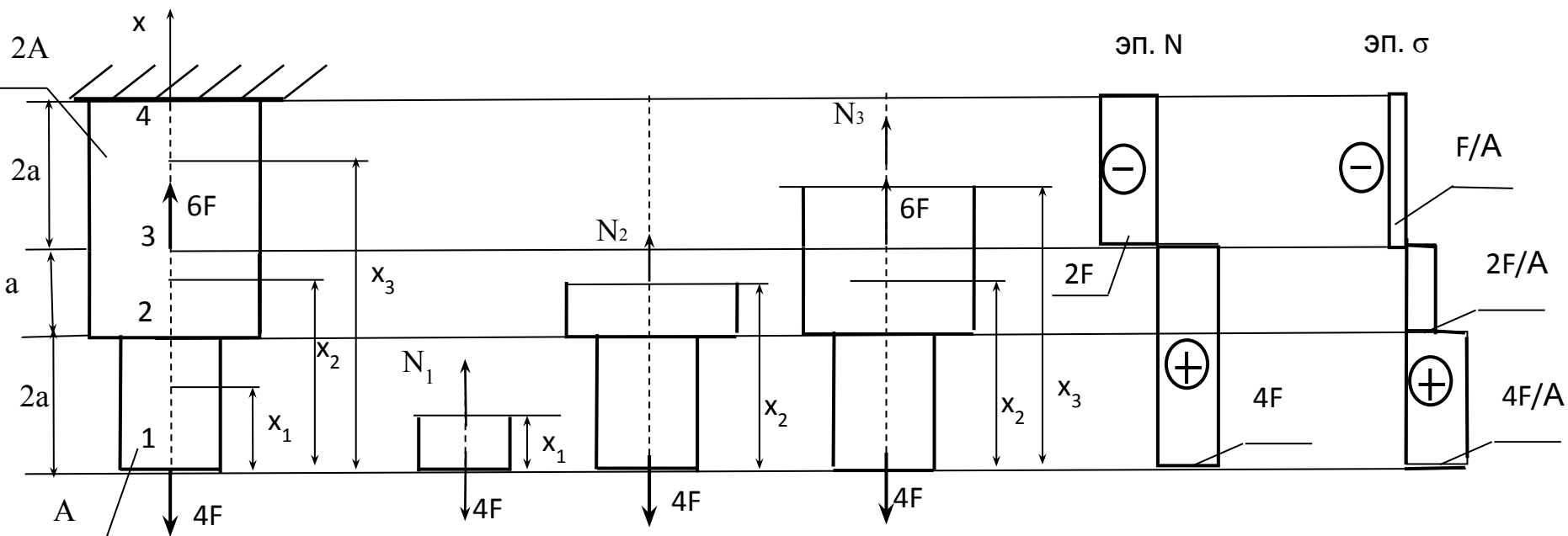


Растяжение и сжатие

Определение нормальных усилий и напряжений. Построение эпюр

- Растяжение (сжатие) стержня это такой вид сопротивления, когда в любом поперечном сечении стержня от действия внешней нагрузки возникает только один вид внутренних усилий - продольное усилие.

- Рассмотрим двухступенчатый стержень, нагруженный системой сил



- Для определения внутренних усилий (продольных сил) применим метод сечений
- Разобьём стержень на участки, границами участков будут места приложения внешних сил и места изменения сечений
- Участок 1-2 , $0 \leq x_1 \leq 2a$
- Рассечем стержень на участке 1-2 сечением x_1 , отбросим верхнюю часть и рассмотрим равновесие нижней части. Воздействие верхней части на нижнюю заменим силой N_1 , направив её от сечения, т.е. в положительном направлении. Проектируя все силы, действующие на нижнюю часть, на ось x , и приравнявая сумму проекций нулю, получим

$$N_1 - 4F = 0,$$

- или

$$N_1 = 4F,$$

- т.е. продольная сила на данном участке – растягивающая.
- Напряжение на участке составит

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{A} = \frac{4F}{A}$$

- Участок 2-3 , $2a \leq x_1 \leq 3a$
- *Рассечем стержень на участке 2-3 сечением x_2 ,
Аналогично участку 1-2 получим*
- $$N_2 - 4F = 0,$$
- или
$$N_2 = 4F,$$
- *Напряжение на участке составит*

$$\sigma_2 = \frac{N_2}{2A} = \frac{2F}{A}$$

- Участок 3-4 , $3a \leq x_3 \leq 5a$

- Аналогично получим

- $$N_3 - 4F + 6F = 0,$$

- или

- $$N_3 = -2F,$$

- Напряжение на участке составит

$$\sigma_3 = \frac{N_3}{2A} = \frac{-F}{A}$$

● **Пример**

● Построить эпюру продольного усилия для стержня, если $F = 2$ кН, $q_x = 3$ кН/м, $l_1 = 2$ м, $l_2 = 1$ м

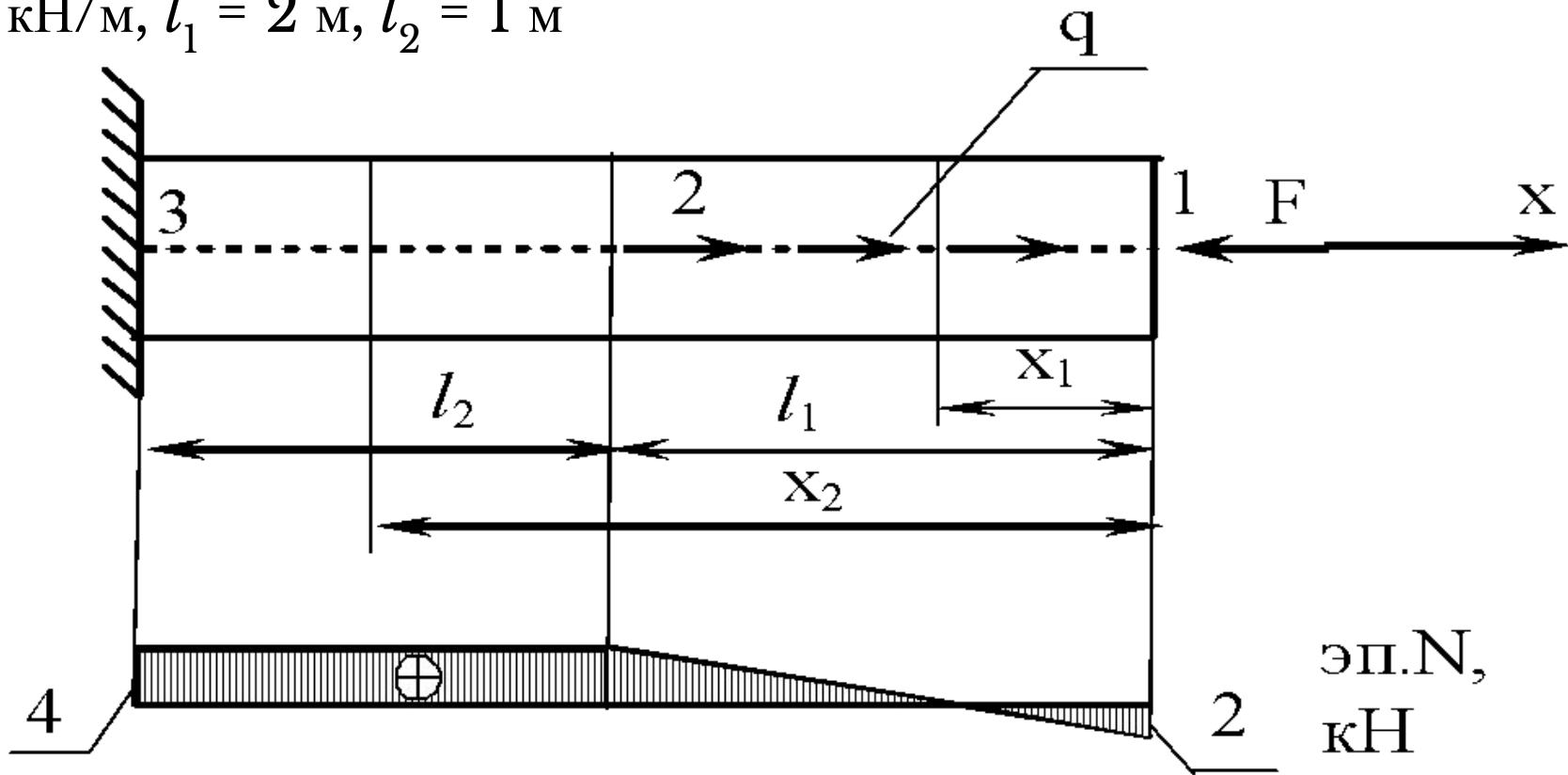
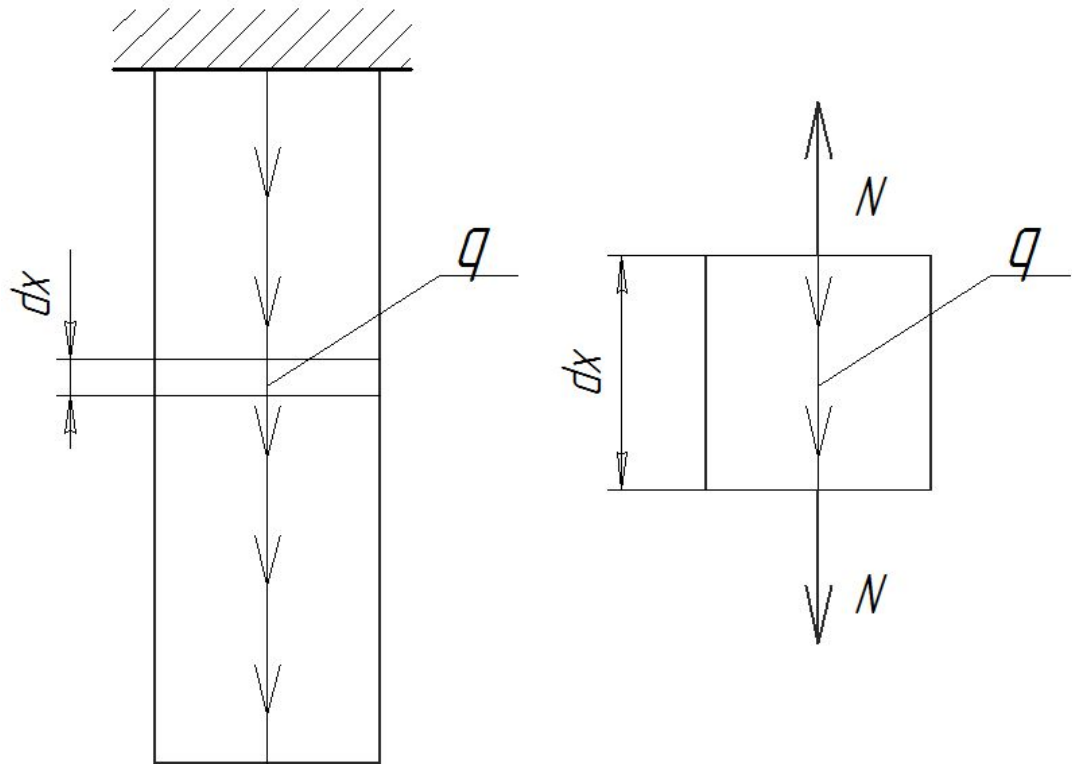


