 C$  и  $AA_1$

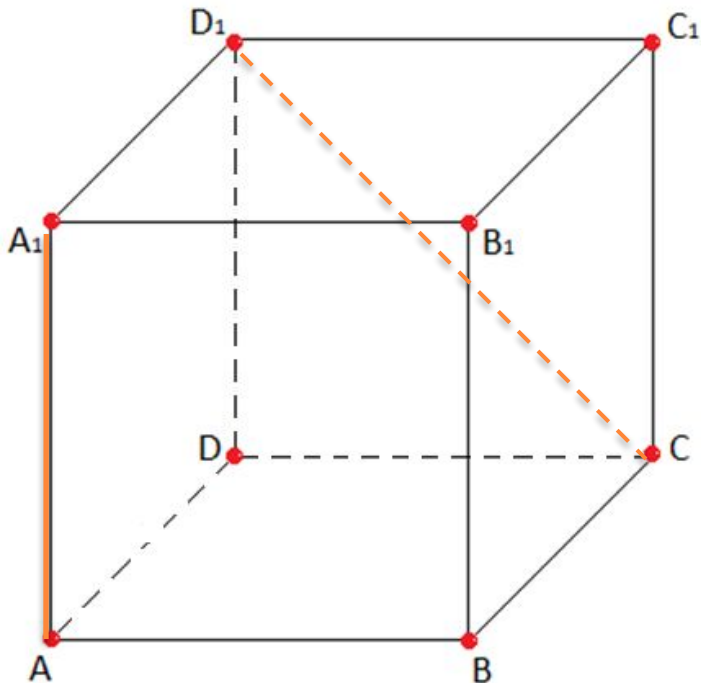


Дано:

$ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  – куб  
 $a=2$

Найти:

Расстояние между прямыми  $D_1 C$   
и  $AA_1$



Решение:

1)  $D_1 C$  и  $AA_1$  – скрещивающиеся  
прямые ( по определению: две  
прямые называются  
скрещивающимися, если они не  
лежат в одной плоскости)

2)  $AD$  перпендикулярна  $AA_1$  (т.к.  
у куба все углы прямые)

3)  $AD$  перпендикулярна плоскости  
 $DD_1 C_1 C$  (т.к.  $AD$   
перпендикулярна  $DD_1$ ,  $DD_1$   
принадлежит плоскости  $DD_1 C_1 C$ )

4)  $AD$  перпендикулярна  $C_1 D_1$  (  
по свойству параллельных  
прямых (  $AD$  перпендикулярна  
 $CD$ ,  $CD \parallel C_1 D_1$  ))

5)  $AD$  – искомое расстояние.

Ответ:  $AD=2$

# ТИПИЧНЫЕ ЗАДАЧИ ИЗ ЧАСТИ С2 ЕГЭ



## *Задача №1*

В кубе  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  все ребра равны 1. Найти расстояние от точки  $C_1$  до  $BD_1$ .

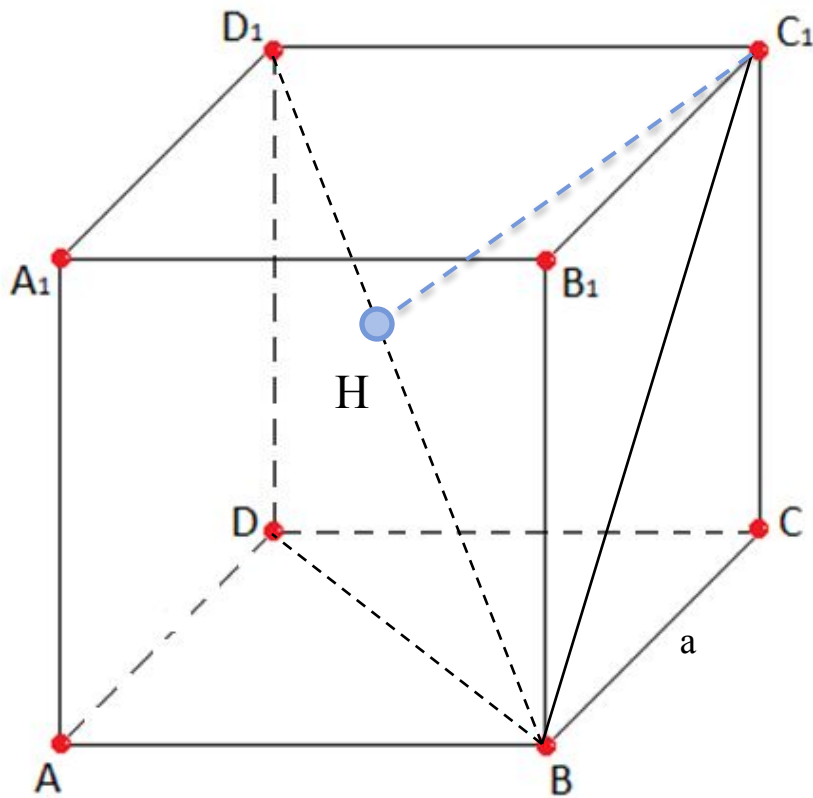


Дано:  
 $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  - куб

$a=1$

Найти:

$C_1 H$ -?



