Раздел 2. Дифференциальное исчисление функций одной переменной

Глава 1. Основные понятия

1. Два подхода к понятию дифференцируемой функции и их равносильность. Непрерывность дифференцируемой функции.
2. Правила дифференцирования суммы, произведения, частного.
3. Правило дифференцирования сложной функции. Логарифмическое дифференцирование.
4. Правило дифференцирования обратной функции.
5. Производные основных элементарных функций.
6. Функции, заданные параметрически, и их дифференцирование.
7. Функции, заданные неявно, и их дифференцирование.
8. Геометрический смысл производной и дифференциала.
9. Вектор-функции и их дифференцирование.
10. Производные и дифференциалы высших порядков. Правило Лейбница.

1. Два подхода к понятию дифференцируемой функции и их равносильность. Непрерывность дифференцируемой функции.

Формула для приращения функции.

Пусть функция $y=f(x)$ определена в промежутке $\mathscr{X}$. Исходя из определенного значения $x=x_0$ из этого промежутка, обозначим через $\Delta x \gtrless 0$ произвольное приращение x, подчиненное лишь тому ограничению, чтобы точка $x_0+\Delta x$ не вышла за пределы $\mathscr{X}$. Тогда соответствующим приращением функции будет

$$\Delta y=\Delta f(x_0)=f(x_0+\Delta x)-f(x_0).$$

1° *Если функция $y=f(x)$ в точке x_0 имеет (конечную) производную $y'_x=f'(x_0)$, то приращение функции может быть представлено в виде*

$$\Delta f(x_0)=f'(x_0)\cdot\Delta x+\alpha\cdot\Delta x$$

или, короче,

$$\Delta y=y'_x\cdot\Delta x+\alpha\cdot\Delta x,$$

где α есть величина, зависящая от Δx и вместе с ним стремящаяся к нулю.

2° *Если функция $y=f(x)$ в точке x_0 имеет (конечную) производную, то в этой точке функция необходимо непрерывна.*

1. Два подхода к понятию дифференцируемой функции и их равносильность. Непрерывность дифференцируемой функции.

Определение дифференциала. Пусть имеем функцию $y=f(x)$, определенную в некотором промежутке $\mathcal{X}$ и непрерывную в рассматриваемой точке x_0. Тогда приращению Δx аргумента отвечает приращение

$$\Delta y = \Delta f(x_0) = f(x_0+\Delta x) - f(x_0),$$

бесконечно малое вместе с Δx. Большую важность имеет вопрос: *существует ли для Δy такая линейная относительно Δx бесконечно малая $A\cdot\Delta x$ ($A=\mathrm{const}$), что их разность оказывается, по сравнению с Δx, бесконечно малой высшего порядка*:

$$\Delta y = A\cdot\Delta x + o(\Delta x). \tag{1}$$

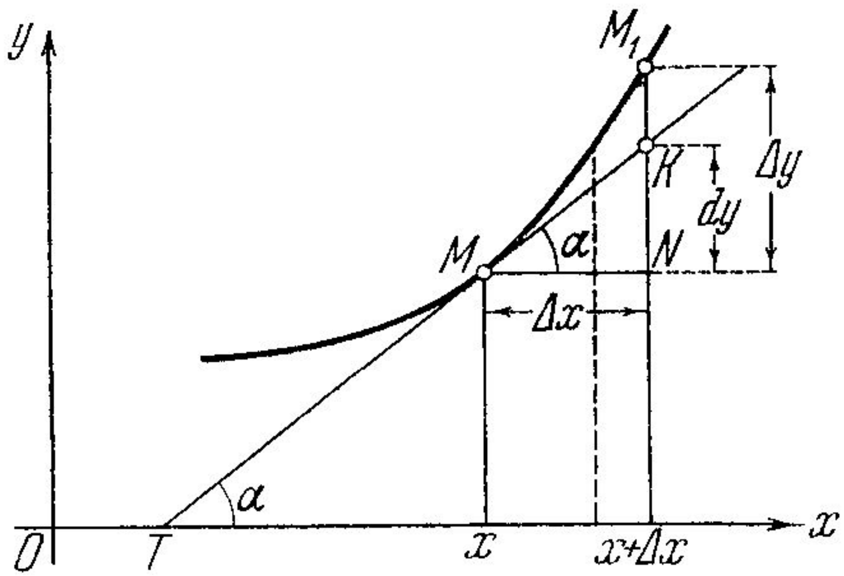
Если равенство (1) *выполняется, то функция $y=f(x)$ называется* д и ф ф е р е н ц и р у е м о й *(при данном значении $x=x_0$), само же выражение $A\cdot\Delta x$ называется* д и ф ф е р е н ц и а л о м *функции* и обозначается символом dy или $df(x_0)$.

