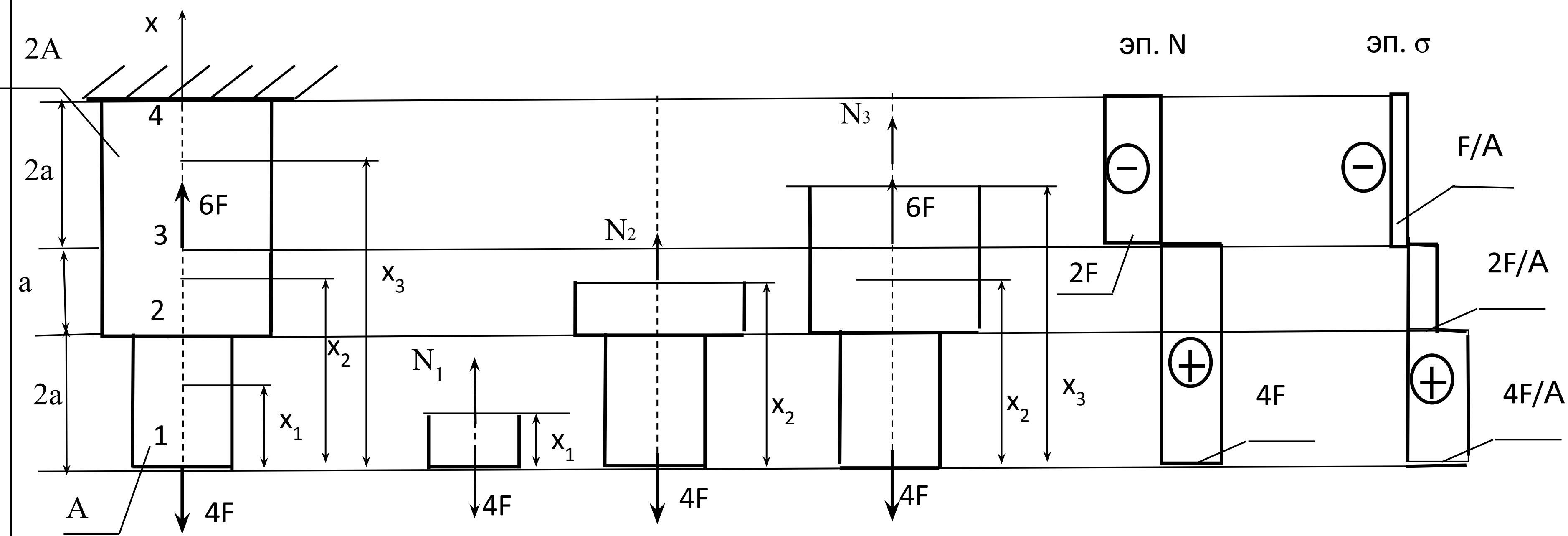
Растяжение и сжатие

Определение нормальных усилий и напряжений. Построение эпюр

- Растяжение (сжатие) стержня это такой вид сопротивления, когда в любом поперечном сечении стержня от действия внешней нагрузки возникает только один вид внутренних усилий - продольное усилие.

- Рассмотрим двухступенчатый стержень, нагруженный системой сил



- *Для определения внутренних усилий (продольных сил) применим метод сечений*
- *Разобьём стержень на участки, границами участков будут места приложения внешних сил и места изменения сечений*
- Участок 1-2 , $0 \le x_1 \le 2a$
- *Рассечем стержень на участке 1-2 сечением x_1, отбросим верхнюю часть и рассмотрим равновесие нижней части. Воздействие верхней части на нижнюю заменим силой N_1, направив её от сечения, т.е. в положительном направлении. Проектируя все силы, действующие на нижнюю часть, на ось x, и приравнивая сумму проекций нулю, получим*
- $$N_1 - 4F = 0,$$
- или
  - $$N_1 = 4F,$$
- т.е. продольная сила на данном участке – растягивающая.
- Напряжение на участке составит
- $$\sigma_1 = \frac{N_1}{A} = \frac{4F}{A}$$

- Участок 2-3 , $2a \le x_1 \le 3a$
- *Рассечем стержень на участке 2-3 сечением x_2,* Аналогично участку 1-2 получим
- $$N_2-4F=0,$$
- или

$$N_2=4F,$$

- *Напряжение на участке составит*

$$\sigma_2 = \frac{N_2}{2A} = \frac{2F}{A}$$

- Участок 3-4 , $3a \le x_3 \le 5a$
- Аналогично получим
- $N_3 - 4F + 6F = 0,$
- или
  - $N_3 = -2F,$
- Напряжение на участке составит

$$\sigma_3 = \frac{N_3}{2A} = \frac{-F}{A}$$

- **Пример**
- Построить эпюру продольного усилия для стержня, если $F = 2$ кН, $q_x = 3$ кН/м, $l_1 = 2$ м, $l_2 = 1$ м

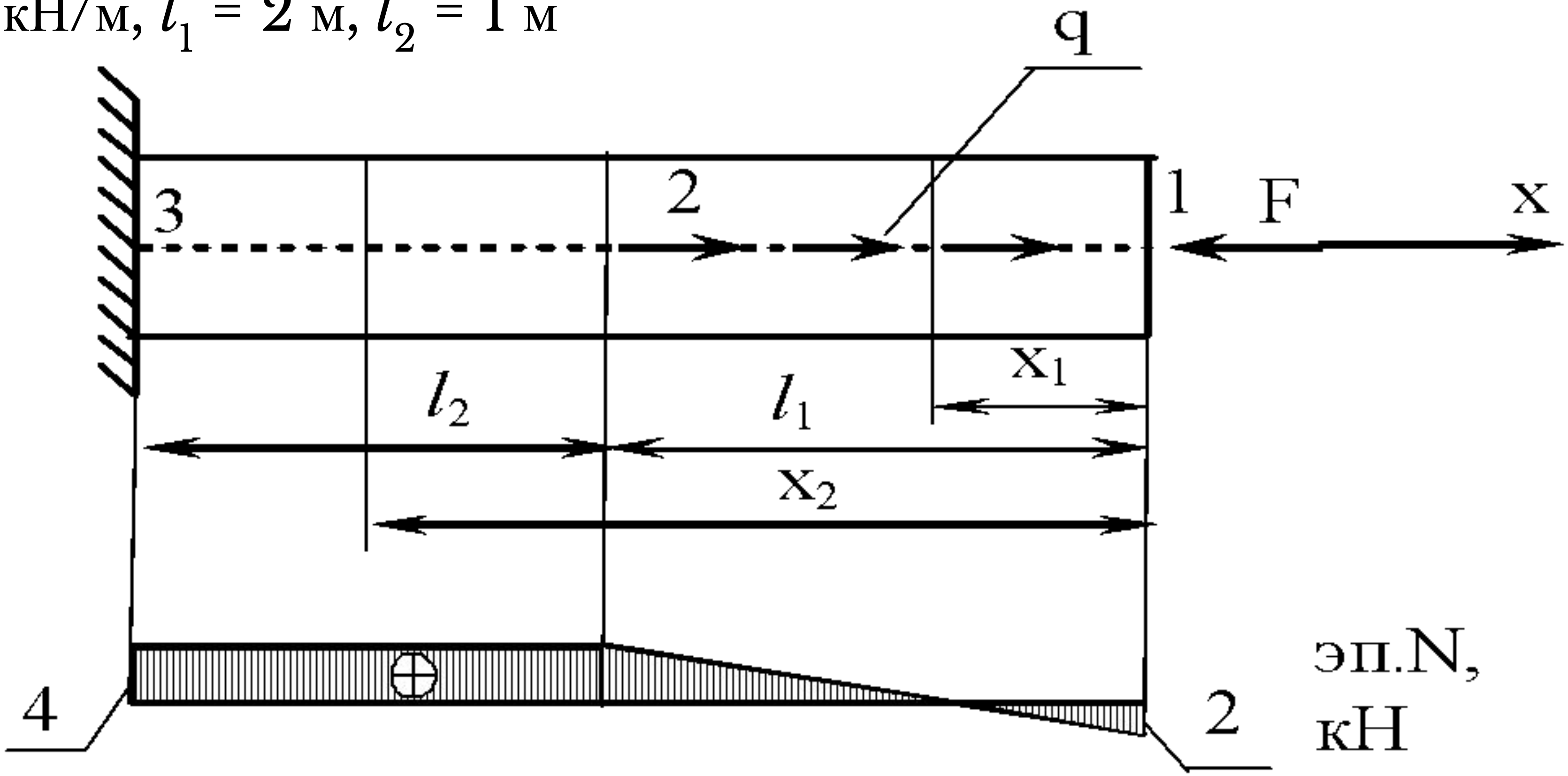
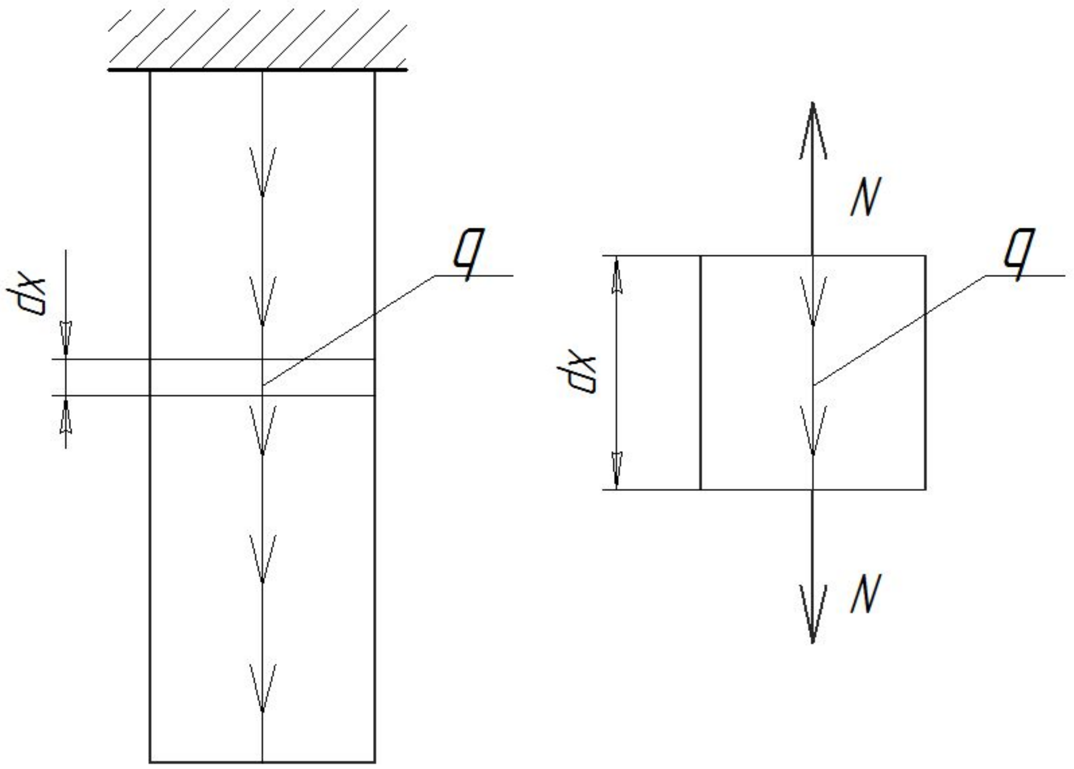


