Раздел 4. Кратные интегралы.

Лекция 1. Двойной интеграл.

§ 1. Задача приводящая к понятию двойного интеграла.

Точно так же, как задача о площади криволинейной трапеции привела нас к понятию простого определенного интеграла, аналогичная задача об объеме цилиндрического бруса приведет нас к новому понятию – *двойного интеграла*.

Рассмотрим тело (V), которое сверху ограничено поверхностью

$$z = f(x, y), \tag{1.1}$$

с боков - цилиндрической поверхностью с образующими, параллельными оси Oz, снизу – плоской фигурой (D) на плоскости xOy (рис.1.1). Требуется найти объем V тела.

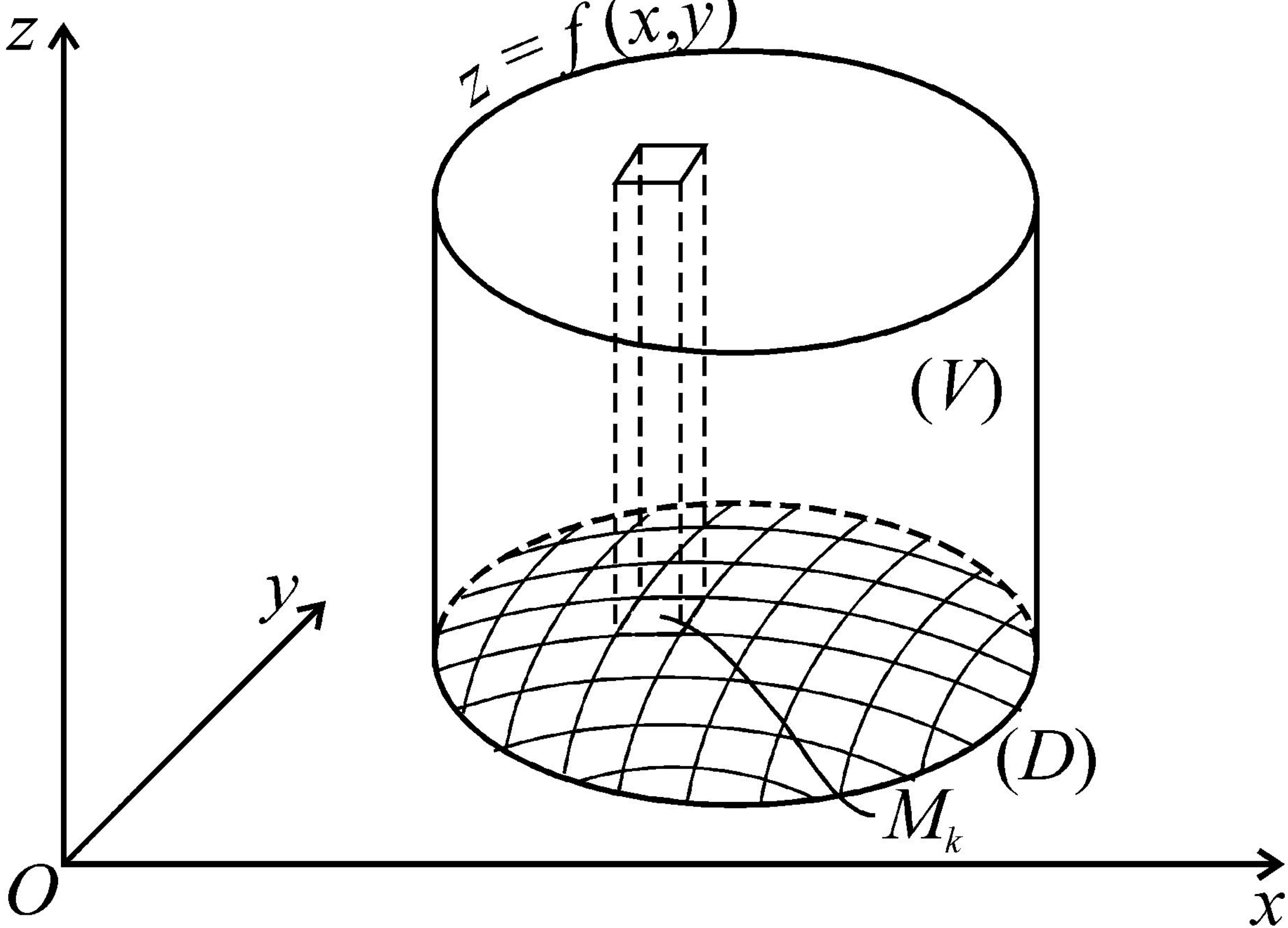

Рисунок. 1.1

Для решения этой задачи мы прибегнем к обычному в интегральном исчислении приему, состоящему в разложении искомой величины на элементарные части, приближенному подсчету каждой части, суммированию и последующему предельному переходу. С этой целью разобьем область (D) сетью кривых на части $(\Delta S_1), (\Delta S_2), \ldots, (\Delta S_n)$ и рассмотрим ряд цилиндрических столбиков, которые имеют своими основаниями эти частичные области и в совокупности составляют данное тело.