Решение:

1) Из точки  $C_1$  проведем перпендикуляр к прямой  $BD_1$ .  $C_1 H$  – искомое расстояние.

2) В треугольнике  $ABD$ :

$$BD = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$

3) В треугольнике  $BD_1 D$ :

$$DD_1 = 1; BD = \sqrt{2}; BD_1 = \sqrt{2+1} = \sqrt{3}$$

4) В треугольнике  $BC_1 D_1$ :

$$C_1 D_1 = 1; BD_1 = \sqrt{3}; BC_1 = \sqrt{2}$$

По теореме о среднем пропорциональном:

$$C_1 D_1^2 = BD_1 \times HD_1; HD_1 = \frac{C_1 D_1^2}{BD_1}; HD_1 = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

5) В треугольнике  $C_1 H D$ :

$$C_1 H = \sqrt{C_1 D_1^2 - HD_1^2};$$

Ответ:  $\sqrt{\frac{2}{3}}$



## Задача №2

В кубе  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  все ребра равны 1.  
Найдите расстояние от точки  $B_1$  до плоскости  $A_1 B C_1$ .



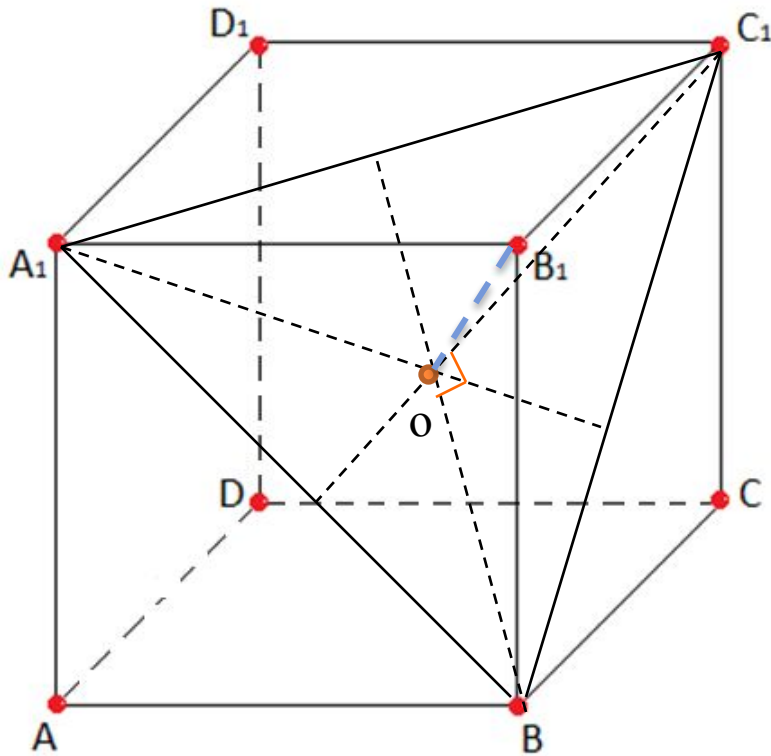


Дано:  
 $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  - куб

$a=1$

Найти:

$B_1 O$  -?



Решение:

1) Проведем из точки  $B_1$  прямую, перпендикулярную плоскости  $A_1 B C_1$  ( $B_1 O$ )

2) В треугольнике  $A_1 B C_1$ :

$$A_1 C_1 = B C_1 = A_1 B = \sqrt{2}$$

$\Rightarrow \Delta A_1 B C_1$  - правильный.

$O B$  - радиус описанной окружности:

$$R = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{2}{3}}$$

3) В треугольнике  $B_1 O B$ :

$$B_1 O = \sqrt{B B_1^2 - O B^2}$$

Ответ:  $\frac{1}{\sqrt{3}}$

# Задачи для САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ



1) В кубе  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  ребро равно 1.  $O_1$ -точка пересечения диагоналей верхней грани. Найти расстояние от  $O_1$  до прямой  $BC$ .

$$(\text{ответ} : \frac{\sqrt{5}}{2})$$

2) В кубе  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  ребро равно 1. Найти расстояние от точки  $M$  – середины ребра  $BB_1$  – до плоскости  $ACC_1$ .

$$(\text{ответ} : \frac{1}{2})$$



3) В единичном кубе  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  на диагоналях граней  $AD_1$  и  $D_1 B_1$  взяты точки  $E$  и  $F$  так, что

$$D_1 E = \frac{1}{3} AD_1, D_1 F = \frac{2}{3} D_1 B_1.$$

Найти длину отрезка  $EF$ .

(ответ:  $\frac{1}{3}$ )

4) В правильной шестиугольной призме  $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$  все ребра равны 2. Найти расстояние от точки  $C$  до прямой  $E_1 F_1$ .

(ответ: 4)