Рис. Р1

- Участок 1-2, $0 \le x_1 \le l_1$
- $N_1 = qx_1 - F$
- $x_1 = 0$, $N_1 = -2$кН; $x_1 = l_1 = 2$м, $N_1 = 4$кН.
- Участок 2-3, $l_2 \le x_2 \le l_1 + l_2$
- $N_2 = ql_1 - F = 4$кН

Дифференциальная зависимость между q и N



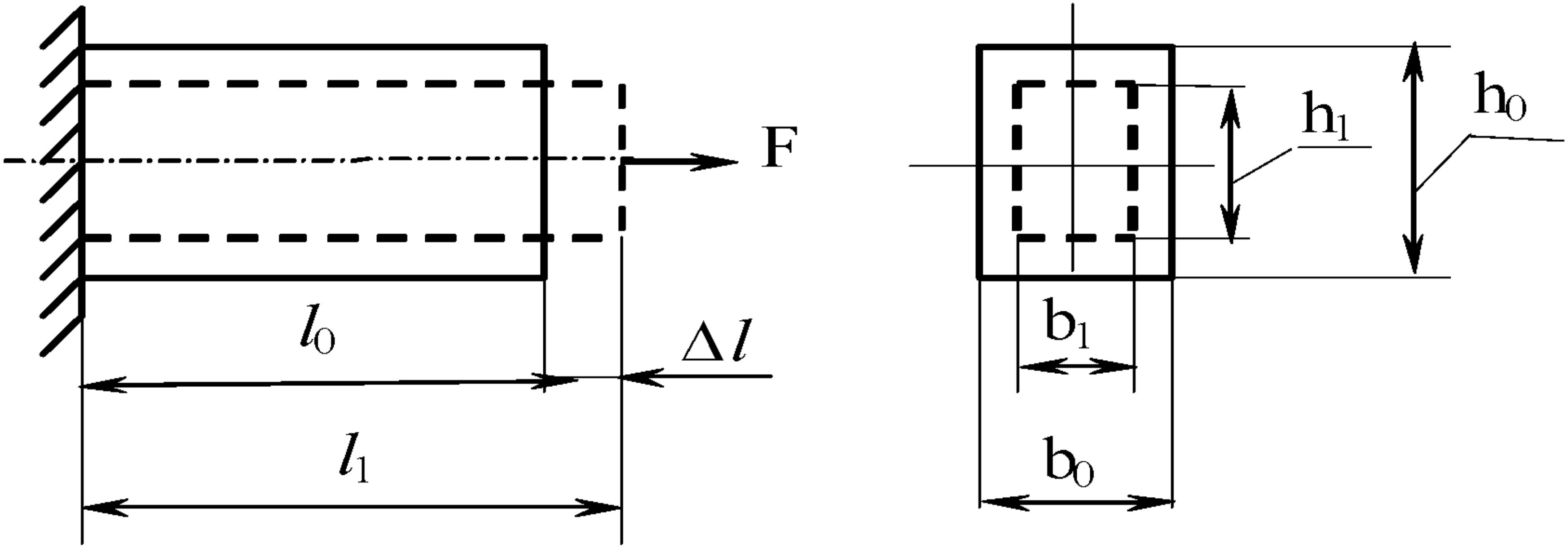
$$\sum X = N + qdx - N - dN = 0$$

$$q = \frac{dN}{dx} \qquad (1)$$

Свойства эпюр N

- С учётом выражения (1) можно заключить
- 1. Если в сечении к брусу приложена сосредоточенная сила, то на эпюре N будет «скачок» на величину силы.
- 2. Если на участке приложена осевая распределенная нагрузка постоянной интенсивности, то на эпюре N будет наклонная прямая, причем, тангенс угла наклона прямой к нулевой линии должен быть равен интенсивности нагрузки q.
- 3. Если на участке отсутствуют внешние нагрузки, то продольная сила будет постоянна.

Понятие о деформации при растяжении (сжатии)



- Здесь l_0, h_0 и b_0 – первоначальные размеры,
- l_1, h_1 и b_1 – размеры после нагружения.
- $\Delta l = l_1 - l_0$ - абсолютное удлинение стержня

- Относительное удлинение или продольная деформация ε равна

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0} \quad (2)$$

- Поперечные деформации равны

$$\varepsilon'_h = \frac{\Delta h}{h_0},$$

$$\varepsilon'_b = \frac{\Delta b}{b_0}.$$

- Для изотропных материалов

$$\varepsilon'_h = \varepsilon'_b = \varepsilon'.$$

- Экспериментально установлено, что при малых деформациях

$$\varepsilon = -\nu\varepsilon^{|},$$

- где ν – коэффициент Пуассона
- Или

$$\nu = \left|\frac{\varepsilon'}{\varepsilon}\right|.$$

- Для различных материалов коэффициент Пуассона лежит в пределах $0 \le \nu \le 0{,}5$. Для стали $\nu = 0{,}25 - 0{,}33$. Для цветных сплавов $\nu = 0{,}31 - 0{,}42$.

Связь между напряжениями и деформациями при растяжении (сжатии)

- $\sigma = E\varepsilon$,
- где E – модуль продольной упругости I рода (или просто модуль упругости).
- Модуль упругости E как и коэффициент Пуассона является механической характеристикой материала и определяется экспериментально. Размерность E такая же, как и σ, т.е. $Н/м^2$ (Па).
- Для стали $E=(2{,}0 - 2{,}1)\cdot 10^5$ МПа,
- для медных сплавов $E=(1{,}0 - 1{,}2)\cdot 10^5$ МПа,
- для алюминиево-магниевых сплавов $E=(0{,}7 - 0{,}8)\cdot 10^5$ МПа,
- для дерева (вдоль волокон) $E=(0{,}08 - 0{,}12)\cdot 10^5$ МПа.

Перемещения при растяжении (сжатии) стержня

- Из (2) можно получить

$$\Delta l = \frac{N \cdot l}{EA}.$$

- Для стержня с переменной по длине продольной силой и изменяемым поперечным сечением изменение длины равно

$$\Delta l = \int_0^l \frac{N(x)dx}{EA(x)}.$$

- Если стержень можно представить в виде совокупности **у** участков с длиной l_i, с постоянным поперечным сечение A_i и постоянной продольной силой N_i, то

$$\Delta l = \sum_{i=1}^{y} \frac{N_i l_i}{EA_i} = \sum_{i=1}^{y} \frac{\Omega_{Ni}}{EA_i},$$

- где Ω_{Ni} – площадь эпюры N на **i** участке

- **Пример**
- Определить изменение длины стального стержня, изображенного на рисунке. Площадь поперечного сечения стержня $A=2\cdot 10^{-3}$ м^2, модуль упругости материала $E=2\cdot 10^{11}$ Па.
- Изменение длины всего стержня равно алгебраической сумме изменений длин двух участков - $\Delta l=\Delta l_1+\Delta l_2$.