Для подсчета объема отдельных цилиндрических столбиков возьмем произвольно в каждой фигуре (ΔS_k) по точке $M_k(\xi_k, \eta_k)$. Если приближенно принять каждый столбик за цилиндр с высотой, равной аппликате $f(\xi_k, \eta_k)$, то объем отдельного столбика оказывается приближенно равным $f(\xi_k, \eta_k)\Delta S_k$, где ΔS_k означает площадь фигуры (ΔS_k). В таком случае приближенное выражение объема всего тела будет

$$V \approx \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k, \eta_k)\Delta S_k .$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Если взять любые пары точек в области то верхняя грань множества расстояний между ними называется диаметром области, обозначается d.

Для повышения точности этого равенства будем уменьшать размеры площадок (ΔS_k), увеличивая их число. В пределе, при стремлении к нулю наибольшего из диаметров d всех областей (ΔS_k), это равенство делается точным, так что

$$V = \lim_{d \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k, \eta_k) \Delta S_k, \tag{1.2}$$

и поставленная задача решена.

Предел этого вида и есть *двойной интеграл от функции* $f(x,y)$ *по области* (D); он обозначается символом $\iint\limits_{(D)} f(x,y)dS$ или $\iint\limits_{(D)} f(x,y)dxdy$, так что формула (1.2) для объема принимает вид

$$V = \iint\limits_{(D)} f(x,y)dS. \tag{1.2*}$$

Таким образом, двойной интеграл является прямым обобщением понятия простого определенного интеграла на случай функции двух переменных.

1.2.Определение двойного интеграла

Возьмем произвольную фигуру (D) на плоскости, представляющую собой *ограниченную* и *замкнутую* область. Ее границу мы всегда будем представлять в виде замкнутой кривой (или нескольких таких кривых).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Область (D) называется квадрируемой, если она имеет площадь.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. В дальнейшем будем рассматривать только квадрируемые области.

Пусть в области (D) определена функция двух переменных $f(x,y)$. Разобьем область (D) сетью кривых на *конечное* число элементарных областей $(\Delta S_1),(\Delta S_2),\ldots,(\Delta S_n)$ соответственно с площадями $\Delta S_1,\Delta S_2,\ldots,\Delta S_n$. В каждой элементарной области (ΔS_k) возьмем по произвольной точке $M_k(\xi_k,\eta_k)$, значение функции в этой точке $f(\xi_k,\eta_k)$ умножим на площадь ΔS_k соответствующей области и все подобные произведения сложим. Полученную сумму

$$\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k,\eta_k)\Delta S_k \tag{1.3}$$

будем называть *интегральной суммой для функции f (x, y) по области* (D).

Обозначим через d наибольший из диаметров $d_1, d_2, \ldots, d_n$ элементарных областей $(\Delta S_1), (\Delta S_2), \ldots, (\Delta S_n)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Если при стремлении к нулю наибольшего из диаметров d существует конечный предел I интегральной суммы (1.3), и он не зависит ни от способа разбиения области (D) на элементарные области $(\Delta S_1), (\Delta S_2), \ldots, (\Delta S_n)$, ни от выбора точек $M_k(\xi_k, \eta_k)$ в каждой элементарной области (ΔS_k), то этот предел называется *двойным интегралом от функции* $f(x, y)$ *по области* (D) и обозначается $\iint\limits_{(D)} f(x, y)dS$.

ТЕОРЕМА 1. (*необходимое условие существования двойного интеграла*). Если функция $f(x, y)$ интегрируема в ограниченной замкнутой области (D), то она ограничена в этой области.

ТЕОРЕМА 2. (*достаточное условие существования двойного интеграла*). Если функция $f(x, y)$ непрерывна в ограниченной замкнутой области (D), то она интегрируема в ней.

Из пункта 1.1. следует *геометрический смысл двойного интеграла*. Если функция $f(x, y)$ неотрицательна: $f(x, y) \geq 0$ - и интегрируема в области (D), то двойной интеграл от функции $f(x, y)$ по области (D) равен объему тела, сверху ограниченного поверхностью $z = f(x, y)$, с боков - цилиндрической поверхностью с образующими, параллельными оси Oz, снизу – областью (D) на плоскости xOy: $V = \iint\limits_{(D)} f(x, y)dxdy$.

1.3. Свойства двойного интеграла

1. $S_D = \iint\limits_{(D)} dxdy$.

2. Если функцию $f(x, y)$, интегрируемую в области (D), умножить на постоянную k, то полученная функция $k\,f\,(x,y)$ также будет интегрируема в области (D), причем

$$\iint\limits_{(D)} k\,f(x, y)dxdy = k\iint\limits_{(D)} f(x, y)dxdy.$$

3. Если в области (D) интегрируемы функции $f(x, y)$ и $g(x, y)$, то интегрируема и функция $f(x, y) \pm g(x, y)$, причем

$$\iint\limits_{(D)} \left[f(x, y) \pm g(x, y)\right]dxdy = \iint\limits_{(D)} f(x, y)dxdy \pm \iint\limits_{(D)} g(x, y)dxdy.$$

4. Если область (D), в которой задана функция $f(x, y)$, кривой (L) разделена на две области (D') и (D''), то из интегрируемости функции $f(x, y)$ во всей области (D) следует ее интегрируемость в областях (D') и (D''), и обратно – из интегрируемости функции в обеих областях (D') и (D'') вытекает ее интегрируемость в области (D). При этом

$$\iint\limits_{(D)} f(x, y)dxdy = \iint\limits_{(D')} f(x, y)dxdy + \iint\limits_{(D'')} f(x, y)dxdy.$$

5. Если для интегрируемых в области (D) функций $f(x,y)$ и $g(x,y)$ выполняется неравенство $f(x,y) \le g(x,y)$, то $\iint\limits_{(D)} f(x,y)dxdy \le \iint\limits_{(D)} g(x,y)dxdy$.