1. Два подхода к понятию дифференцируемой функции и их равносильность. Непрерывность дифференцируемой функции.

Связь между дифференцируемостью и существованием производной. Легко установить теперь справедливость следующего утверждения:

Для того чтобы функция $y=f(x)$ в точке x_0 была дифференцируема, необходимо и достаточно, чтобы для нее в этой точке существовала конечная производная $y'=f'(x_0)$. При выполнении этого условия равенство (1) *имеет место при значении постоянной A, равном именно этой производной:*

$$\Delta y = y'_x \Delta x + o(\Delta x). \tag{1a}$$



1. Два подхода к понятию дифференцируемой функции и их равносильность. Непрерывность дифференцируемой функции.

Итак, *дифференциал функции* $y = f(x)$ *всегда равен* *)

$$dy = y'_x \cdot \Delta x. \tag{2}$$

В заключение остановимся на самой независимой переменной x: ее дифференциалом называют именно приращение Δx, т. е. условно полагают

$$dx = \Delta x. \tag{4}$$

Если отождествить дифференциал независимой переменной x с дифференциалом функции $y = x$ (в этом – тоже своего рода соглашение!), то формулу (4) можно и доказать, ссылаясь на (2): $dx = x'_x \cdot \Delta x = 1 \cdot \Delta x = \Delta x$.

Учитывая соглашение (4), можно теперь переписать формулу (2), дающую определение дифференциала, в виде

$$dy = y'_x \cdot dx \tag{5}$$

– так ее обычно и пишут.

Отсюда получается

$$y'_x = \frac{dy}{dx}, \tag{6}$$

2. Правила дифференцирования суммы, произведения, частного.

Правила дифференцирования *) выглядят так:

I. $d(cu) = c \cdot du$,

II. $d(u \pm v) = du \pm dv$,

III. $d(uv) = u \cdot dv + v \cdot du$,

IV. $d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v \cdot du - u \cdot dv}{v^2}$.

3. Правило дифференцирования сложной функции. Логарифмическое дифференцирование.

Производная сложной функции.

Пусть 1) *функция* $u=\varphi(x)$ *имеет в некоторой точке* x_0 *производную* $u'_x=\varphi'(x_0)$, 2) *функция* $y=f(u)$ *имеет в соответствующей точке* $u_0=\varphi(x_0)$ *производную* $y'_u=f'(u_0)$. *Тогда сложная функция* $y=f(\varphi(x))$ *в упомянутой точке* x_0 *также будет иметь производную, равную произведению производных функций* $f(u)$ и $\varphi(x)$:

$$[f(\varphi(x))]'=f'_u(\varphi(x_0))\cdot\varphi'(x_0)\ ^{*)},$$

или, короче,

$$y'_x=y'_u\cdot u'_x.$$

3. Правило дифференцирования сложной функции. Логарифмическое дифференцирование.

В виде упражнения, исследуем еще вопрос о производной степенно-показательного выражения $y=u^v$ ($v>0$), где u и v суть функции от x, имеющие в данной точке производные u', v'.

Прологарифмировав равенство $y=u^v$, получим

$$\ln y = v\cdot\ln u. \tag{5}$$

Таким образом, выражение для y можно переписать в виде $y=e^{v\ln u}$, откуда уже ясно, что производная y' существует. Самое же вычисление ее проще осуществить, приравнивая производные по x от обеих частей равенства (5). При этом мы используем правила V и III (помня о том, что u, v и y суть функции от x). Мы получим

$$\frac{1}{y}\cdot y' = v'\cdot\ln u + v\cdot\frac{1}{u}\cdot u',$$

откуда

$$y' = y\left(\frac{vu'}{u} + v'\ln u\right),$$

или, подставляя вместо y его выражение,

$$y' = u^v\left(\frac{vu'}{u} + v'\ln u\right). \tag{6}$$

Эта формула впервые была установлена Лейбницем и И. Бернулли

4. Правило дифференцирования обратной функции.