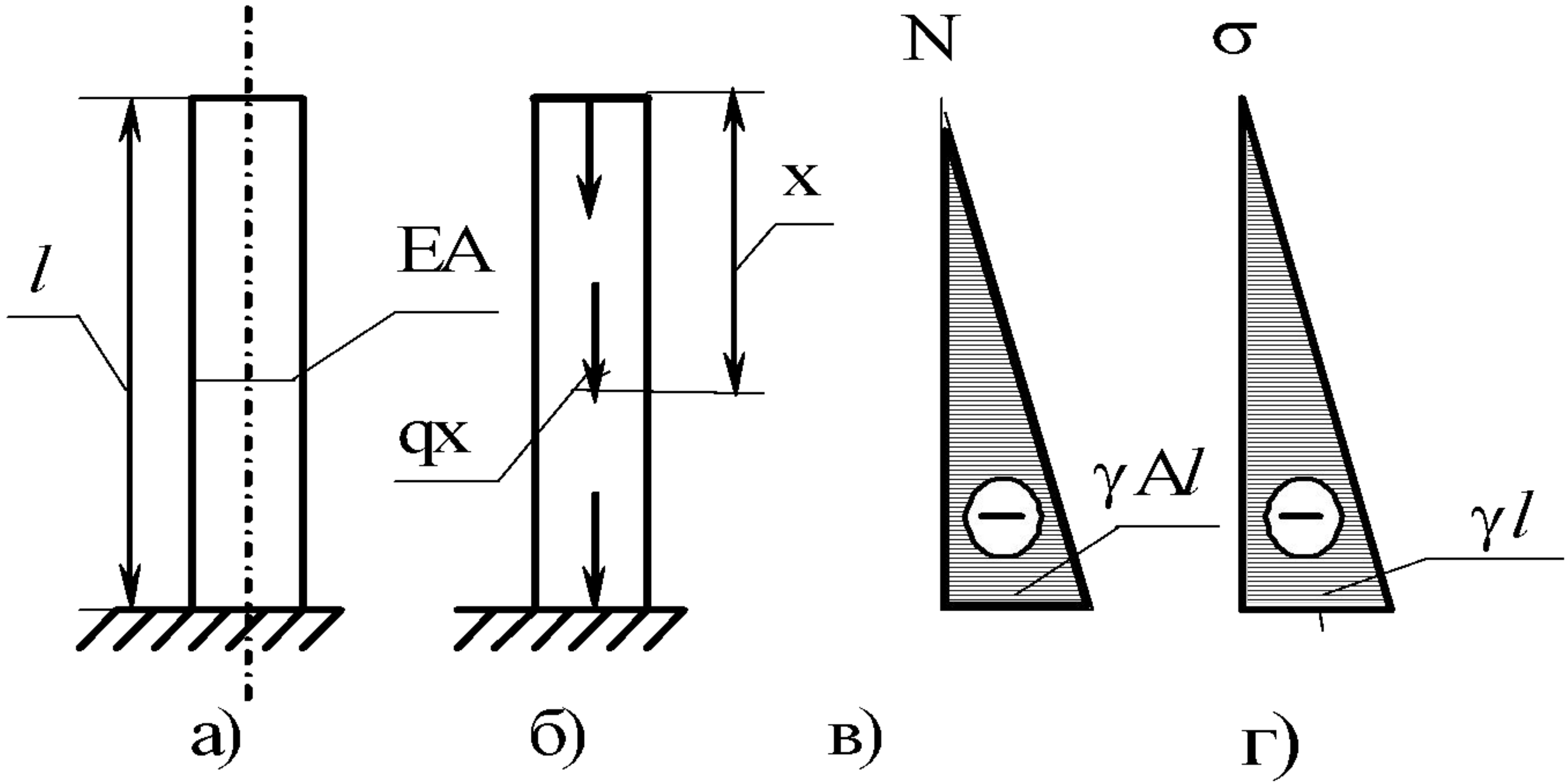
$$\Delta l_1 = \frac{N_{1ср} \cdot l_1}{EA},$$

- где $N_{ср}$ – среднее значение продольной силы, равное алгебраической полусумме значений N на концах участка

$$\Delta l_2 = \frac{N_2 l_2}{EA}$$

$$\Delta l = \frac{N_{1\text{ср}} l_1}{EA} + \frac{N_2 l_2}{EA} = \frac{\dfrac{4 + (-2)}{2} \cdot 10^3 \cdot 2}{2 \cdot 10^{11} \cdot 2 \cdot 10^{-3}} + \frac{4 \cdot 10^3 \cdot 1}{2 \cdot 10^{11} \cdot 2 \cdot 10^{-3}} = 2 \cdot 10^{-5}\,\text{м.}$$

- Определить перемещение свободного конца призматического стержня, находящегося под действием собственного веса. Длина стержня l, площадь поперечного сечения А, удельный вес материала γ, модуль упругости материала стержня Е. Построить эпюру нормальных напряжений.
- Стержень можно рассматривать как находящийся под действием продольной распределенной нагрузки q_x, равной весу единицы длины стержня: $q_x = \gamma \cdot A \cdot 1$


l
EA
x
qx
N
σ
γAl
γl
а)
б)
в)
г)

- $N(x) = -\gamma A x$.
- при $x=0$, $N=0$; при $x=l$, $N=-\gamma A l$.
- Перемещение сечения x

$$\delta_x = \int_x^l \frac{\gamma A x_1 dx_1}{EA} = \frac{\gamma}{2E}(l^2 - x^2).$$

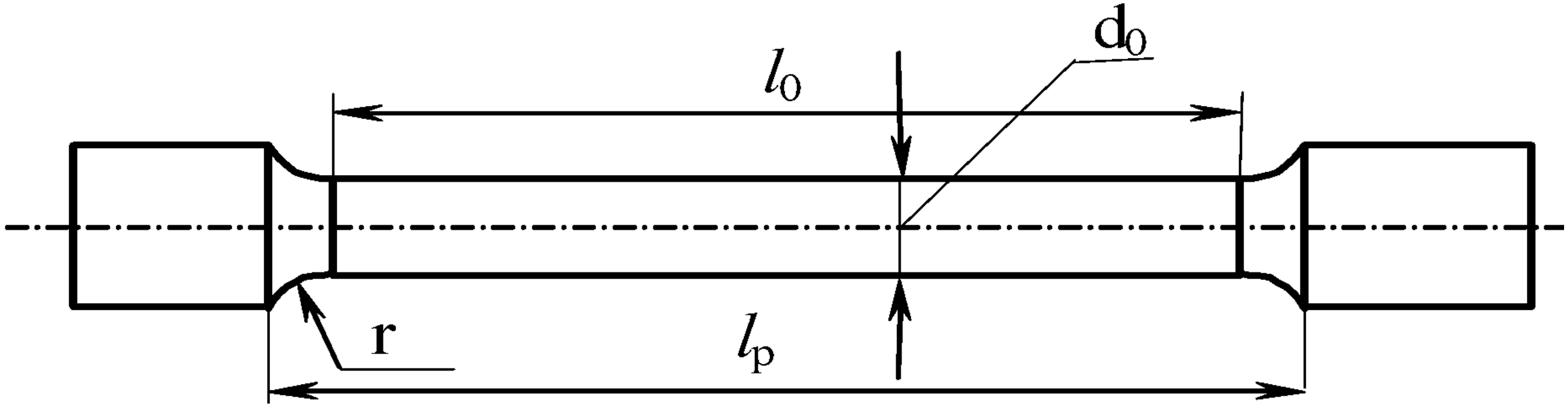
- перемещение свободного конца стержня ($x=0$)

$$\delta = \frac{\gamma l^2}{2E}.$$

- Нормальные напряжения изменяются по линейному закону: при $x=0$, $\sigma=0$; при $x=l$, $\sigma=\gamma l$.

Основные механические характеристики конструкционных материалов

- **Испытание на растяжение**
- Испытания проводятся со специальными образцами круглого, либо прямоугольного сечения



- $l_0 = l\text{-}2r$ - расчетная длина образца, l_p - рабочая длина образца, d_o - расчетный диаметр образца

- При испытании записывается графическая зависимость между растягивающейся силой F и удлинением образца Δl.