Рис. P1

- Участок 1-2, $0 \leq x_1 \leq l_1$
- $N_1 = qx_1 - F$
- $x_1 = 0, N_1 = -2 \text{ кН}; x_1 = l_1 = 2 \text{ м}, N_1 = 4 \text{ кН}.$
- Участок 2-3, $l_2 \leq x_2 \leq l_1 + l_2$
- $N_2 = ql_1 - F = 4 \text{ кН}$

Дифференциальная зависимость между q и N



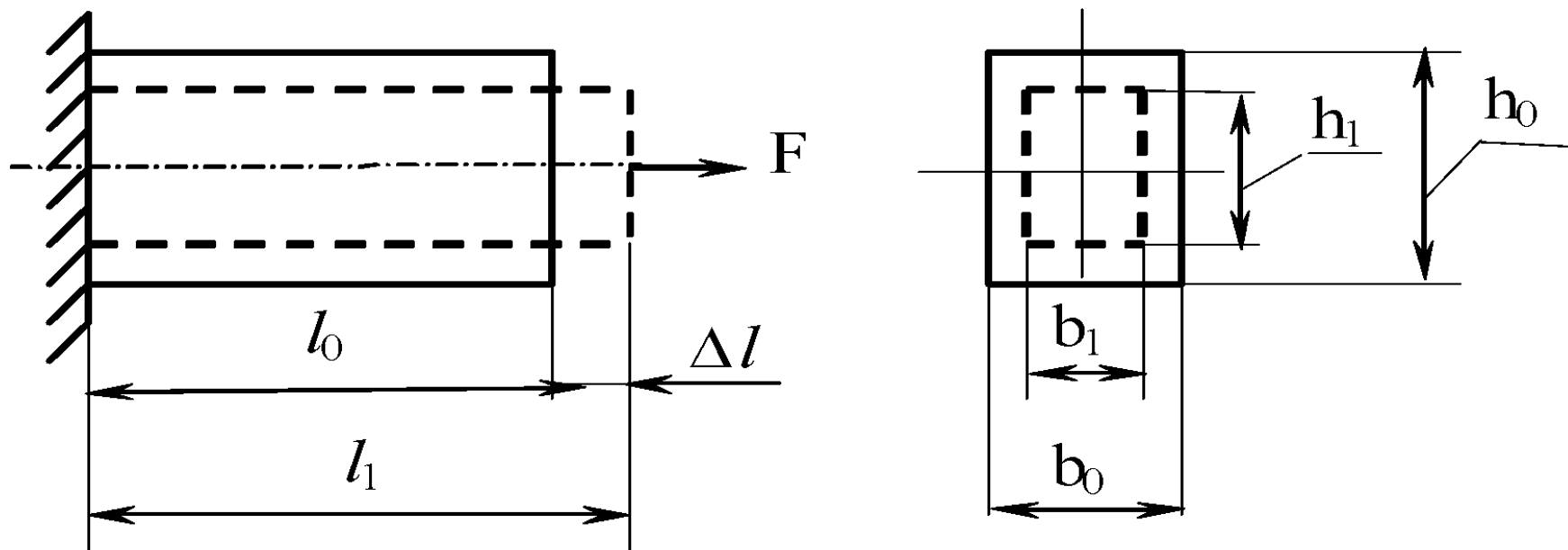
$$\sum X = N + qdx - N - dN = 0$$

$$q = \frac{dN}{dx} \quad (1)$$

Свойства эпюр N

- С учётом выражения (1) можно заключить
- 1. Если в сечении к брусу приложена сосредоточенная сила, то на эпюре N будет «скачок» на величину силы.
- 2. Если на участке приложена осевая распределенная нагрузка постоянной интенсивности, то на эпюре N будет наклонная прямая, причем, тангенс угла наклона прямой к нулевой линии должен быть равен интенсивности нагрузки q .
- 3. Если на участке отсутствуют внешние нагрузки, то продольная сила будет постоянна.

Понятие о деформации при растяжении (сжатии)



- Здесь l_0 , h_0 и b_0 – первоначальные размеры,
- l_1 , h_1 и b_1 – размеры после нагружения.
- $\Delta l = l_1 - l_0$ - абсолютное удлинение стержня

- Относительное удлинение или продольная деформация ε равна

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0} \quad (2)$$

- Поперечные деформации равны

$$\varepsilon'_h = \frac{\Delta h}{h_0},$$

$$\varepsilon'_b = \frac{\Delta b}{b_0}.$$

- Для изотропных материалов

$$\varepsilon'_h = \varepsilon'_b = \varepsilon'.$$

- Экспериментально установлено, что при малых деформациях

$$\varepsilon = -\nu\varepsilon',$$

- где ν – коэффициент Пуассона
- Или

$$\nu = \left| \frac{\varepsilon'}{\varepsilon} \right|.$$

- Для различных материалов коэффициент Пуассона лежит в пределах $0 \leq \nu \leq 0,5$. Для стали $\nu = 0,25 - 0,33$. Для цветных сплавов $\nu = 0,31 - 0,42$.

Связь между напряжениями и деформациями при растяжении (сжатии)

$$\bullet \sigma = E\varepsilon,$$

- где E – модуль продольной упругости I рода (или просто модуль упругости).
- Модуль упругости E как и коэффициент Пуассона является механической характеристикой материала и определяется экспериментально. Размерность E такая же, как и σ , т.е. Н/м^2 (Па).
- Для стали $E = (2,0 - 2,1) \cdot 10^5 \text{ МПа}$,
- для медных сплавов $E = (1,0 - 1,2) \cdot 10^5 \text{ МПа}$,
- для алюминиево-магниевого сплава $E = (0,7 - 0,8) \cdot 10^5 \text{ МПа}$,
- для дерева (вдоль волокон) $E = (0,08 - 0,12) \cdot 10^5 \text{ МПа}$.

Перемещения при растяжении (сжатии) стержня

- Из (2) можно получить

$$\Delta l = \frac{N \cdot l}{EA}.$$

- Для стержня с переменной по длине продольной силой и изменяемым поперечным сечением изменение длины равно

$$\Delta l = \int_0^l \frac{N(x) dx}{EA(x)}.$$

- Если стержень можно представить в виде совокупности y участков с длиной l_i , с постоянным поперечным сечением A_i и постоянной продольной силой N_i , то

$$\Delta l = \sum_{i=1}^y \frac{N_i l_i}{EA_i} = \sum_{i=1}^y \frac{\Omega_{N_i}}{EA_i},$$

- где Ω_{N_i} – площадь эпюры N на i участке

- **Пример**

- Определить изменение длины стального стержня, изображенного на рисунке. Площадь поперечного сечения стержня $A=2 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2$, модуль упругости материала $E=2 \cdot 10^{11} \text{ Па}$.
- Изменение длины всего стержня равно алгебраической сумме изменений длин двух участков - $\Delta l = \Delta l_1 + \Delta l_2$.