Теорема. *Пусть* 1) *функция* $f(x)$ *удовлетворяет условиям теоремы о существовании обратной функции,* 2) *в точке* x_0 *имеет* *конечную и отличную от нуля производную* $f'(x_0)$. *Тогда для обратной функции* $g(y)$ *в соответствующей точке* $y_0 = f(x_0)$ *также существует производная, равная* $\frac{1}{f'(x_0)}$.

Теорема. *Пусть функция* $y = f(x)$ *определена, монотонно возрастает (убывает)***) *и непрерывна в некотором промежутке* $\mathcal{X}$.

5. Производные основных элементарных функций.

1. $y = c \qquad dy = 0$
2. $y = x^{\mu} \qquad dy = \mu x^{\mu-1} \cdot dx$

   $y = \frac{1}{x} \qquad dy = -\frac{dx}{x^2}$

   $y = \sqrt{x} \qquad dy = \frac{dx}{2\sqrt{x}}$
3. $y = a^x \qquad dy = a^x \cdot \ln a \cdot dx$

   $y = e^x \qquad dy = e^x \cdot dx$
4. $y = \log_a x \qquad dy = \frac{\log_a e \cdot dx}{x}$

   $y = \ln x \qquad dy = \frac{dx}{x}$
5. $y = \sin x \qquad dy = \cos x \cdot dx$
6. $y = \cos x \qquad dy = -\sin x \cdot dx$
7. $y = \operatorname{tg} x \qquad dy = \sec^2 x \cdot dx = \frac{dx}{\cos^2 x}$
8. $y = \operatorname{ctg} x \qquad dy = -\csc^2 x \cdot dx = -\frac{dx}{\sin^2 x}$
9. $y = \arcsin x \qquad dy = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$
10. $y = \arccos x \qquad dy = -\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$
11. $y = \operatorname{arctg} x \qquad dy = \frac{dx}{1+x^2}$
12. $y = \operatorname{arcctg} x \qquad dy = -\frac{dx}{1+x^2}$

6. Функции, заданные параметрически, и их дифференцирование.

Если x и y заданы в функции от параметра t:

$$x=\varphi(t), \qquad y=\psi(t),$$

этим определяется и y как функция от x: $y=f(x)$. При наличии последовательных производных от x и y по t существуют соответствующие производные от y по x и выражаются выведенными выше формулами.

$$y'_x=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{y'_t}{x'_t}, \qquad y''_{x^2}=\frac{\frac{dx}{dt}\cdot\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{d^2x}{dt^2}\cdot\frac{dy}{dt}}{\left(\frac{dx}{dt}\right)^3}=\frac{x'_t y''_{t^2}-x''_{t^2}y'_t}{(x'_t)^3};$$

7. Функции, заданные неявно, и их дифференцирование.

Понятие неявной функции от одной переменной. Предположим, что значения двух переменных x и y связаны между собой уравнением, которое, если все члены его перенести налево, в общем случае имеет вид

$$F(x, y) = 0. \tag{1}$$

Здесь $F(x, y)$ есть функция двух переменных, заданная в какой-либо области. Если для каждого значения x – в некотором промежутке – существует одно или несколько значений y, которые совместно с x удовлетворяют уравнению (1), то этим определяется, однозначная или многозначная, функция $y = f(x)$, для которой равенство

$$F(x, f(x)) = 0 \tag{2}$$

имеет место уже т о ж д е с т в е н н о относительно x.

Функция $y = f(x)$ называется *неявной*, если она задана при посредстве н е р а з р е ш е н н о г о (относительно y) уравнения (1); она становится *явной*, если рассматривается н е п о с р е д с т в е н н а я зависимость y от x.

7. Функции, заданные неявно, и их дифференцирование.

Покажем простой прием для вычисления производной y'_x (если существование ее наперед известно). Мы знаем, что если неявную функцию $y=f(x)$ подставить в уравнение (1), то оно обратится в тождество . Итак, если под y разуметь именно эту функцию от x, то левая часть равенства (1), $F(x, y)$, представит собой сложную функцию от x, которая тождественно равна нулю. Тогда и производная ее по x также есть нуль. Если продифференцировать эту функцию по правилу n° 3 , то получим

$$F'_x(x, y)+F'_y(x, y)\cdot y'_x=0$$

откуда (так как $F'_y \neq 0$)

$$y'_x=-\frac{F'_x(x, y)}{F'_y(x, y)},$$

8. Геометрический смысл производной и дифференциала.