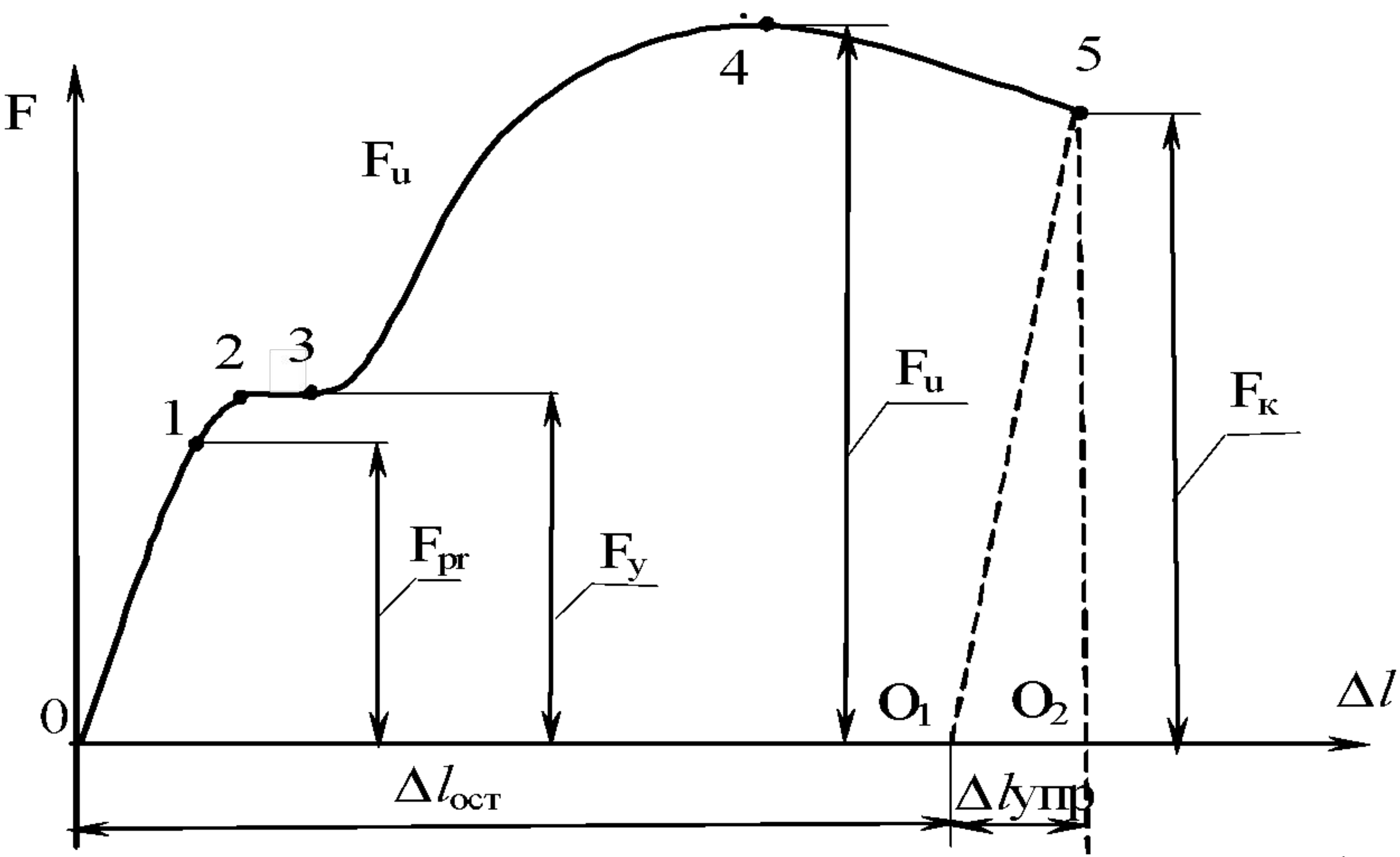
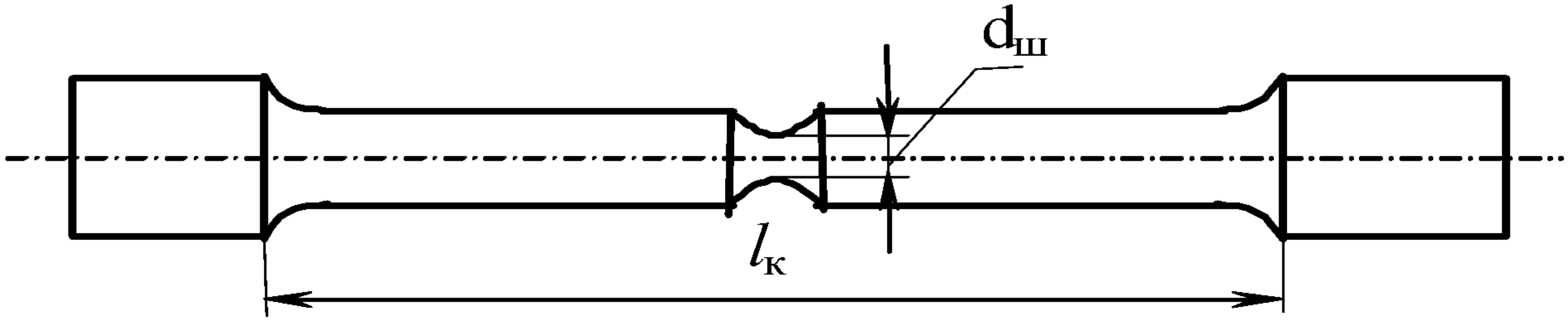


Рис. РИ1

- При достижении нагрузки F_{max} появляется заметное местное сужение образца (образуется шейка).



- На участке 0 - 1 удлинения растут пропорционально растягивающей силе, *согласно закону Гука. Сила, соответствующая точке 1, обозначается F_{pr}. При дальнейшем увеличении растягивающей силы прямолинейная зависимость между F и Δl нарушается. В точке 2 диаграммы наступает явление текучести металла. На диаграмме растяжения получается горизонтальный или близкий к нему* участок 2 - 3 (площадка текучести). *Для участка 2 - 3 характерен рост деформации без заметного увеличения нагрузки. Нагрузка, соответствующая площадке текучести 2 - 3, обозначается через F_y.*
- *Далее, при увеличении силы сверх F_y, происходит упрочнение металла.* Участок 3 - 4 называется участком упрочнения, *а сила, соответствующая точке 4, обозначается F_u (F_{max})*
- Участку 4 - 5 соответствует быстрое уменьшение сечения шейки и, как следствие, падает растягивающее усилие. *Образец разрушается по наименьшему сечению шейки. Усилие, соответствующее моменту разрыва (точка 5), обозначается $F_к$.*

- *Для удобства изучения механических характеристик* диаграмму растяжения часто перестраивают в системе координат σ – ε,
- где $\sigma = \dfrac{F}{A_0}$ - нормальное напряжение в
- поперечном сечении образца,
- $\varepsilon = \dfrac{\Delta l}{l_0}$ относительное удлинение образца

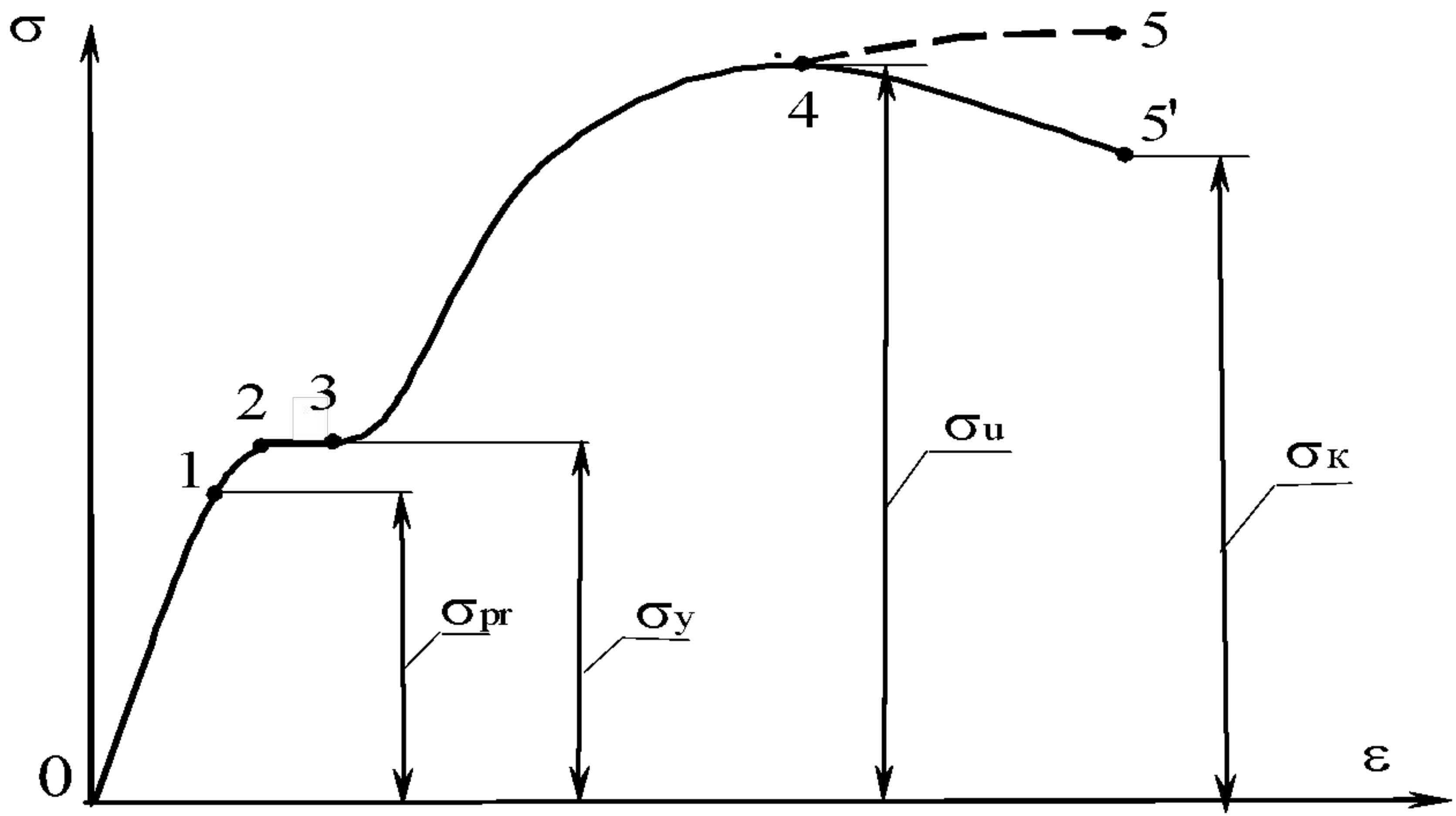


Рис. РИ2

- *характерные точки диаграммы :*
- предел пропорциональности $\sigma_{pr}=F_{pr}/A_0$ (для стали Ст3 $\sigma_{pr}\approx210$МПа),
- предел текучести $\sigma_y=F_y/A_0$, (для стали Ст3 $\sigma_т\approx240$МПа),
- предел прочности (временное сопротивление) $\sigma_u=F_u/A_0$ (для стали Ст3 $\sigma_u\approx400$МПа).
- Величины σ_u и σ_y называются характеристиками прочности материала.