6. В случае интегрируемости функции $f(x,y)$ в области (D) интегрируема и функция $|f(x,y)|$ в области (D), и имеет место неравенство $\left|\iint\limits_{(D)} f(x,y)dxdy\right| \le \iint\limits_{(D)} |f(x,y)|dxdy$.

7. ТЕОРЕМА О СРЕДНЕМ. Если функция $f(x,y)$ непрерывна в области (D), то найдется такая точка $(\bar{x},\bar{y})$ в области (D), что $\iint\limits_{(D)} f(x,y)dxdy = f(\bar{x},\bar{y}) \cdot S_D$ $\iint\limits_{(D)} f(x,y)dxdy = f(\bar{x},\bar{y}) \cdot S_D$, где S_D – площадь области D.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Свойство 3 обобщается на любое конечное число функций.
Свойство 4 обобщается на любое конечное число областей.

1.4. Сведение двойного интеграла к повторному интегралу

Продолжая трактовать двойной интеграл геометрически, как объем цилиндрического бруса, дадим указания относительно его вычисления путем сведения к повторному интегралу.

Ранее рассматривалась задача вычисления объема тела (V) по его поперечным сечениям. Напомним относящуюся сюда формулу. Пусть тело ограничено плоскостями $x = a$ и $x = b$ (рис.1.2).

Допустим, что сечение тела плоскостью, перпендикулярной к оси абсцисс и отвечающей абсциссе $x\left(a \le x \le b\right)$, имеет площадь $Q(x)$. Тогда объем тела, в предположении его существования, выразится формулой

$$V = \int_a^b Q\left(x\right)dx. \tag{1.4}$$

Применим теперь эту формулу к вычислению объема цилиндрического бруса, о котором шла речь выше. Начнем с простого случая, когда в основании бруса лежит прямоугольник $[a, b; c, d]$ (рис.1.3).