Чтобы истолковать геометрически дифференциал dy и его связь с приращением Δy функции $y = f(x)$, рассмотрим график этой функции (рис. 44). Значением x аргумента и y функции определится точка M на кривой. Проведем в этой точке кривой касательную MT; ее угловой коэффициент, $\operatorname{tg}\alpha$, равен производной y'_x. Если абсциссе x придать приращение Δx, то ордината кривой y получит приращение $\Delta y = NM_1$. В то же время ордината касательной получит приращение NK. Вычисляя NK как катет прямоугольного треугольника MNK, найдем:

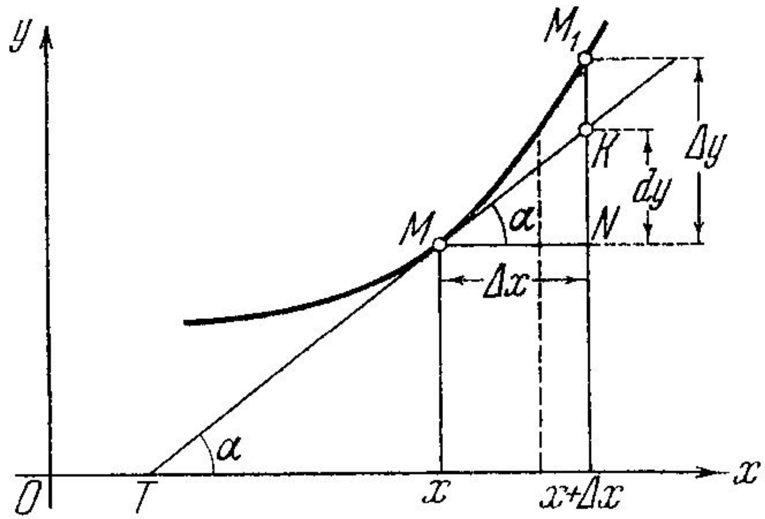


Рис. 44.

$$NK = MN \cdot \operatorname{tg}\alpha = y'_x \cdot \Delta x = dy.$$

Итак, в то время как Δy есть приращение ординаты кривой, dy является соответственным приращением ординаты касательной.

9. Вектор-функции и их дифференцирование.

Пусть каждому значению $t \in D$ поставлен в соответствие вектор трехмерного пространства. В этом случае говорят, что на множестве D задана векторная функция.
Если в пространстве задана декартова система координат, то задание вектор-функции означает задание скалярных функций x (t), y (t), z (t).

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}.$$

$$\vec{r}\,'\left(t_0\right) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{r}\left(t_0 + \Delta t\right) - \vec{r}\left(t_0\right)}{\Delta t}.$$

$$d\vec{r} = \vec{r}\,' dt \qquad \vec{r}\,' = \frac{d\vec{r}}{dt}.$$

$$\mathbf{r}'(t) = x'(t)\,\mathbf{i} + y'(t)\,\mathbf{j} + z'(t)\,\mathbf{k}.$$

10. Производные и дифференциалы высших порядков. Правило Лейбница.

Определение производных высших порядков. Если функция $y=f(x)$ имеет конечную производную $y'=f'(x)$ в некотором промежутке $\mathscr{X}$, так что эта последняя сама представляет новую функцию от x, то может случиться, что эта функция в некоторой точке x_0 из $\mathscr{X}$, в свою очередь, имеет производную, конечную или нет. Ее называют *производной второго порядка* или *второй производной* функции $y=f(x)$ в упомянутой точке, и обозначают одним из символов

$$\frac{d^2y}{dx^2},\ y'',\ D^2y;\ \frac{d^2f(x_0)}{dx^2},\quad f''(x_0),\quad D^2f(x_0).$$

10. Производные и дифференциалы высших порядков. Правило Лейбница.

Аналогично, если функция $y=f(x)$ имеет конечную вторую производную в целом промежутке $\mathcal{X}$ (т. е. в каждой точке этого промежутка), то ее производная, конечная или нет, в какой-либо точке x_0 из $\mathcal{X}$ называется производной третьего порядка или третьей производной функции $y=f(x)$ в этой точке, и обозначается так:

$$\frac{d^3y}{dx^3},\quad y''',\quad D^3y;\quad \frac{d^3f(x_0)}{dx^3},\qquad f'''(x_0),\qquad D^3f(x_0).$$

Подобным же образом от третьей производной переходим к четвертой и т. д. Если предположить, что понятие $(n-1)$-й производной уже определено и что $(n-1)$-я производная существует и конечна в промежутке $\mathcal{X}$, то ее производная в некоторой точке x_0 этого промежутка называется производной n-го порядка или n-й производной от исходной функции $y=f(x)$; для обозначения ее применяются символы:

$$\frac{d^ny}{dx^n},\quad y^{(n)},\quad D^ny;\quad \frac{d^nf(x_0)}{dx^n},\qquad f^{(n)}(x_0),\qquad D^nf(x_0).$$

10. Производные и дифференциалы высших порядков. Правило Лейбница.