- *Разрыв образца происходит по наименьшему сечению шейки. Поэтому* при определении напряжения разрушения $\sigma_р$ (точка 5) разрушающую нагрузку $F_к$ можно относить к площади шейки $A_ш$ или к первоначальной площади сечения образца A_0. В первом случае диаграмма 0-1-2-3-4-5 называется истинной, во втором случае – условной (0-1-2-3-4-5′).

- После разрушения образца разгрузка идет по прямой линии $5\text{-}0_1$, параллельной участку пропорциональности (рисунок РИ1). Отрезок $0\text{-}0_1$ - это остаточное удлинение образца $\Delta l_{ост}$, равное
  - $\Delta l_{\text{ост}} = l_{\text{к}} - l_0$.
- Отрезок $0_1\text{-}0_2$ - “исчезающая“ при разгрузке упругая составляющая удлинения образца.

- **Характеристика пластичности материала** <u>Относительное остаточное удлинение при разрыве.</u>

$$\delta = \frac{l_к - l_0}{l_0} \cdot 100\%$$

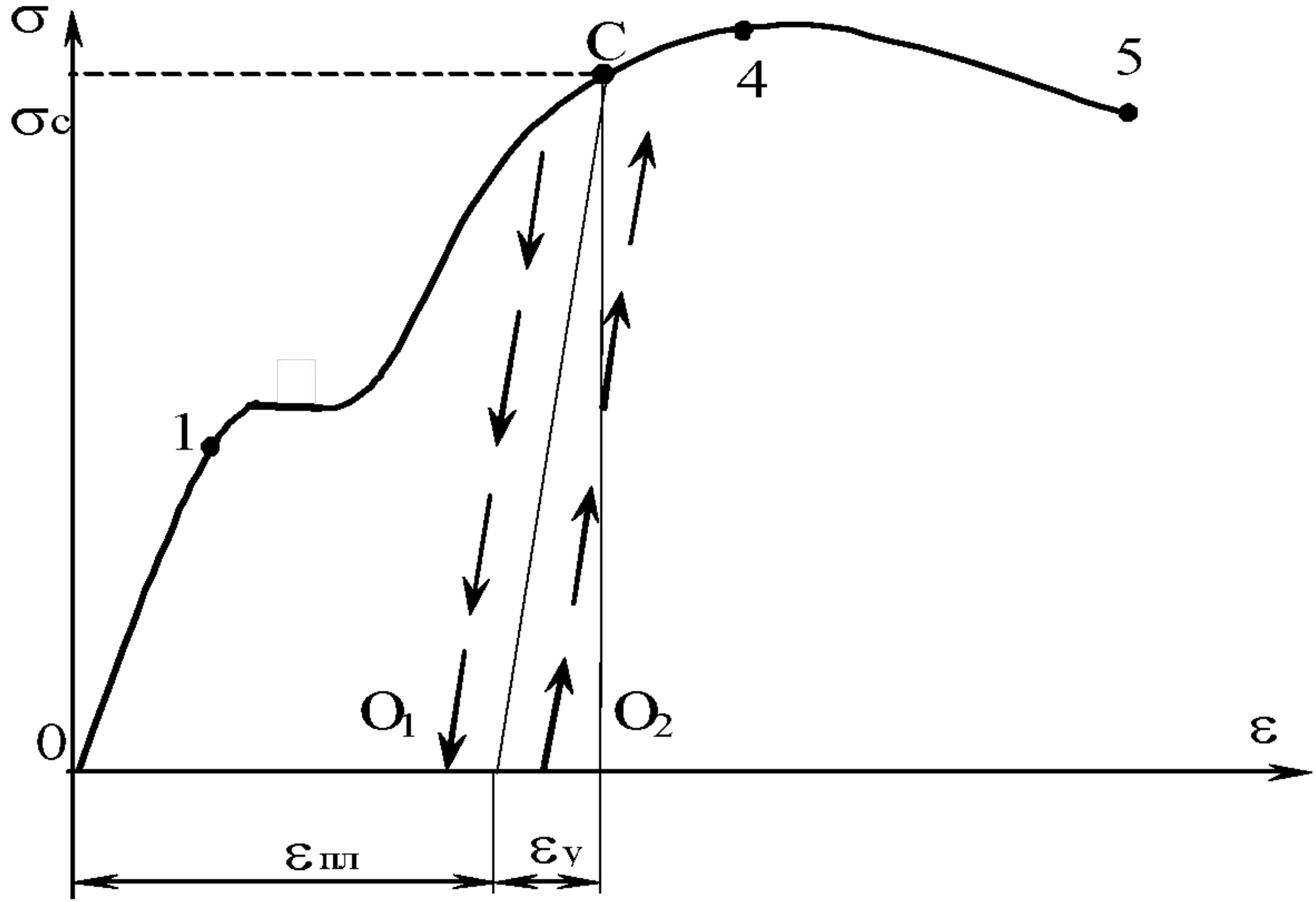
- *Чем больше δ, тем пластичнее материал. Для конструкционных сталей δ=(16–27)%.*

- <u>Относительное сужение сечения шейки после разрыва</u>

$$\psi = \frac{A_0 - A_ш}{A_0} \cdot 100\%$$

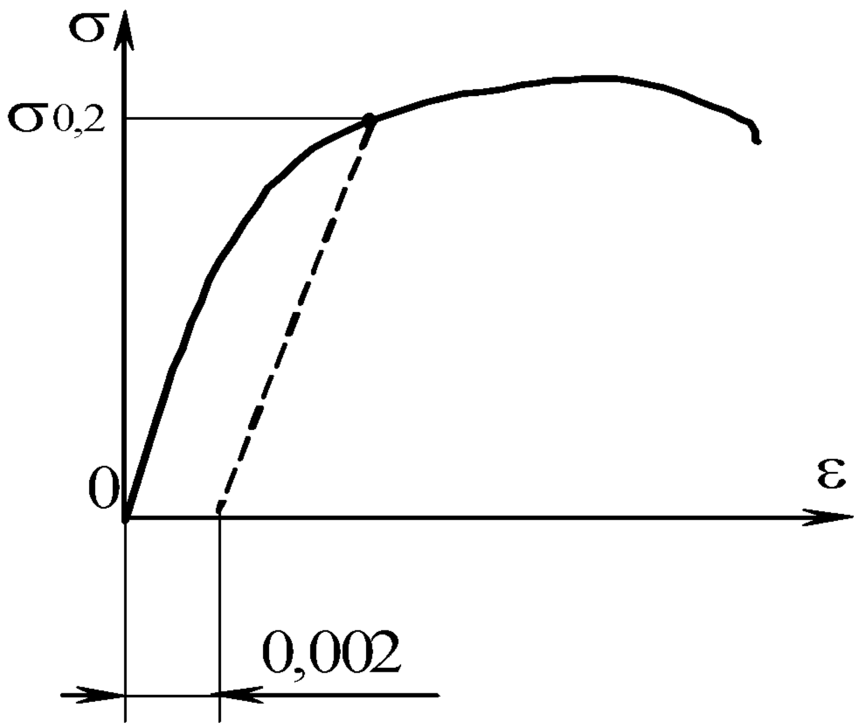
- *Величина ψ может достигать для сталей величины 55% и более.*

- Если образец нагружать до напряжения, соответствующего пределу пропорциональности, а потом, остановив машину, начать процесс разгрузки, то деформация будет уменьшаться по тому же закону, по которому увеличивались при нагружении. При нагрузке образца выше предела пропорциональности (например, до σ_c) деформации при разгрузке будут уменьшаться параллельно участку пропорциональности 0-1 (Рис. РИ.3)