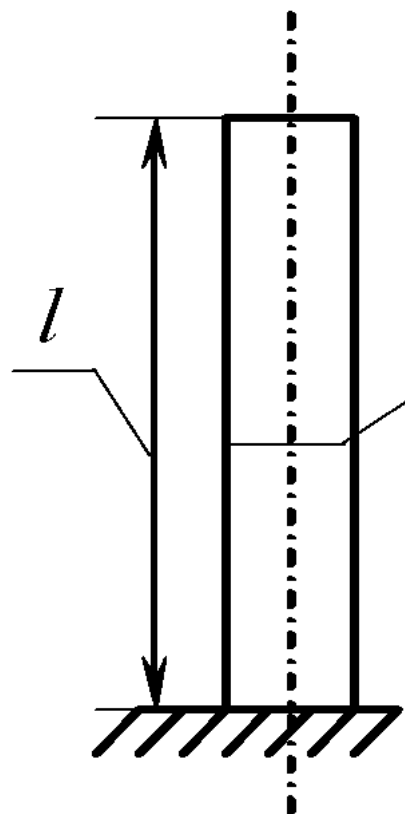
$$\Delta l_1 = \frac{N_{1\text{cp}} \cdot l_1}{EA},$$

- где N_{cp} – среднее значение продольной силы, равное алгебраической полусумме значений N на концах участка

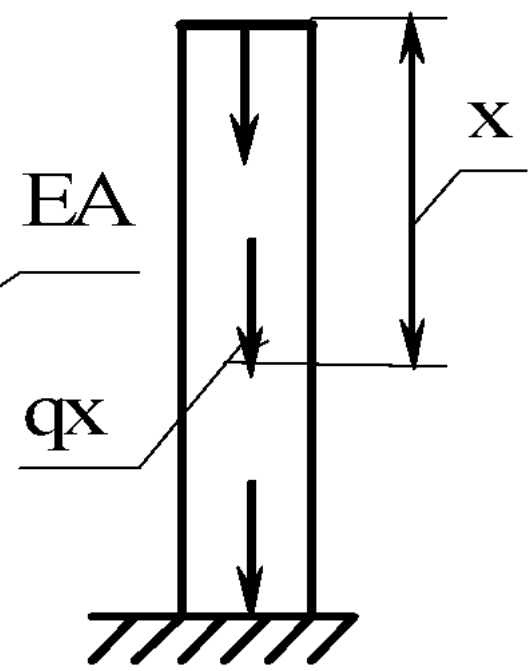
$$\Delta l_2 = \frac{N_2 l_2}{EA}$$

$$\Delta l = \frac{N_{1cp} l_1}{EA} + \frac{N_2 l_2}{EA} = \frac{4 + (-2) \cdot 10^3 \cdot 2}{2 \cdot 10^{11} \cdot 2 \cdot 10^{-3}} + \frac{4 \cdot 10^3 \cdot 1}{2 \cdot 10^{11} \cdot 2 \cdot 10^{-3}} = 2 \cdot 10^{-5} \text{ м.}$$

- Определить перемещение свободного конца призматического стержня, находящегося под действием собственного веса. Длина стержня l , площадь поперечного сечения A , удельный вес материала γ , модуль упругости материала стержня E . Построить эпюру нормальных напряжений.
- Стержень можно рассматривать как находящийся под действием продольной распределенной нагрузки q_x , равной весу единицы длины **стержня**:
$$q_x = \gamma \cdot A \cdot l$$

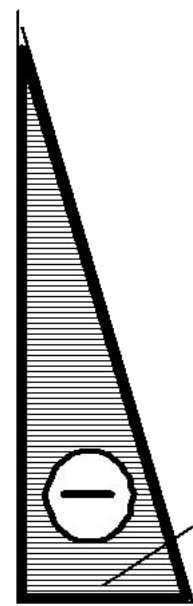


a)



б)

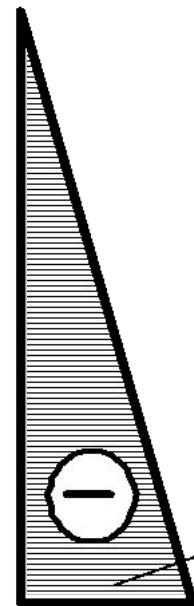
N



$\gamma A l$

B)

σ



γl

Г)

- $N(x) = -\gamma Ax$.
- при $x=0$, $N=0$; при $x=l$, $N = -\gamma Al$.
- Перемещение сечения x

$$\delta_x = \int_x^l \frac{\gamma Ax_1 dx_1}{EA} = \frac{\gamma}{2E} (l^2 - x^2).$$

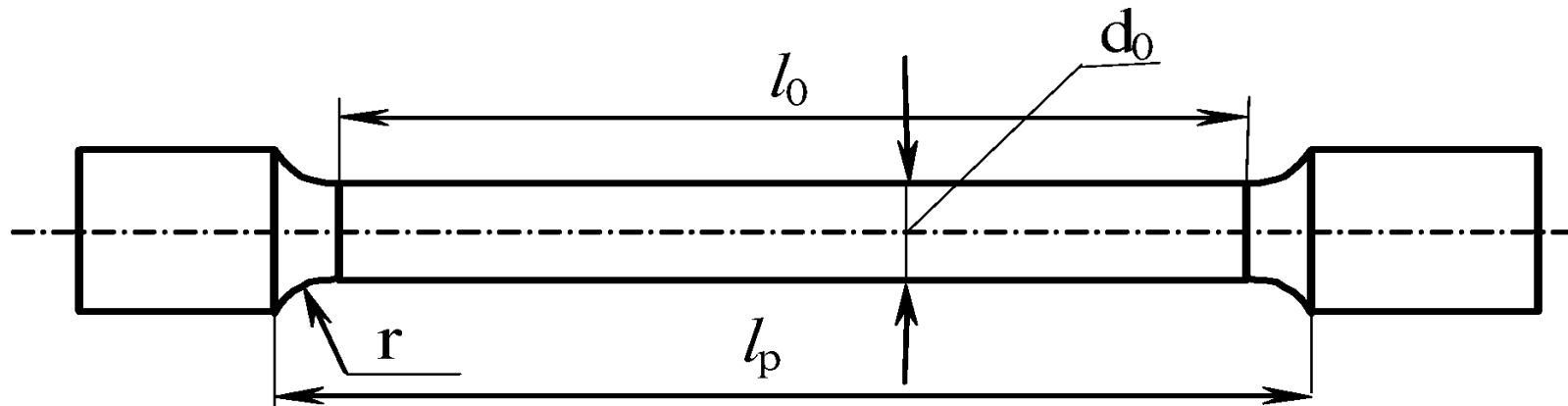
- перемещение свободного конца стержня ($x=0$)

$$\delta = \frac{\gamma l^2}{2E}.$$

- Нормальные напряжения изменяются по линейному закону: при $x=0$, $\sigma=0$; при $x=l$, $\sigma = \gamma l$.

Основные механические характеристики конструкционных материалов

- Испытание на растяжение
- Испытания проводятся со специальными образцами круглого, либо прямоугольного сечения



- $l_0 = l - 2r$ - расчетная длина образца, l_p - рабочая длина образца, d_0 - расчетный диаметр образца

- При испытании записывается графическая зависимость между растягивающейся силой F и удлинением образца Δl .