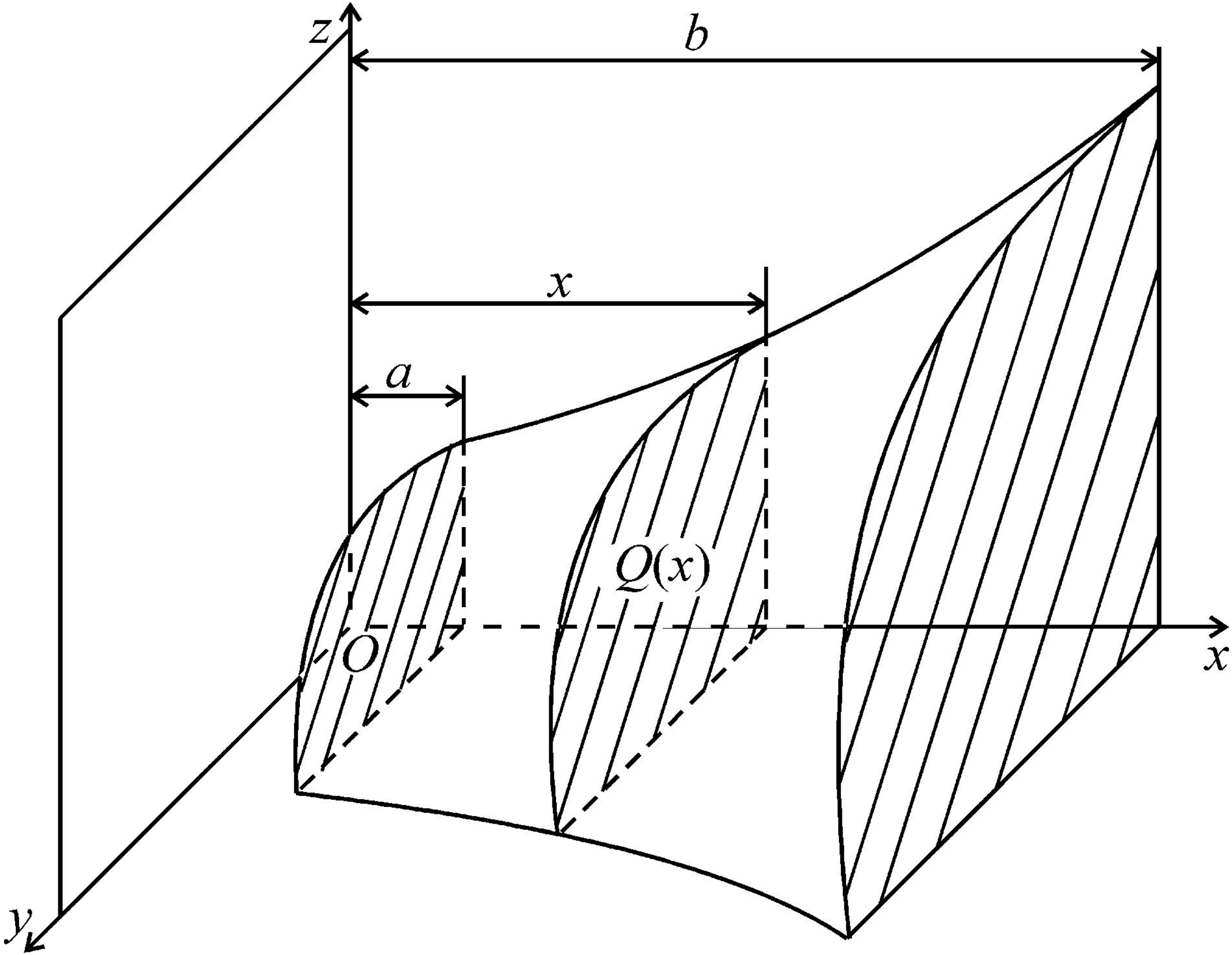

Рисунок. 1.2

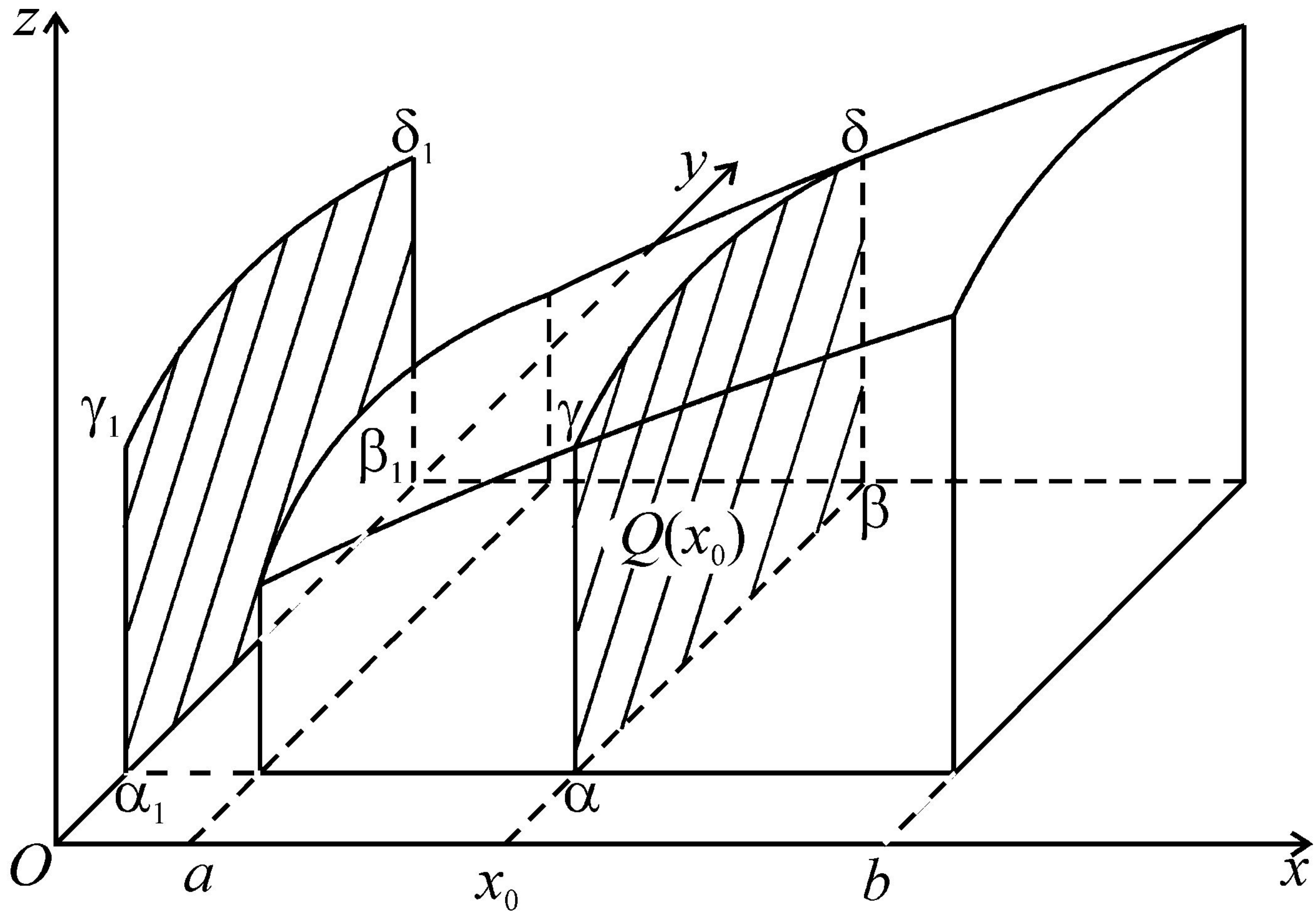
z
y
x
O
a
x_0
b
δ_1
δ
γ_1
γ
β_1
β
α_1
α
$Q(x_0)$

Рисунок. 1.3

Сечение бруса плоскостью $x = x_0$ $(a \le x_0 \le b)$ есть криволинейная трапеция $\alpha\beta\delta\gamma$. Для нахождения ее площади спроектируем эту фигуру на плоскость yOz. Получим конгруэнтную с ней трапецию $\alpha_1\beta_1\delta_1\gamma_1$ (ибо проектирование происходит без искажения). Но уравнение линии $\gamma_1\delta_1$ на плоскости yOz, очевидно, будет $z = f(x_0, y)\,(c \le y \le d)$.