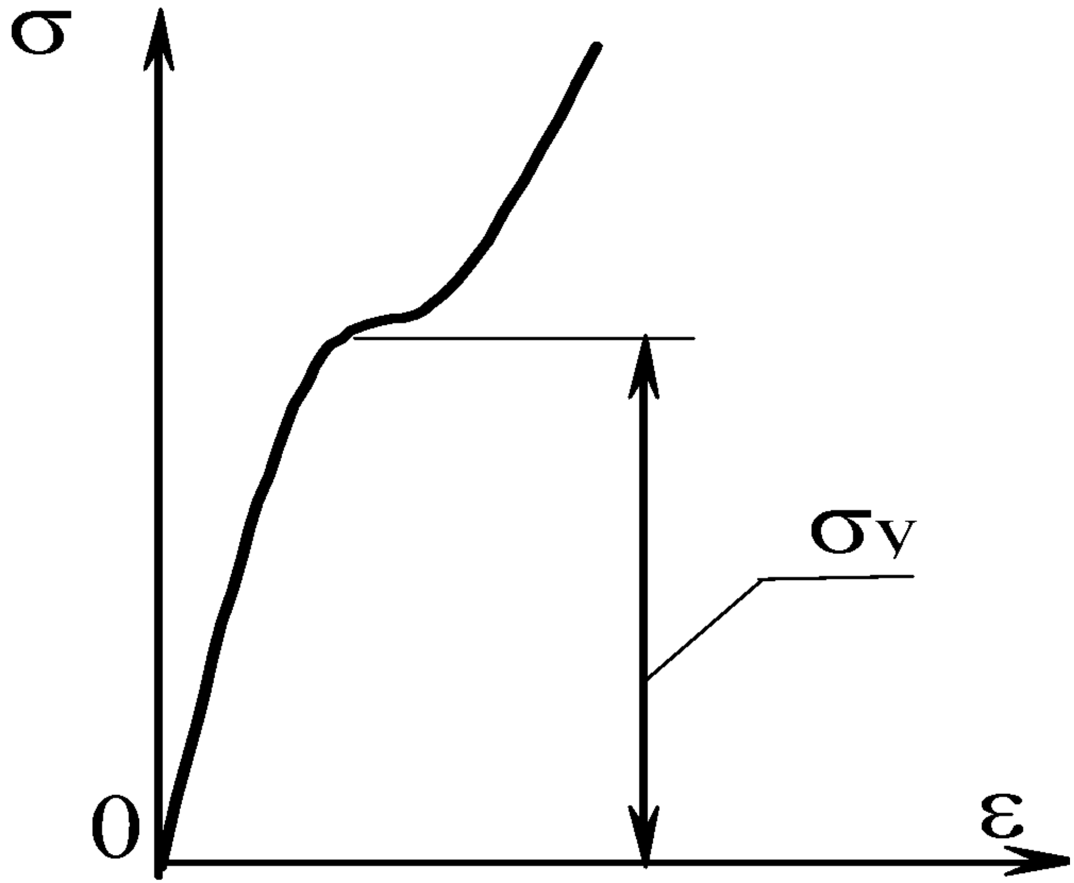

σ
σc
C
4
5
1
0
O1
O2
ε
ε пл
ε у

- Деформация, соответствующая любой точке диаграммы (правее точки 1) будет состоять из упругой $\varepsilon_у$ и пластической составляющей $\varepsilon_у$
  - $\varepsilon=\varepsilon_у+\varepsilon_у$
- При разгрузке образца упругая деформация исчезает, а остаточная деформация будет равна пластической составляющей. При повторном нагружении диаграмма деформирования будет сначала совпадать с прямой О-С, а затем с кривой С - 4 - 5 . Таким образом, при повторном нагружении образца повышается предел пропорциональности .
- Явление повышения предела пропорциональности при предварительном нагружении выше предела текучести называется наклепом (упрочнением). *Наклеп используется в технике для повышения эксплуатационной надежности деталей и для уменьшения деформации в процессе эксплуатации*

- высокопрочные среднеуглеродистые стали, высокопрочные сплавы не имеют на диаграмме напряжений текучести. Для них вводится характеристика пластичности - условный предел текучести- $\sigma_{0,2}$ - это напряжение, при котором остаточная деформация образца достигает величины 0,02 (0,2%)



- **Испытание на сжатие**
- Испытание на сжатие проводятся на цилиндрических образцах



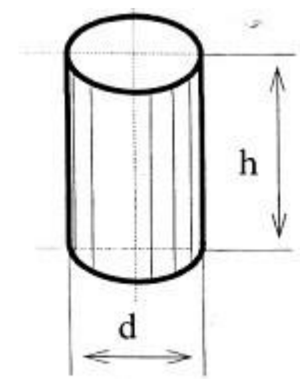
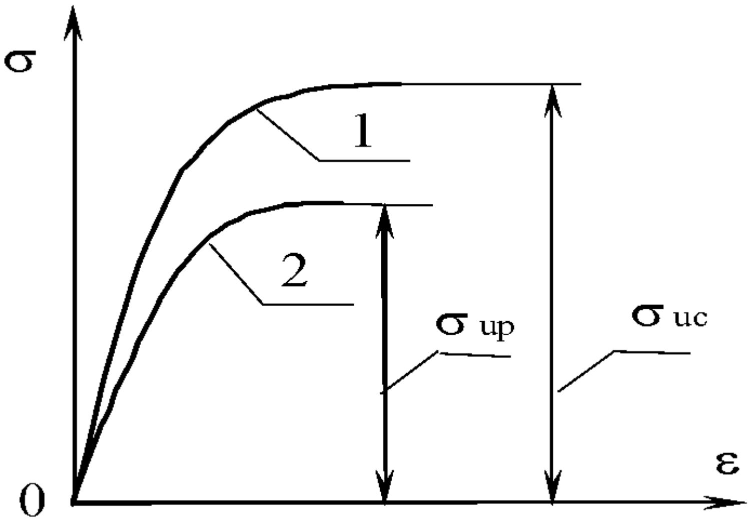
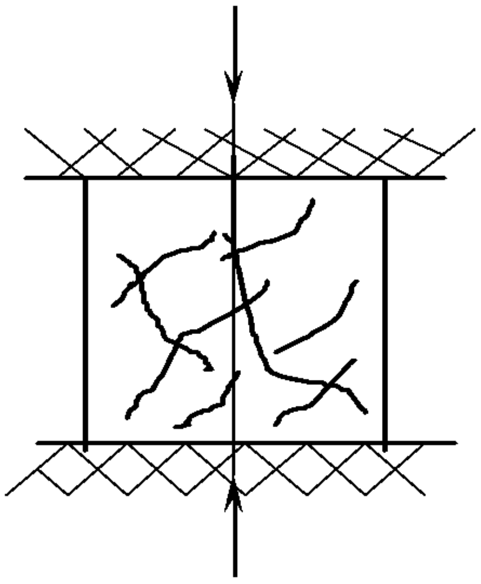


Диаграмма напряжений для малоуглеродистой стали



Диаграммы напряжений чугуна:
при сжатии (1) и при растяжении (2).



Характер разрушения хрупкого образца при сжатии

Расчёты на прочность при растяжении (сжатии)

- Условие прочности
  - $\sigma \le \gamma_c R$
- где γ_c – коэффициент условий работы.
- Проверочный расчёт

$$\sigma = \frac{N}{A} \le R$$

- Проектировочный расчёт

$$A = \frac{N}{R}$$

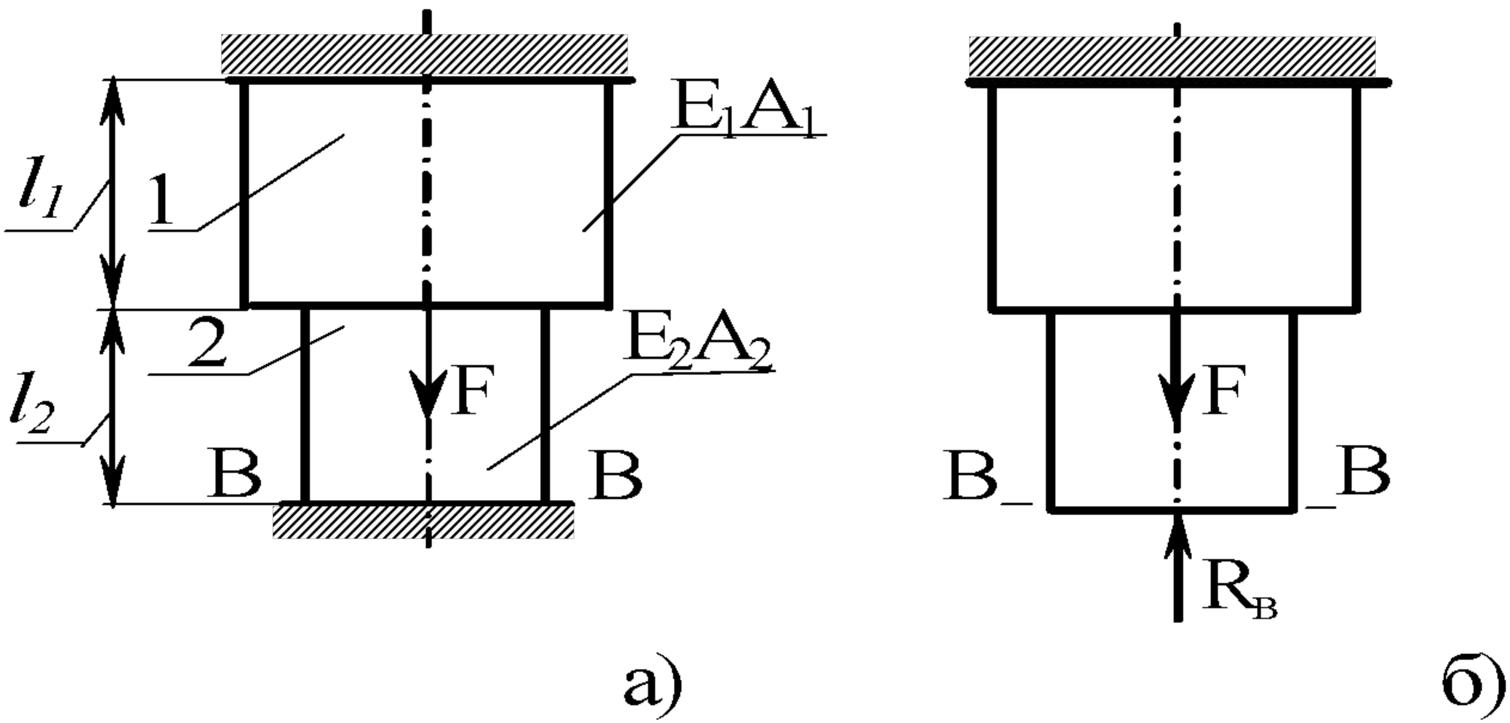
- Расчёт на определение допускаемых нагрузок