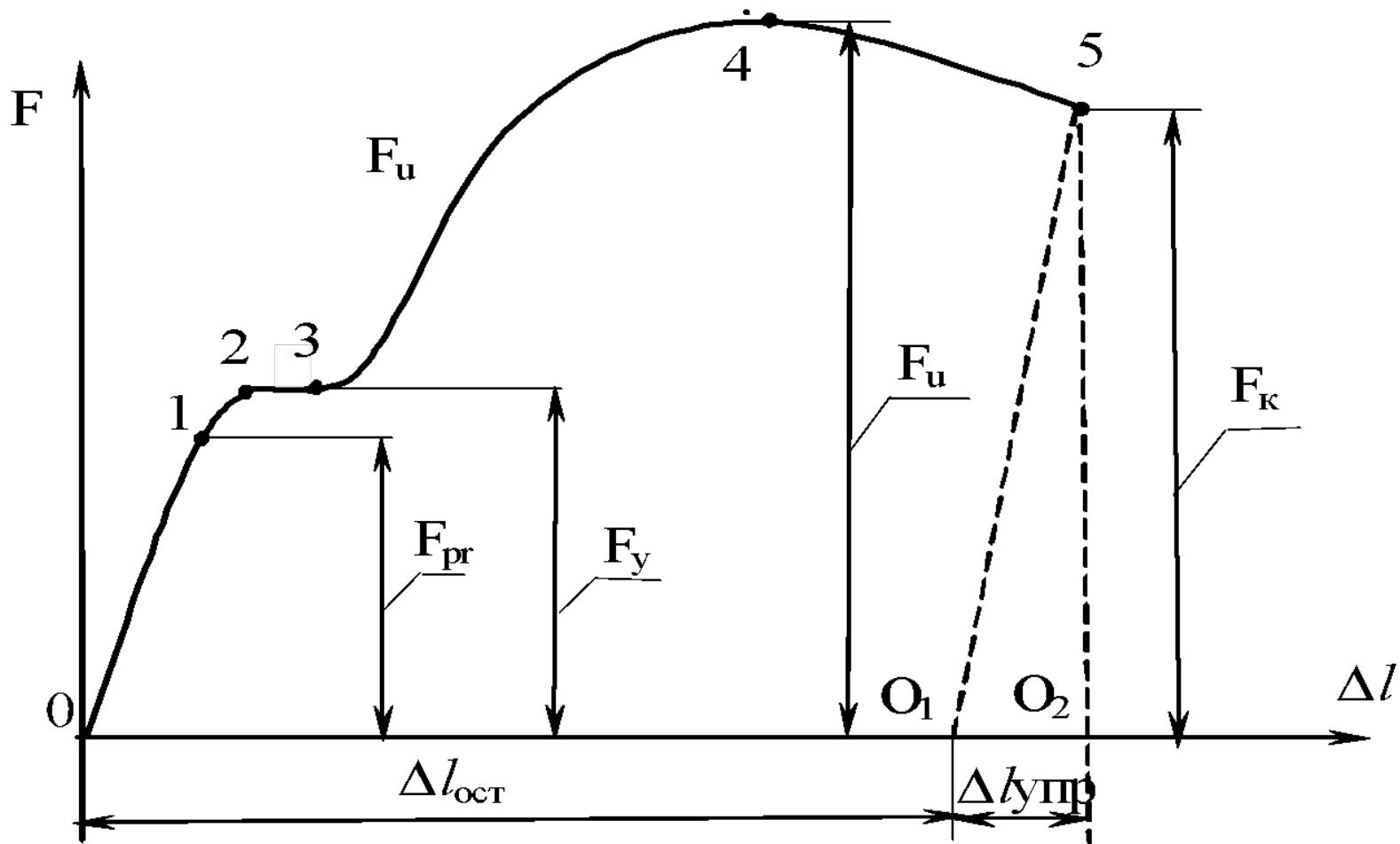
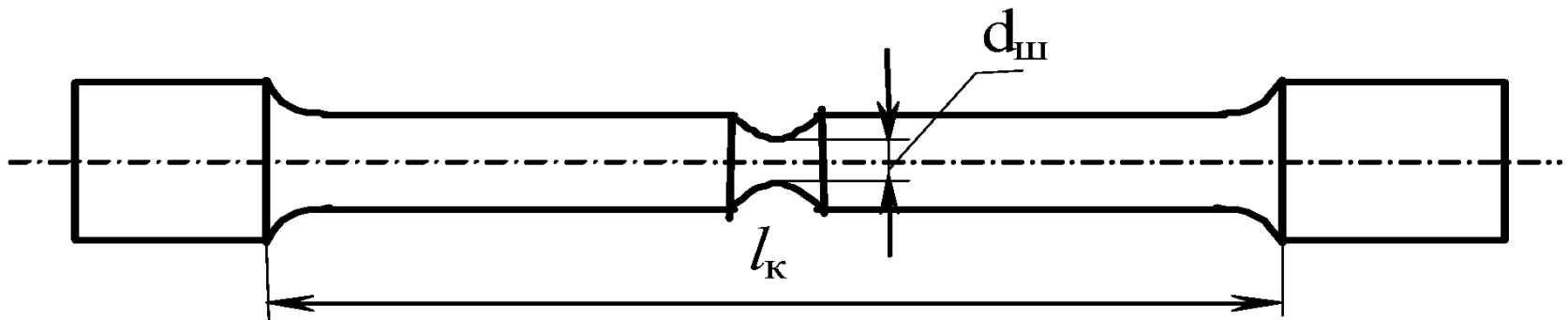


Рис. РИ1

- При достижении нагрузки F_{\max} появляется заметное местное сужение образца (образуется шейка).



- На участке 0 - 1 удлинения растут пропорционально растягивающей силе, согласно закону Гука. Сила, соответствующая точке 1, обозначается F_{pr} . При дальнейшем увеличении растягивающей силы прямолинейная зависимость между F и Δl нарушается. В точке 2 диаграммы наступает явление текучести металла. На диаграмме растяжения получается горизонтальный или близкий к нему участок 2 - 3 (площадка текучести). Для участка 2 - 3 характерен рост деформации без заметного увеличения нагрузки. Нагрузка, соответствующая площадке текучести 2 - 3, обозначается через F_y .
- Далее, при увеличении силы сверх F_y , происходит упрочнение металла. Участок 3 - 4 называется участком упрочнения, а сила, соответствующая точке 4, обозначается F_u (F_{max})
- Участку 4 - 5 соответствует быстрое уменьшение сечения шейки и, как следствие, падает растягивающее усилие. Образец разрушается по наименьшему сечению шейки. Усилие, соответствующее моменту разрыва (точка 5), обозначается F_k .

- Для удобства изучения механических характеристик диаграмму растяжения часто перестраивают в системе координат

$\sigma - \varepsilon$,

- где $\sigma = \frac{F}{A_0}$ - нормальное напряжение в

- поперечном сечении образца,

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0}$$

- относительное удлинение образца

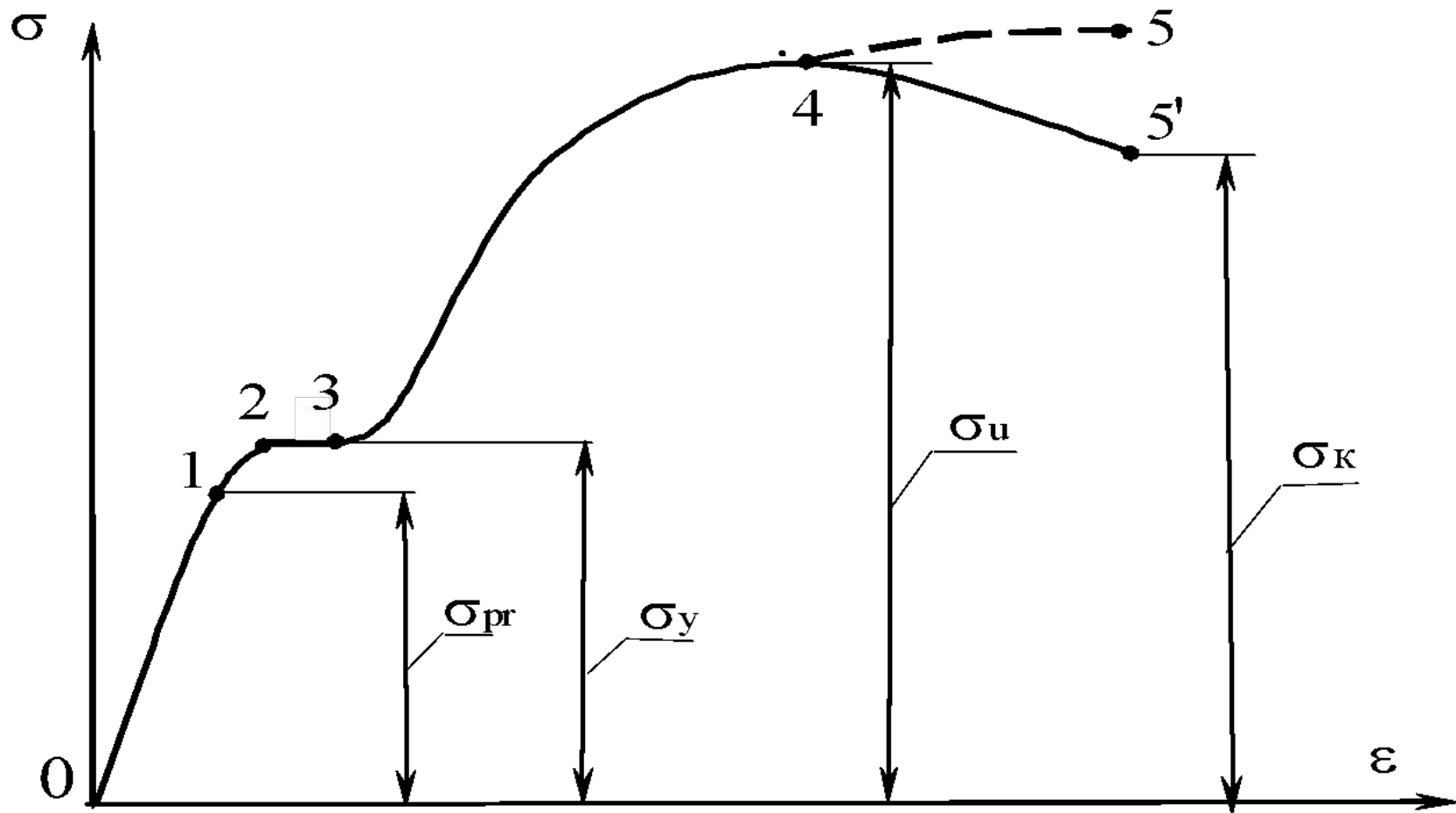


Рис. РИ2

- *характерные точки диаграммы :*
- предел пропорциональности $\sigma_{pr} = F_{pr}/A_0$ (для стали Ст3 $\sigma_{pr} \approx 210 \text{ МПа}$),
- предел текучести $\sigma_y = F_y/A_0$, (для стали Ст3 $\sigma_y \approx 240 \text{ МПа}$),
- предел прочности (временное сопротивление) $\sigma_u = F_u/A_0$ (для стали Ст3 $\sigma_u \approx 400 \text{ МПа}$).
- Величины σ_u и σ_y называются характеристиками прочности материала.