Пользуясь известным выражением площади криволинейной трапеции в виде определенного интеграла, будем иметь $Q(x_0) = \int_c^d f\left(x_0, y\right)dy$. Так как наше рассуждение относится к любому сечению, то вообще для $a \le x \le b$ $Q(x) = \int_c^d f\left(x, y\right)dy$. Подставляя это значение $Q(x)$ в формулу (1.4), получим $V = \int_a^b dx \int_c^d f(x, y)dy$. Но мы имеем для объема V и выражение (1.2*), следовательно, $\iint_{(D)} f(x, y)dS = \int_a^b dx \int_c^d f(x, y)dy$ - двойной интеграл приведен к повторному.

Аналогичный результат можно получить и для общего случая, когда область (D) на плоскости xOy представляет собой криволинейную трапецию, ограниченную двумя кривыми: $y = y_0\left(x\right), y = Y\left(x\right) (a \le x \le b)$ и двумя прямыми $x = a$ и $x = b$ (рис. 1.4). Разница по сравнению с рассмотренным случаем состоит в следующем: раньше при любом фиксированным $x = x_0$ изменение y происходило в одном и том же промежутке $\left[c, d\right]$, а теперь этот промежуток $\left[y_0\left(x_0\right), Y\left(x_0\right)\right]$ сам зависит от x_0, так что

$$Q(x_0) = \int\limits_{y_0(x_0)}^{Y(x_0)} f\left(x_0, y\right) dy .$$

Окончательно получим: $V = \iint\limits_{(D)} f(x, y) dS = \int\limits_a^b dx \int\limits_{y_0(x)}^{Y(x)} f(x, y) dy .$