$$N \le RA$$

Статически неопределимые стержневые системы при растяжении и сжатии

- Стержневые системы, внутренние усилия в которых не могут быть определены только из условий равновесия стержневой системы как твердого тела., называют статически неопределимыми.
- *В статически неопределимых стержневых системах, в отличие от статически определимых стержневых систем, внутренние усилия возникают не только под действием внешних усилий, но и при изменении температуры всей системы, либо отдельных стержней, а так же при осадке (смещении) опор и наличии зазоров в соединяемых узлах (монтажные усилия).*
- Для определения внутренних усилий в статических неопределимых стержневых системах, наряду с уравнениями равновесия стержневой системы как твердого тела, составляются дополнительные уравнения – условия совместности деформаций.

Раскрытие статической неопределимости стержневых систем методом сравнения деформаций



Для определения внутренних усилий в стержне необходимо знать хотя бы одну из двух возникающих в защемлениях опорных реакций. Для определения **двух** реакций можно записать только **одно** уравнение равновесия: равенство нулю суммы проекций всех сил на ось стержня.

- Запишем дополнительное уравнение - условие совместности деформаций.
- Отбросим одно из защемлений, например, нижнее В-В, заменив его действие на стержень неизвестной силой R_B. В исходной системе сечение В-В не имеет возможности смещаться. Поэтому перемещение торца В-В при совместном действии внешних сил (в нашей задаче – сила F) и неизвестной силы R_B должно быть равно нулю, а неизвестная сила будет равна опорной реакции.

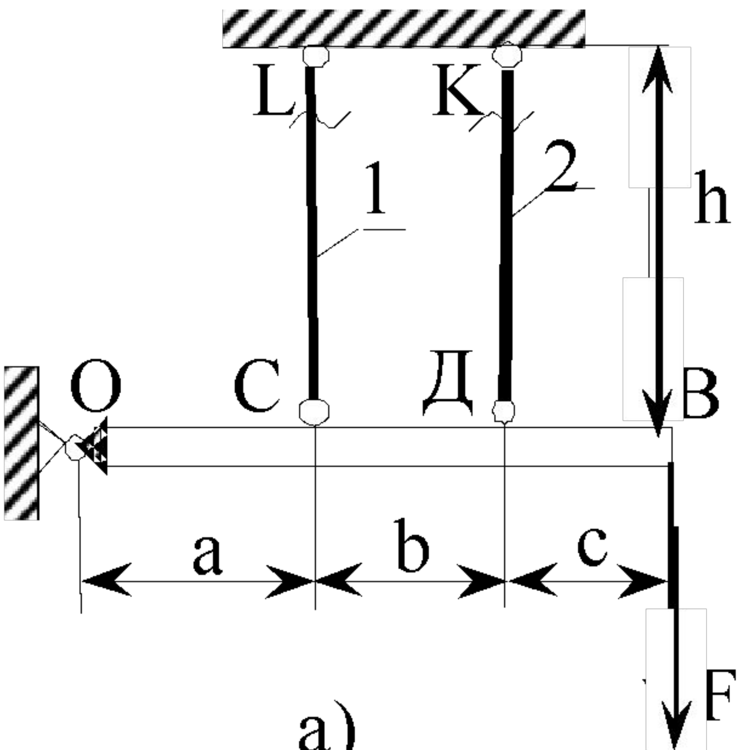
- Запишем выражение для перемещения сечения В-В и приравняем его нулю

$$-\frac{R_{B} l_2}{E_2 A_2}-\frac{R_B l_1}{E_1 A_1}+\frac{F l_1}{E_2 A_1}=0$$

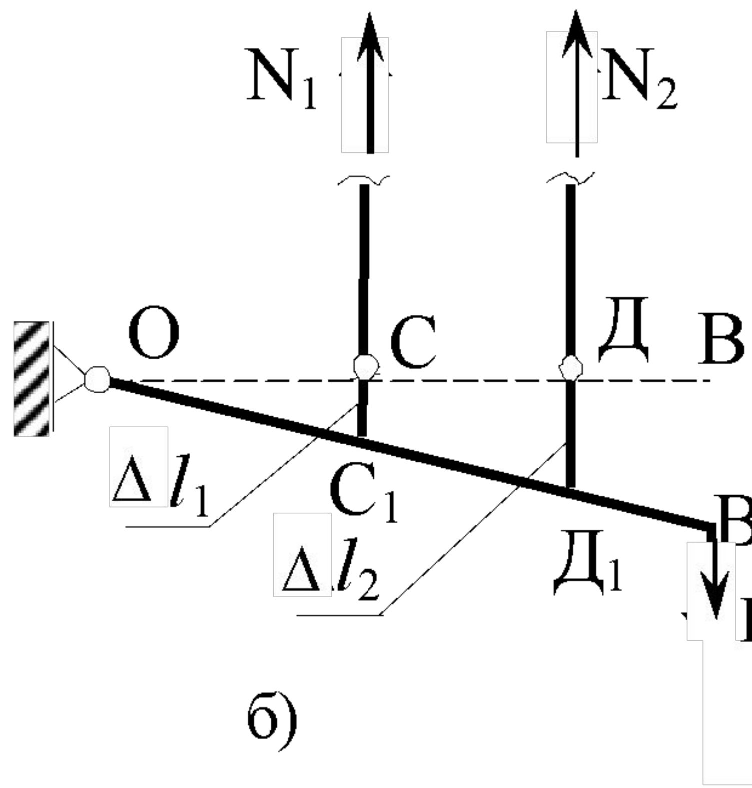
$$R_B=\frac{F}{\left(\frac{E_1 A_1}{E_2 A_2}\right)\cdot\left(\frac{l_2}{l_1}\right)+1}$$

- Используя найденное значение R_B, легко определить продольные силы в сечениях стержня по методу сечений, как для статически определимой задачи.
- Данный метод раскрытия статической неопределимости, называется методом сравнения деформаций, используется для решения **один раз** статически неопределимых систем.

- Пример 1
- Абсолютно жесткий брус ОВ поддерживается двумя тягами 1 и 2 . F = 10 кН; h = 2 м; жесткость первой тяги 2EA; второй – EA; a = 1 м, b = 2 м, c = 3 м. Определить усилия в тягах.



а)



б)

- При действии внешних сил на рассматриваемую стержневую систему возникает четыре опорные реакции: две в шарнире O и по одной в шарнирах L и K. Для определения опорных реакций имеем три независимых уравнения статики, то есть система **один** раз статически неопределима.
- *При нагружении жесткий брус OB будет поворачиваться по часовой стрелке вокруг точки O и займет положение OB_1. Стержни 1 и 2 будут растягиваться. Отсечем тяги от верхних опор*
- Составим уравнение равновесия:
- $\Sigma M_O = 0; \quad N_1 \cdot a + N_2(a + b) - F(a + b + c) = 0.$ (1)
- *Из этого уравнения нельзя определить два неизвестных внутренних усилия N_1 и N_2.*
- Составим дополнительное уравнение, (уравнение совместимости деформаций).