- *Разрыв образца происходит по наименьшему сечению шейки. Поэтому при определении напряжения разрушения σ_p (точка 5) разрушающую нагрузку F_k можно отнести к площади шейки $A_{ш}$ или к первоначальной площади сечения образца A_0 . В первом случае диаграмма 0-1-2-3-4-5 называется истинной, во втором случае – условной (0-1-2-3-4-5').*

- После разрушения образца разгрузка идет по прямой линии $5-O_1$, параллельной участку пропорциональности (рисунок РИ1). Отрезок $O-O_1$ - это остаточное удлинение образца $\Delta l_{ост}$, равное
 - $\Delta l_{ост} = l_k - l_0$.
- Отрезок O_1-O_2 - “исчезающая” при разгрузке упругая составляющая удлинения образца.

- **Характеристика пластичности материала**
Относительное остаточное удлинение при разрыве.

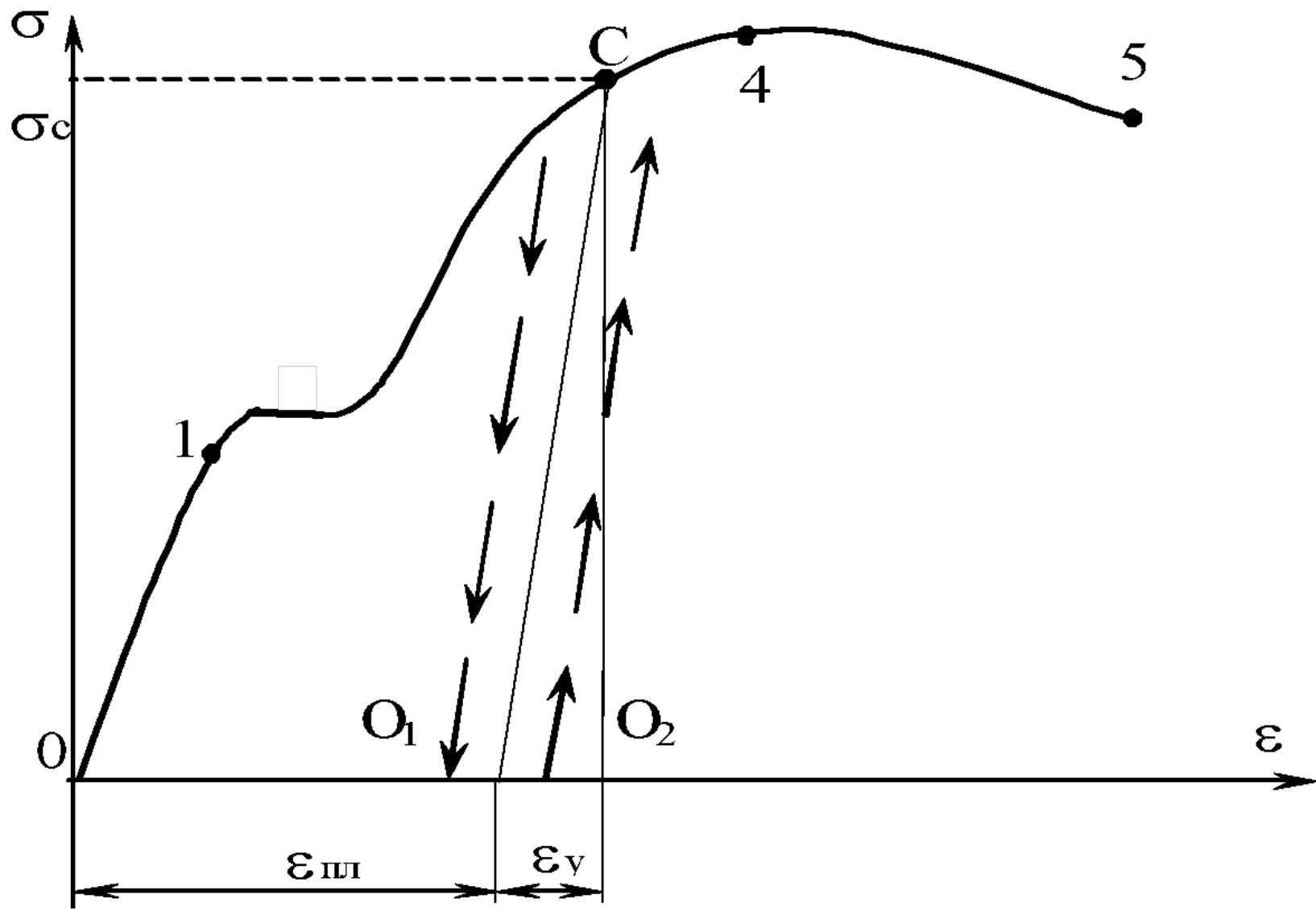
$$\delta = \frac{l_k - l_0}{l_0} \cdot 100\%$$

- Чем больше δ , тем пластичнее материал. Для конструкционных сталей $\delta=(16-27)\%$.
- Относительное сужение сечения шейки после разрыва

$$\psi = \frac{A_0 - A_{ш}}{A_0} \cdot 100\%$$

- Величина ψ может достигать для сталей величины 55% и более.

- Если образец нагружать до напряжения, соответствующего пределу пропорциональности, а потом, остановив машину, начать процесс разгрузки, то деформация будет уменьшаться по тому же закону, по которому увеличивались при нагружении. При нагрузке образца выше предела пропорциональности (например, до σ_c) деформации при разгрузке будут уменьшаться параллельно участку пропорциональности 0-1 (Рис. РИ.3)

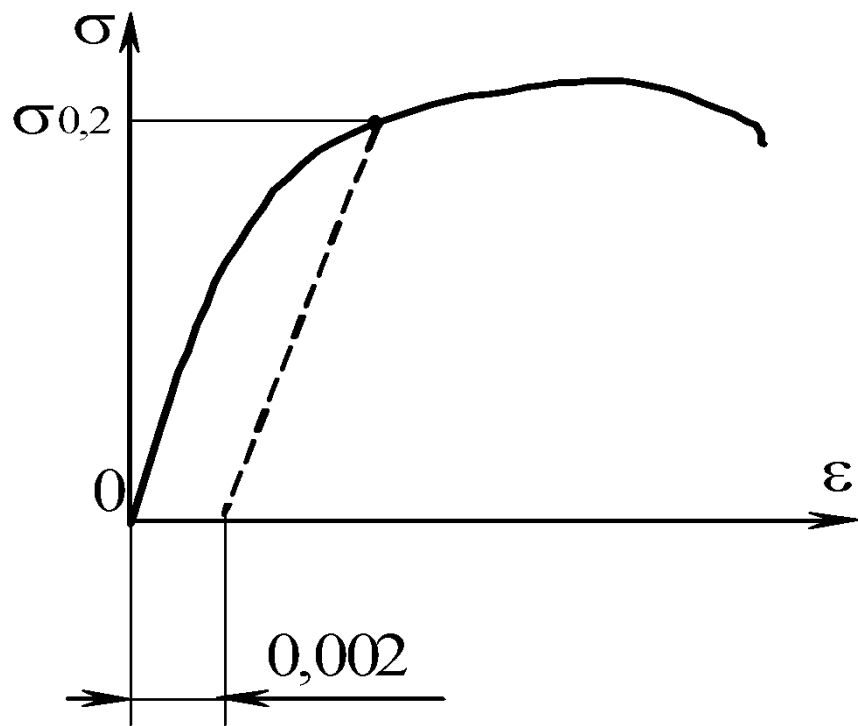


- Деформация, соответствующая любой точке диаграммы (правее точки 1) будет состоять из упругой ε_y и пластической составляющей ε_y

- $\varepsilon = \varepsilon_y + \varepsilon_y$

- При разгрузке образца упругая деформация исчезает, а остаточная деформация будет равна пластической составляющей. При повторном нагружении диаграмма деформирования будет сначала совпадать с прямой О-С, а затем с кривой С - 4 - 5 . Таким образом, при повторном нагружении образца повышается предел пропорциональности .
- Явление повышения предела пропорциональности при предварительном нагружении выше предела текучести называется наклепом (упрочнением). *Наклеп используется в технике для повышения эксплуатационной надежности деталей и для уменьшения деформации в процессе эксплуатации*