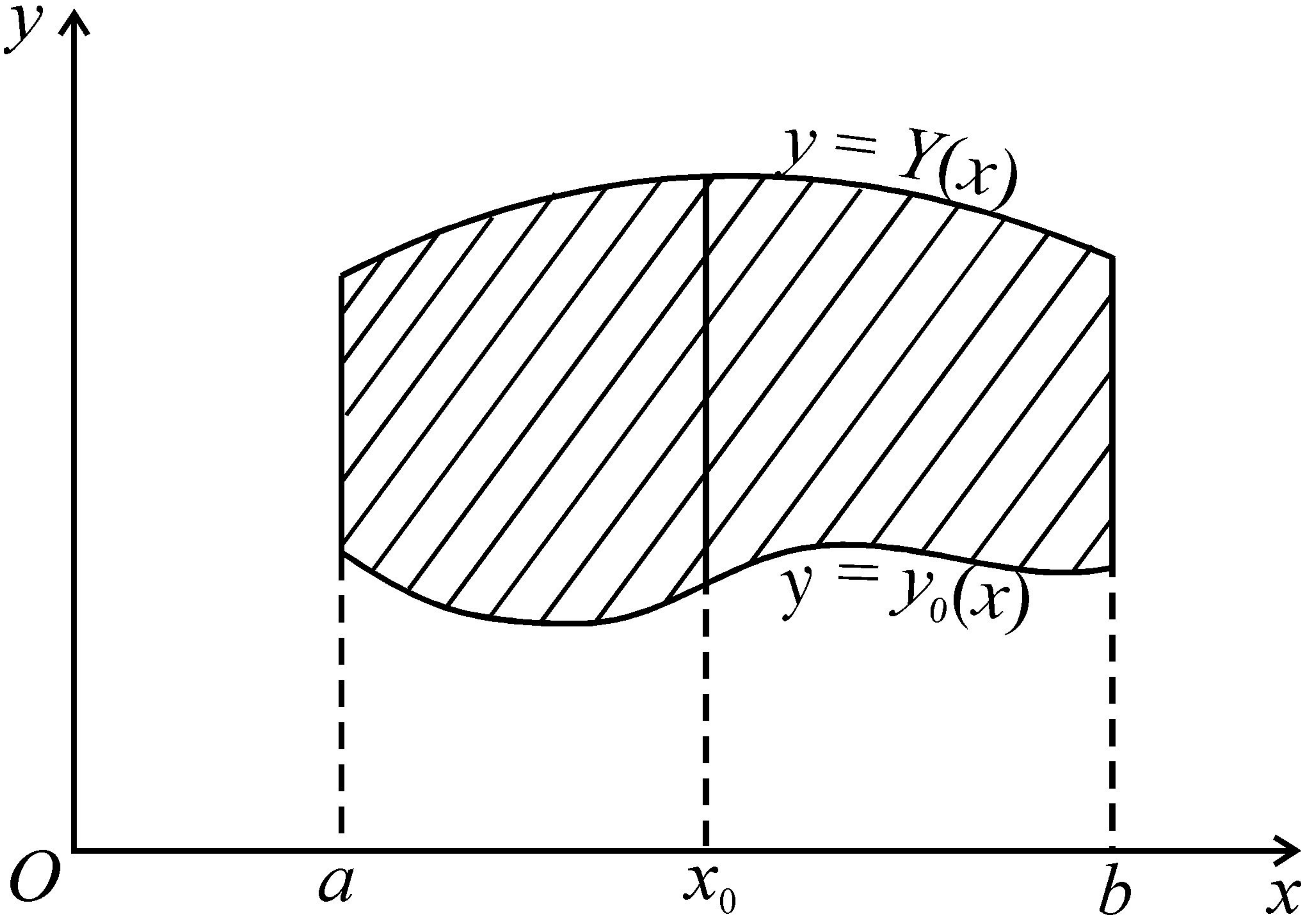

Рисунок. 1.4

1.5. Вычисление двойных интегралов

1.5.1. Вычисление двойных интегралов в декартовых координатах

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Область (D) называется правильной в направлении оси ординат, если любая прямая, проходящая через внутренние точки области (D) параллельно оси ординат, пересекает границу этой области в двух точках.

Аналогично дается определение области, правильной в направлении оси абсцисс.

Следующие две теоремы позволяют вычислять двойные интегралы в декартовых координатах.

ТЕОРЕМА 3. Если функция $f(x,y)$ непрерывна в области (D), область (D) - правильная в направлении оси ординат (рис. 1.4), то

$$\iint\limits_{(D)} f(x,y)dS = \int\limits_a^b dx \int\limits_{y_0(x)}^{Y(x)} f(x,y)dy .$$

ТЕОРЕМА 4. Если функция $f(x,y)$ непрерывна в области (D), область (D) - правильная в направлении оси абсцисс (рис. 1.5), то

$$\iint\limits_{(D)} f(x,y)dS = \int\limits_c^d dy \int\limits_{x_0(y)}^{X(y)} f(x,y)dx .$$