- Ввиду малости деформаций можно считать, что точки C и D при нагружении будут перемещаться перпендикулярно линии OB, а удлинения стержней будут равны: $\Delta l_1 = CC_1$ и $\Delta l_2 = DD_1$
- Из подобия треугольников OCC_1 и ODD_1 следует:

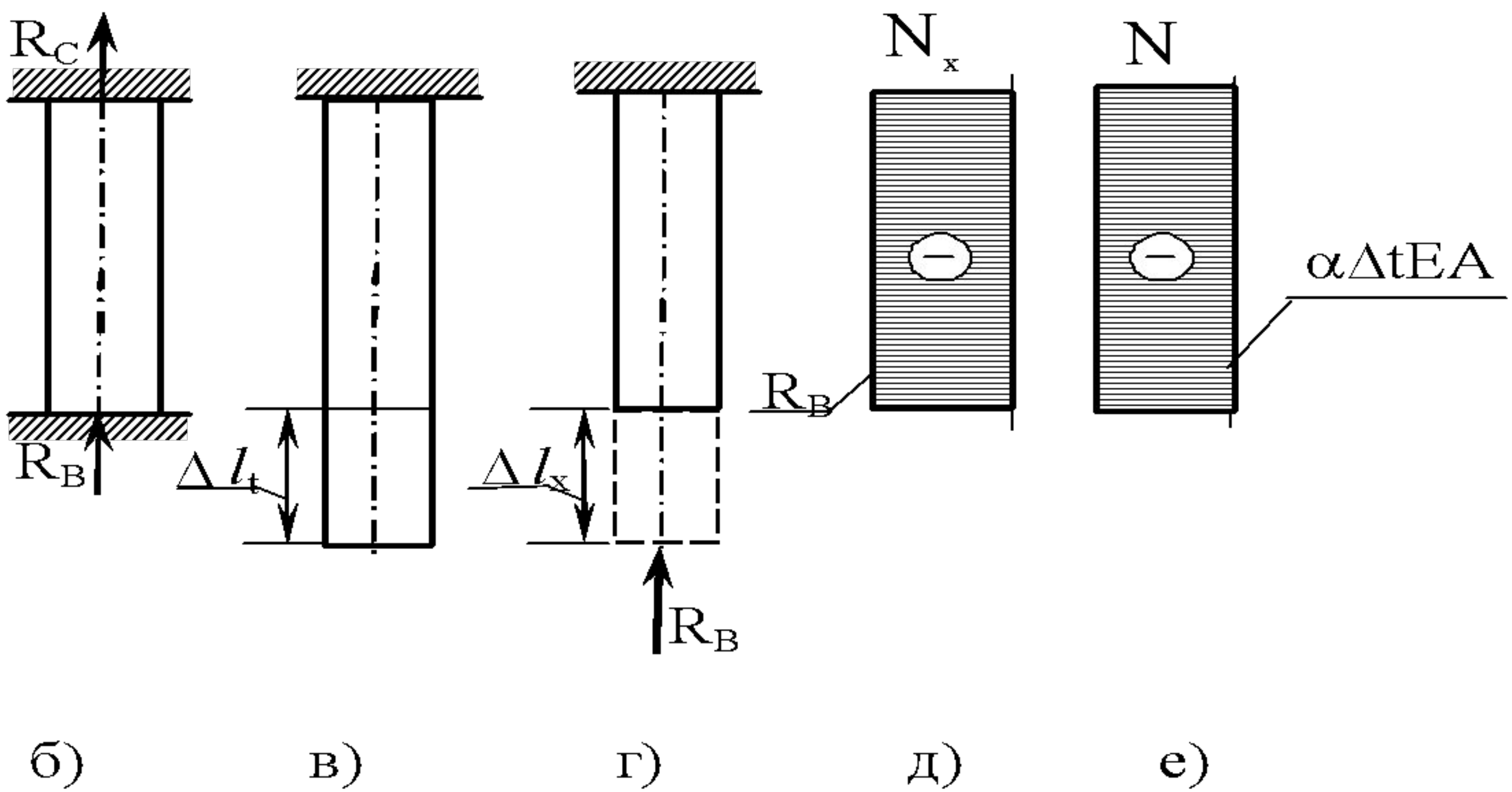
$$\frac{\Delta l_1}{a} = \frac{\Delta l_2}{a+b}$$

- Или

$$\frac{N_1 \cdot h}{2EA \cdot a} = \frac{N_2 \cdot h}{EA(a+b)} \qquad (2)$$

- Решая совместно (1) и (2) получаем усилия в стержнях $N_1 = 10{,}9$ кН , $N_2 = 16{,}35$ кН.

- Пример 2
- Определить продольное усилие в стержне, при его нагреве на Δt



- Для заданной стержневой системы можно записать одно уравнение статики – равенство нулю проекций всех сил на ось стержня
- $$R_C + R_B = 0 \,.$$
- Из одного уравнения нельзя определить две опорные реакции.
- Отбросим нижнее защемление (рис. в). Стержень стал статически определимым и удлинился при нагреве на

$$\Delta l_t = \alpha_t \cdot l \cdot \Delta t$$

- Для восстановления первоначального размера l прикладываем пока неизвестную силу R_B (рис. г)
- Изменение длины от силы R_B с учетом эпюры N_x (рис. д) равно

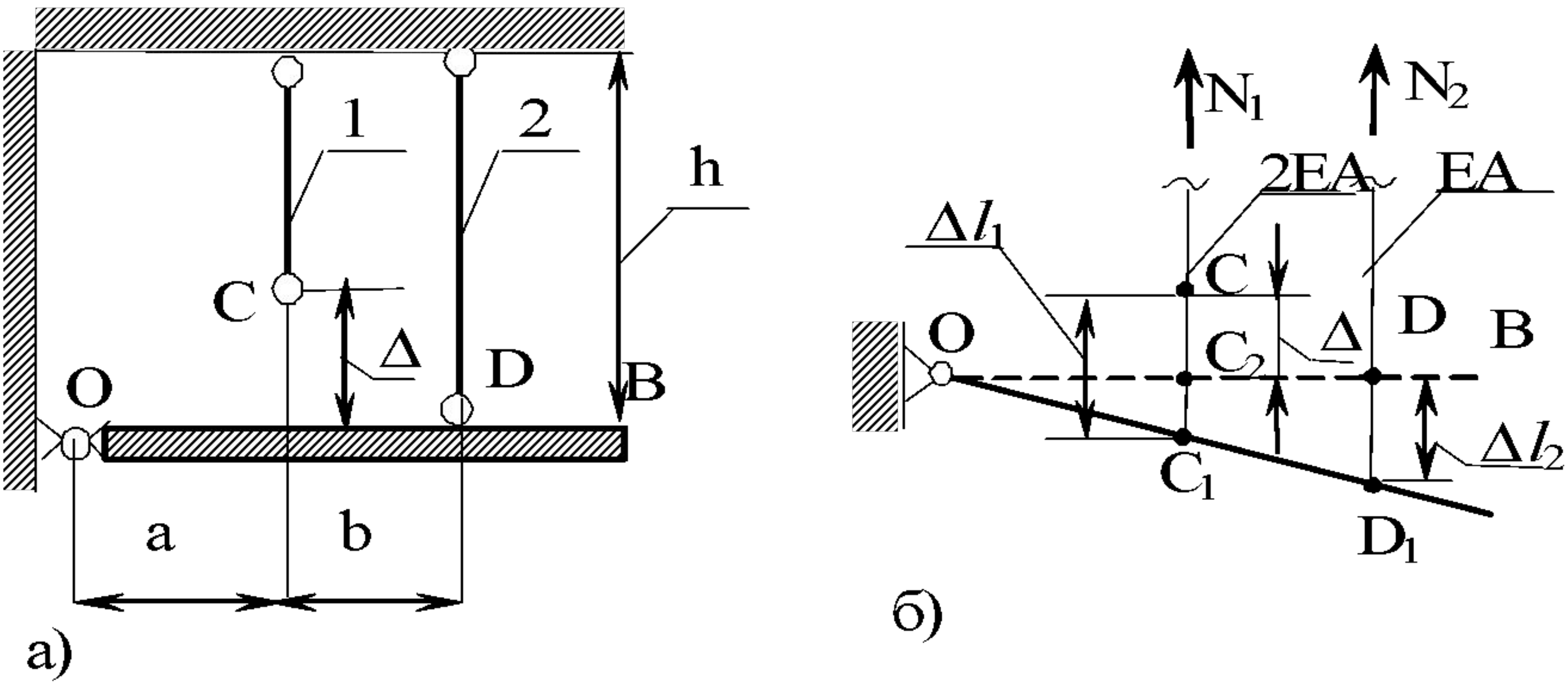
$$\Delta l_x = \frac{-R_B l}{EA}$$

- Должно выполняться условие совместности деформаций:
    - $\Delta l_t + \Delta l_x = 0$,
- Или

$$\alpha_t l \Delta t + \frac{-R_в \cdot l}{EA} = 0$$

$$R_в = \alpha_t \cdot \Delta t EA$$

- Пример 3
- Пусть при изготовлении стержней 1 и 2 стержневой системы, (рис. а), стержень 1 был изготовлен короче на Δ м (Δ<<h). Требуется определить усилия в стержнях 1 и 2, возникающие при монтаже системы.



- После монтажа система представляет собой единое целое. Рассечем стержни 1 и 2 (и рассмотрим равновесие бруса ОВ (рис. б):
  - $M_o = 0; \quad N_1 \cdot a + N_2 (a + b) = 0 \quad (1)$
- Из подобия треугольников OC_2C_1 и ODD_1 следует:

$$\frac{\Delta l_1 - \Delta}{a} = \frac{\Delta l_2}{\mathrm{a} + \mathrm{b}}$$

- или

$$\left(\frac{N_1 \cdot h}{2EA} - \Delta\right)(a + \mathrm{b}) = \frac{N_2 \cdot h}{EA} \cdot a \qquad (2)$$

- Решая совместно уравнения (1) и (2), определяем продольные усилия в стержнях: $N_1 = 0{,}008\ EA$, $N_2 = -0{,}0027EA$. Знак «-» в выражении для N_2 указывает, что стержень ОВ после сборки повернется против часовой стрелки.