- высокопрочные среднеуглеродистые стали, высокопрочные сплавы не имеют на диаграмме напряжений текучести. Для них вводится характеристика пластичности - условный предел текучести- $\sigma_{0,2}$ - это напряжение, при котором остаточная деформация образца достигает величины 0,02 (0,2%)



- **Испытание на сжатие**

- Испытание на сжатие проводится на цилиндрических образцах

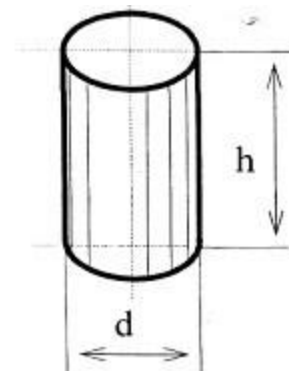
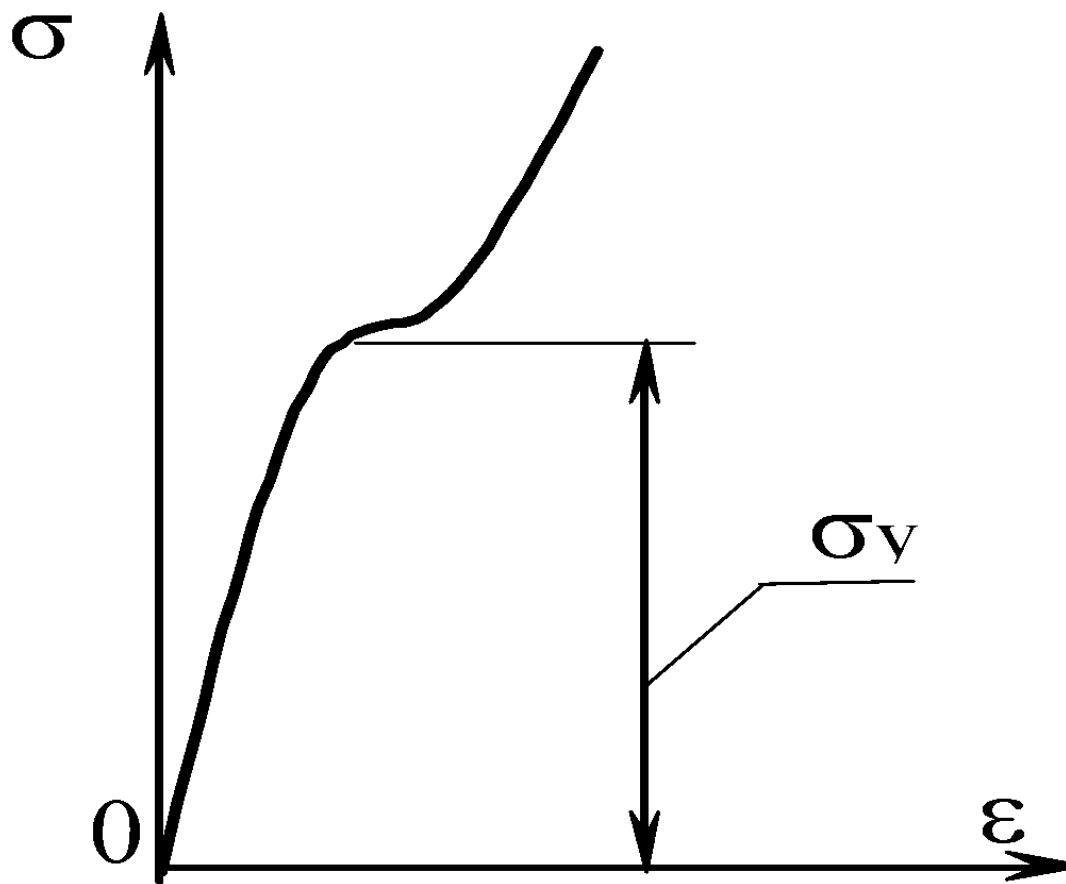
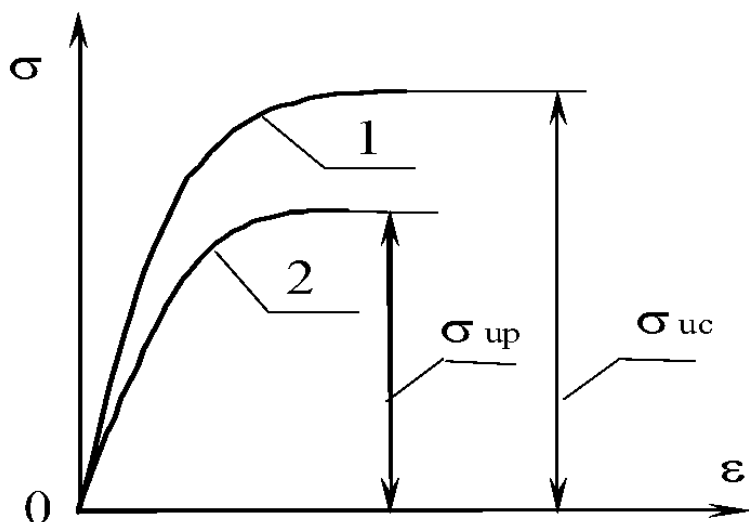
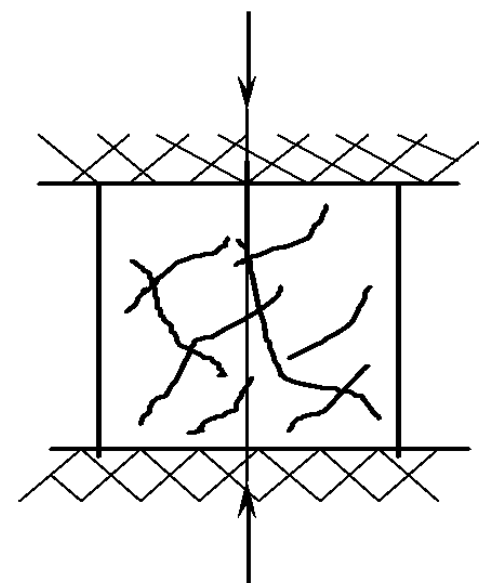


Диаграмма напряжений для малоуглеродистой стали



Диаграммы напряжений
чугуна:
при сжатии (1) и при
растяжении (2).



Характер разрушения
хрупкого образца при
сжатии

Расчёты на прочность при растяжении (сжатии)

- Условие прочности

$$\bullet \sigma \leq \gamma_c R$$

- где γ_c – коэффициент условий работы.
- Проверочный расчёт

$$\sigma = \frac{N}{A} \leq R$$

- Проектировочный расчёт

$$A = \frac{N}{R}$$

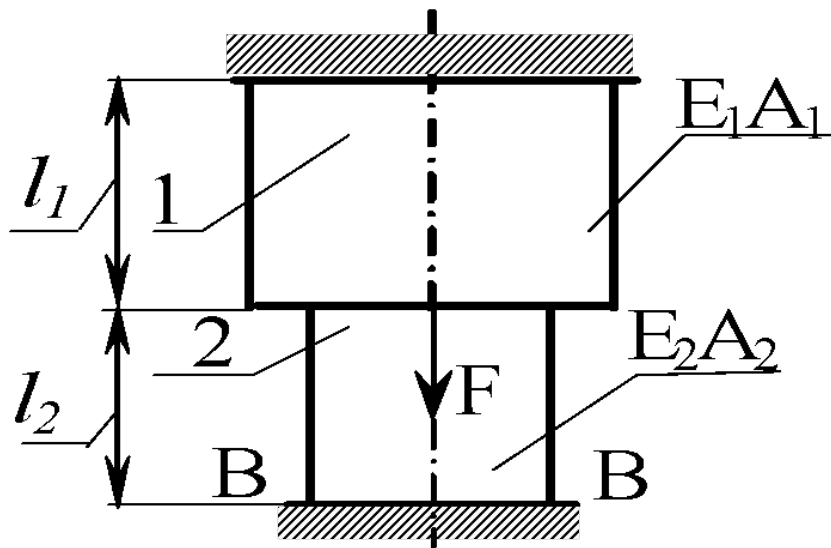
- Расчёт на определение допускаемых нагрузок

$$N \leq RA$$

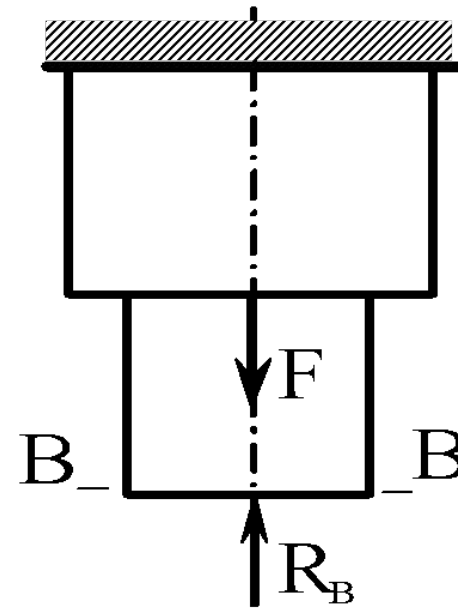
Статически неопределимые стержневые системы при растяжении и сжатии

- Стержневые системы, внутренние усилия в которых не могут быть определены только из условий равновесия стержневой системы как твердого тела., называют статически неопределимыми.
- *В статически неопределимых стержневых системах, в отличие от статически определимых стержневых систем, внутренние усилия возникают не только под действием внешних усилий, но и при изменении температуры всей системы, либо отдельных стержней, а так же при осадке (смещении) опор и наличии зазоров в соединяемых узлах (монтажные усилия).*
- Для определения внутренних усилий в статических неопределимых стержневых системах, наряду с уравнениями равновесия стержневой системы как твердого тела, составляются дополнительные уравнения – условия совместности деформаций.