Таким образом, мы определили понятие n-ой производной, как говорят, **индуктивно**, переходя по порядку от первой производной к последующим. Соотношение, определяющее n-ю производную:

$$y^{(n)} = [y^{(n-1)}]',$$

называют также рекуррентным (или «возвратным»), поскольку оно «возвращает» нас от n-й к $(n-1)$-й производной.

10. Производные и дифференциалы высших порядков. Правило Лейбница.

Дифференциалы высших порядков. Обратимся теперь к дифференциалам высших порядков; они также определяются индуктивно. Дифференциалом второго порядка или вторым дифференциалом функции $y=f(x)$ в некоторой точке называется дифференциал в этой точке от ее (первого) дифференциала; в обозначениях

$$d^2y=d(dy).$$

Дифференциалом третьего порядка или третьим дифференциалом называется дифференциал от второго дифференциала:

$$d^3y=d(d^2y).$$

Вообще, дифференциалом n-го порядка или n-м дифференциалом функции $y=f(x)$ называется дифференциал от ее $(n-1)$-го дифференциала:

$$d^ny=d(d^{n-1}y).$$

10. Производные и дифференциалы высших порядков. Правило Лейбница.

Нарушение инвариантности формы для дифференциалов высших порядков. Вспоминая, что (первый) дифференциал функции обладает свойством инвариантности формы, естественно поставить вопрос, обладают ли подобным свойством дифференциалы высших порядков. Покажем, например, что уже второй дифференциал этим свойством не обладает.

Итак, пусть $y=f(x)$ и $x=\varphi(t)$, так что y можно рассматривать как сложную функцию от t: $y=f(\varphi(t))$. Ее (первый) дифференциал по t можно написать в форме $dy=y'_x\cdot dx$, где $dx=x'_t\cdot dt$ есть функция от t. Вычисляем второй дифференциал по t: $d^2y=d(y'_x\cdot dx)=dy'_x\cdot dx+y'_x\cdot d(dx)$. Дифференциал dy'_x можно, снова пользуясь инвариантностью формы (первого) дифференциала, взять в форме $dy'_x=y''_{x^2}\cdot dx$, так что окончательно

$$d^2y=y''_{x^2}\cdot dx^2+y'_x\cdot d^2x, \tag{3}$$

в то время как при независимой переменной x второй дифференциал имел вид $d^2y=y''_{x^2}\cdot dx^2$. Конечно, выражение (3) для d^2y является более общим: если, в частности, x есть независимая переменная, то $d^2x=0$ – и остается один лишь первый член.

10. Производные и дифференциалы высших порядков. Правило Лейбница.

Формула Лейбница.

Предположим, что функции u, v от x имеют каждая в отдельности производные до n-го порядка включительно: докажем, что тогда их произведение $y=uv$ также имеет n-ю производную, и найдём её выражение.

Станем, применяя правило III, последовательно дифференцировать это произведение; мы найдём:

$$y'=u'v+uv',\quad y''=u''v+2u'v'+uv'',$$
$$y'''=u'''v+3u''v'+3u'v''+uv''',\ \ldots$$

Легко подметить закон, по которому построены все эти формулы: правые части их напоминают разложение степеней бинома: $u+v$, $(u+v)^2$ $(u+v)^3$, ... , лишь вместо степеней u, v стоят производные соответствующих порядков. Сходство станет более полным, если в полученных формулах вместо u, v писать $u^{(0)}$, $v^{(0)}$. Распространяя этот закон на случай любого n, придем к общей формуле*:

$$y^{(n)}=(uv)^{(n)}=\sum_{i=0}^{n} C_n^i u^{(n-i)}v^{(i)}=$$
$$=u^{(n)}v+nu^{(n-1)}v'+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}n^{(n-2)}v''+\ldots$$
$$\ldots+\frac{n(n-1)\ldots(n-i+1)}{1\cdot 2\ldots i}n^{(n-i)}v^{(i)}+\ldots+nv^{(n)}.$$