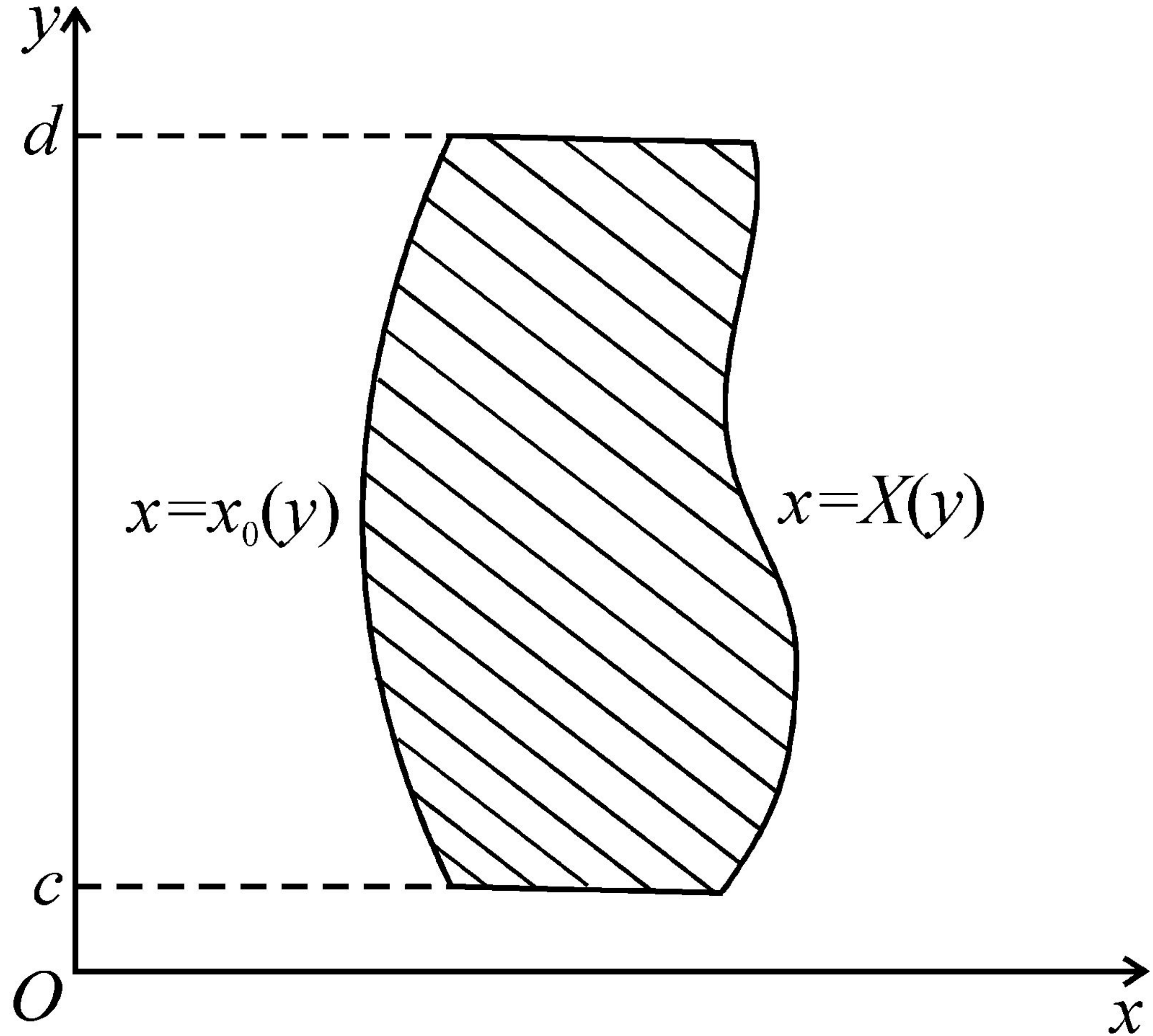

Рисунок. 1.5

Вообще при определении переменных пределов интегрирования полезно пользоваться следующим правилом: пусть x изменяется в постоянных пределах $a \leq x \leq b$ (рис.1.6). Чтобы получить пределы интегрирования по y, пересечем область (D) лучом, параллельным и одинаково направленным с осью ординат. Граница области, которую луч пересечет при входе в область, будет нижней границей этой области, а ее уравнение, решенное относительно y, служит для установления нижнего предела интегрирования по y $\left[y = y_1(x)\right]$.

Граница области, которую луч пересекает, выходя из области, будет верхней границей этой области, а ее уравнение, решенное относительно y, служит для установления верхнего предела интегрирования по y $\left[y = y_2(x)\right]$.

Аналогичным образом при постоянных пределах по y определяются переменные пределы по x.

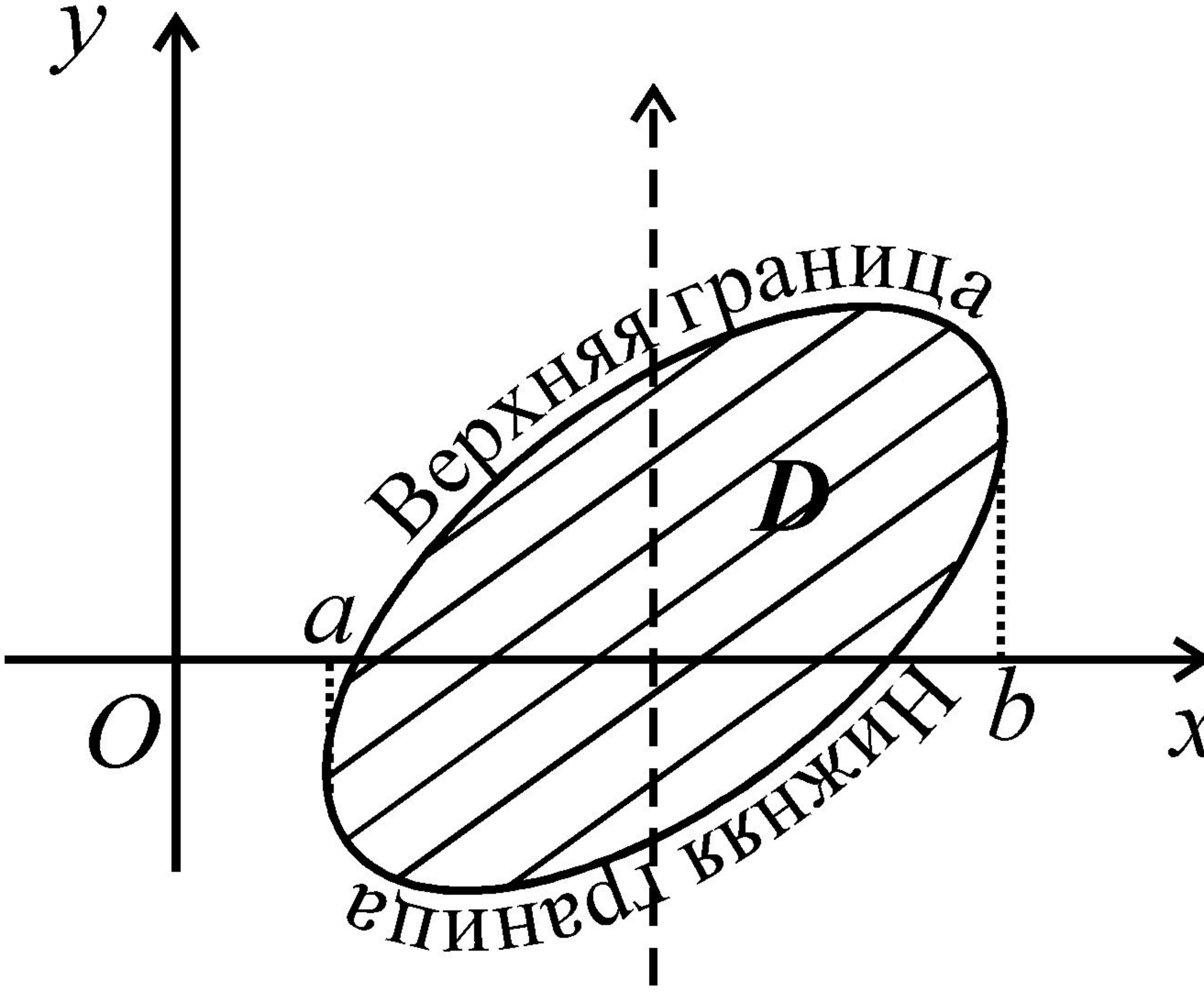

Рисунок. 1.6

1.5.2. Замена переменных в двойных интегралах

Предположим, что даны две декартовы плоскости с осями x,y и u,v. Рассмотрим в этих плоскостях две замкнутые области: область (D) на плоскости xOy и область (D') на плоскости uOv. Каждая из этих областей может быть и неограниченной, в частности может охватывать и всю плоскость. Границу области (если область не охватывает всей плоскости) будем предполагать кусочно-гладкой кривой.