Раскрытие статической неопределимости стержневых систем методом сравнения деформаций



а)



б)

Для определения внутренних усилий в стержне необходимо знать хотя бы одну из двух возникающих в заземлениях опорных реакций. Для определения **двух** реакций можно записать только **одно** уравнение равновесия: равенство нулю суммы проекций всех сил на ось стержня.

- Запишем дополнительное уравнение - условие совместности деформаций.
- Отбросим одно из заземлений, например, нижнее В-В, заменив его действие на стержень неизвестной силой R_B . В исходной системе сечение В-В не имеет возможности смещаться. Поэтому перемещение торца В-В при совместном действии внешних сил (в нашей задаче – сила F) и неизвестной силы R_B должно быть равно нулю, а неизвестная сила будет равна опорной реакции.

- Запишем выражение для перемещения сечения В-В и приравняем его нулю

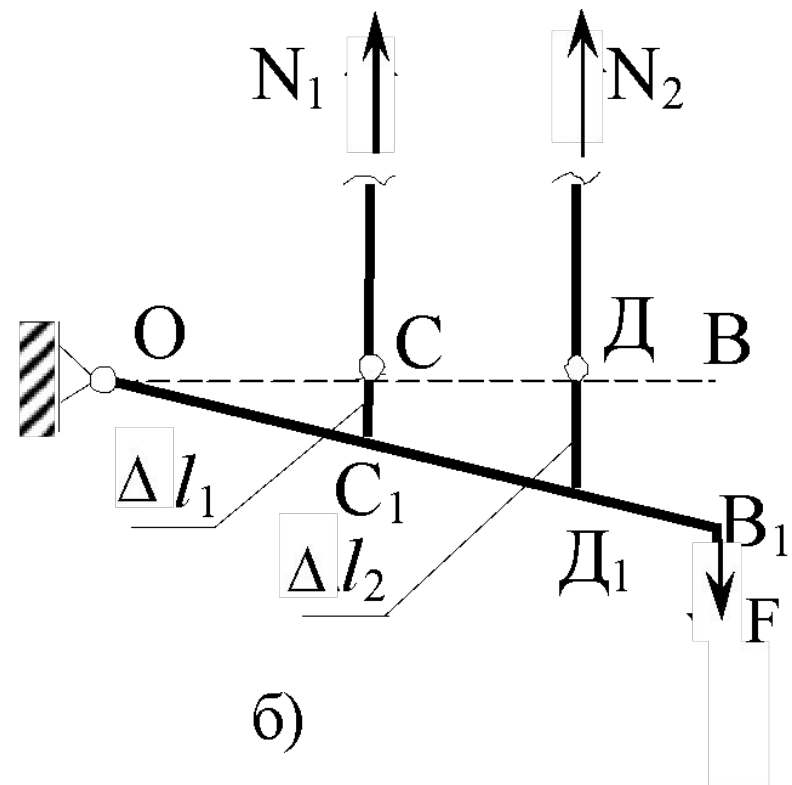
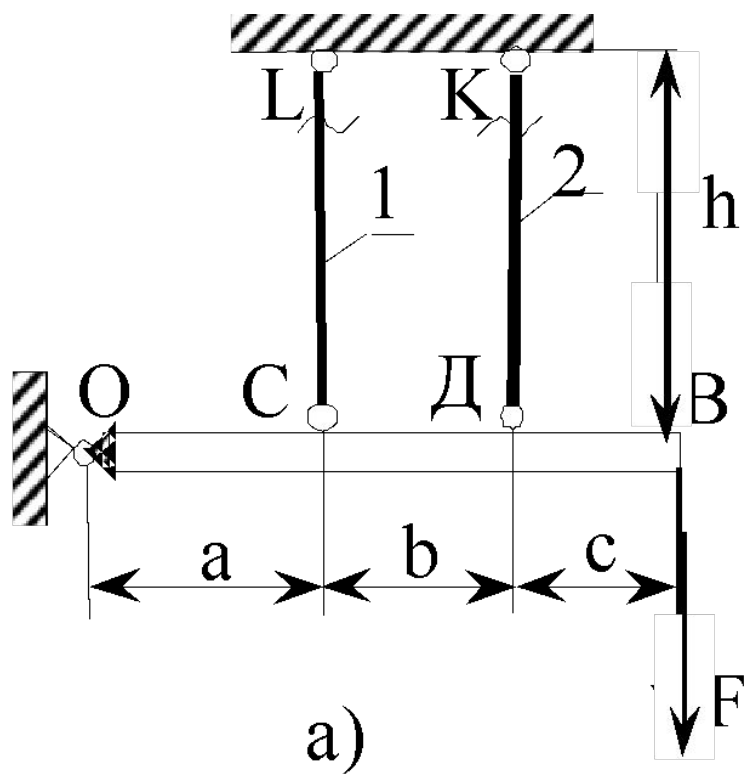
$$-\frac{R_B l_2}{E_2 A_2} - \frac{R_B l_1}{E_1 A_1} + \frac{F l_1}{E_2 A_1} = 0$$

$$R_B = \frac{F}{\left(\frac{E_1 A_1}{E_2 A_2}\right) \cdot \left(\frac{l_2}{l_1}\right) + 1}$$

- Используя найденное значение R_B , легко определить продольные силы в сечениях стержня по методу сечений, как для статически определимой задачи.
- Данный метод раскрытия статической неопределимости, называется методом сравнения деформаций, используется для решения **один раз** статически неопределимых систем.

- Пример 1

- Абсолютно жесткий брус $ОВ$ поддерживается двумя тягами 1 и 2. $F = 10$ кН; $h = 2$ м; жесткость первой тяги $2EA$; второй – EA ; $a = 1$ м, $b = 2$ м, $c = 3$ м. Определить усилия в тягах.



- При действии внешних сил на рассматриваемую стержневую систему возникает четыре опорные реакции: две в шарнире O и по одной в шарнирах L и K . Для определения опорных реакций имеем три независимых уравнения статики, то есть система **один раз статически неопределима**.
- *При нагружении жесткий брус OB будет поворачиваться по часовой стрелке вокруг точки O и займет положение OB_1 . Стержни 1 и 2 будут растягиваться. Отсечем тяги от верхних опор*
- Составим уравнение равновесия:
- $\Sigma M_O = 0; \quad N_1 \cdot a + N_2(a + b) - F(a + b + c) = 0.$
(1)
- *Из этого уравнения нельзя определить два неизвестных внутренних усилия N_1 и N_2 .*
- Составим дополнительное уравнение, (уравнение совместимости деформаций).

- Ввиду малости деформаций можно считать, что точки С и D при нагружении будут перемещаться перпендикулярно линии ОВ, а удлинения стержней будут равны: $\Delta l_1 = CC_1$ и $\Delta l_2 = DD_1$
- Из подобия треугольников OCC_1 и ODD_1 следует:

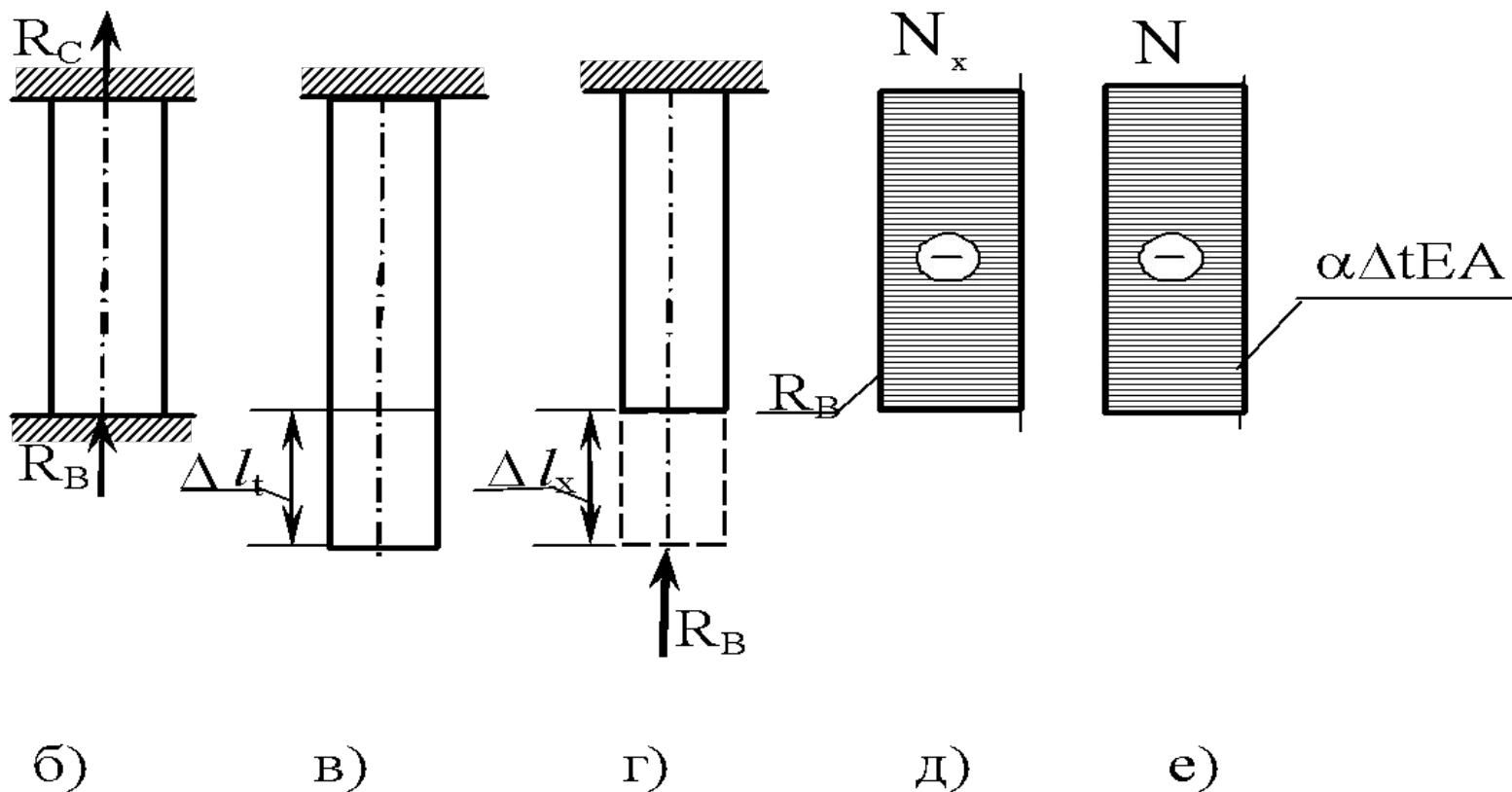
$$\frac{\Delta l_1}{a} = \frac{\Delta l_2}{a + b}$$

- Или

$$\frac{N_1 \cdot h}{2EA \cdot a} = \frac{N_2 \cdot h}{EA(a + b)} \quad (2)$$

- Решая совместно (1) и (2) получаем усилия в стержнях $N_1 = 10,9$ кН, $N_2 = 16,35$ кН.

- Пример 2
- Определить продольное усилие в стержне, при его нагреве на Δt



- Для заданной стержневой системы можно записать одно уравнение статики – равенство нулю проекций всех сил на ось стержня
- $R_C + R_B = 0$.
- Из одного уравнения нельзя определить две опорные реакции.
- Отбросим нижнее защемление (рис. в). Стержень стал статически определимым и удлинился при нагреве на

$$\Delta l_t = \alpha_t \cdot l \cdot \Delta t$$

- Для восстановления первоначального размера l прикладываем пока неизвестную силу R_B (рис. г)
- Изменение длины от силы R_B с учетом эпюры N_x (рис. д) равно

$$\Delta l_x = \frac{-R_B l}{EA}$$

- Должно выполняться условие совместности деформаций:

- $\Delta l_t + \Delta l_x = 0$,

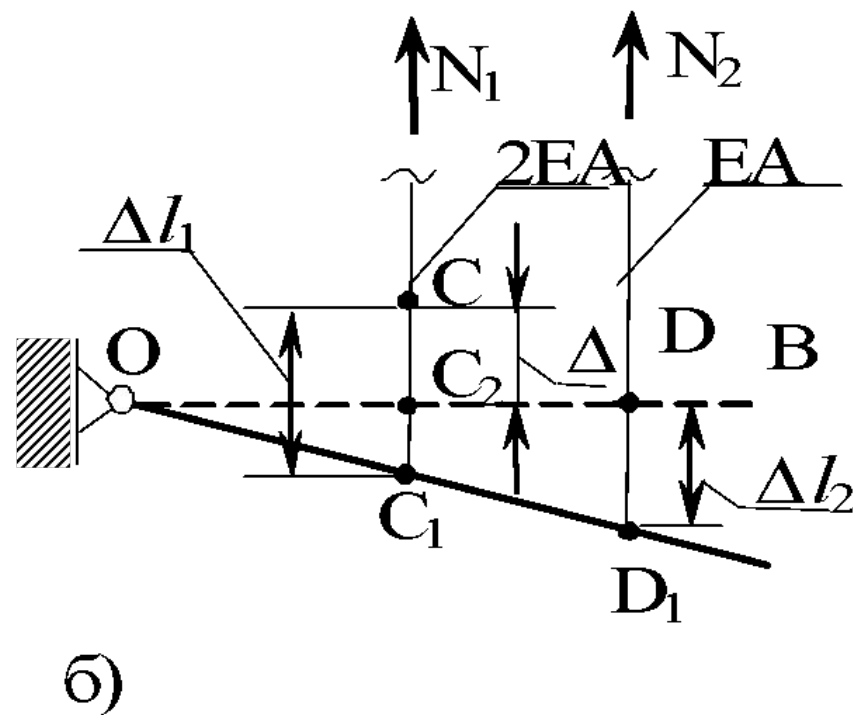
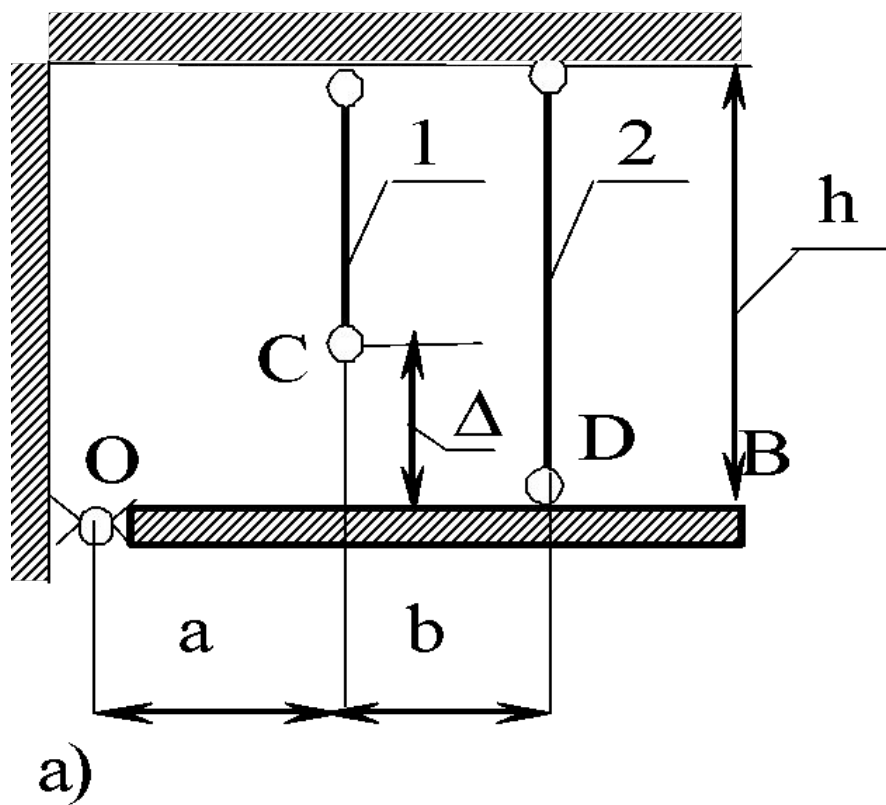
- Или

$$\alpha_t l \Delta t + \frac{-R_B \cdot l}{EA} = 0$$

$$R_B = \alpha_t \cdot \Delta t EA$$

● Пример 3

- Пусть при изготовлении стержней 1 и 2 стержневой системы, (рис. а), стержень 1 был изготовлен короче на Δ м ($\Delta \ll h$). Требуется определить усилия в стержнях 1 и 2, возникающие при монтаже системы.



- После монтажа система представляет собой единое целое. Рассечем стержни 1 и 2 (и рассмотрим равновесие бруса ОВ (рис. б):

- $M_o = 0; \quad N_1 \cdot a + N_2 (a + b) = 0 \quad (1)$

- Из подобия треугольников OC_2C_1 и ODD_1 следует:

$$\frac{\Delta l_1 - \Delta}{a} = \frac{\Delta l_2}{a + b}$$

- или

$$\left(\frac{N_1 \cdot h}{2EA} - \Delta \right) (a + b) = \frac{N_2 \cdot h}{EA} \cdot a \quad (2)$$

- Решая совместно уравнения (1) и (2), определяем продольные усилия в стержнях: $N_1 = 0,008 EA$, $N_2 = -0,0027EA$. Знак «-» в выражении для N_2 указывает, что стержень ОВ после сборки повернется против часовой стрелки.