Допустим, что в области (D') дана система непрерывных функций

$$\begin{cases} x = \varphi(u,v) \\ y = \psi(u,v), \end{cases} \tag{1.5}$$

которая устанавливает между областями (D) и (D') взаимно однозначное соответствие. Задание пары значений переменных u и v из области (D') однозначно определяет некоторую точку в области (D) на плоскости xOy (и обратно). Это дает основание и числа u,v называть координатами точек области (D).

Кривую, составленную из точек области (D), у которых одна из координат сохраняет постоянное значение, называют *координатной линией*. В связи с тем, что координатные линии, вообще говоря, будут кривыми, числа u,v, характеризующие положение точки на плоскости xOy, и в этом случае (как и в случае кривой поверхности) называют *криволинейными координатами точки*.

Придавая координате u различные (возможные для нее) постоянные значения, получим семейство координатных линий на плоскости xOy. Фиксируя значение координаты v, получим другое семейство координатных линий. При наличии взаимно однозначного соответствия между рассматриваемыми областями различные линии одного и того же семейства не пересекаются между собой, и через любую точку области (D) проходит по одной линии из каждого семейства.

Вся сетка координатных линий на плоскости xOy является изображением сетки прямых u = const и v = const на плоскости uOv (рис.1.7).

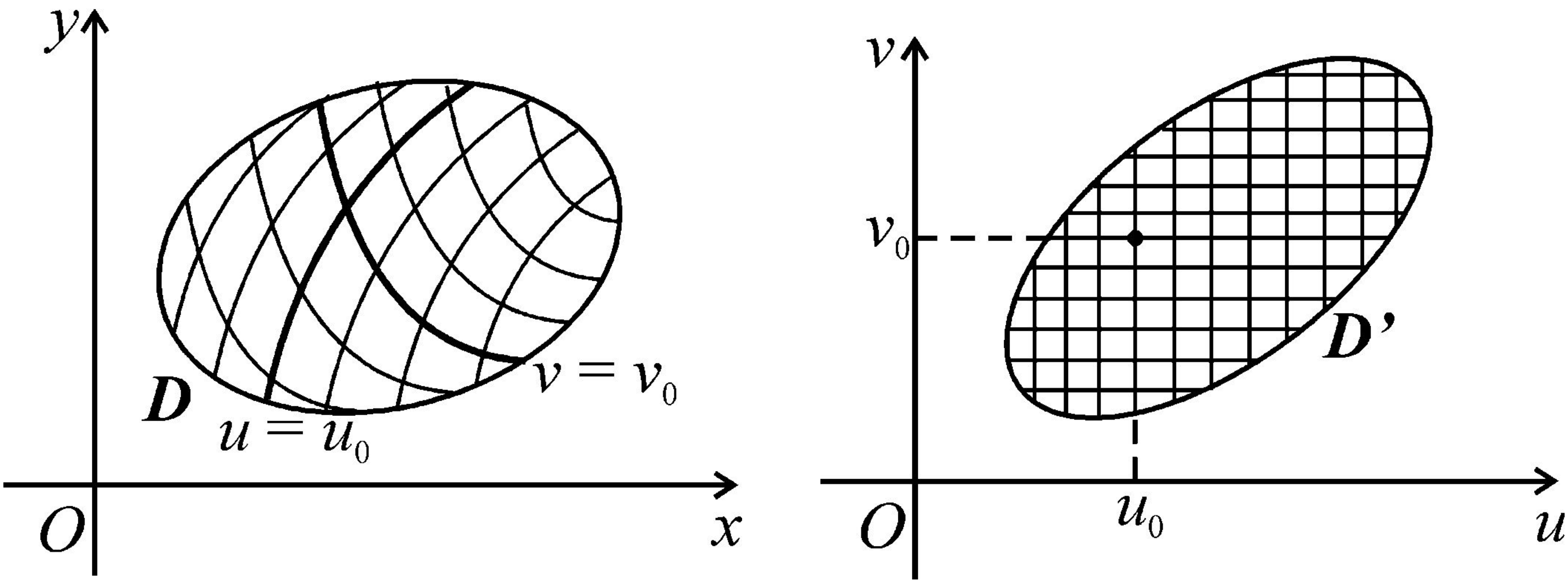

Рисунок. 1.7

Далее будем предполагать, что функции (1.5) не только непрерывны, но и имеют непрерывные частные производные первого порядка.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Определитель второго порядка следующего вида

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial\varphi}{\partial u} & \dfrac{\partial\varphi}{\partial v} \\ \dfrac{\partial\psi}{\partial u} & \dfrac{\partial\psi}{\partial v} \end{vmatrix} \qquad (1.6)$$

называют якобианом перехода от декартовых координат к криволинейным и обозначают $J(u,v)$.

Тогда формула перехода от декартовых координат к криволинейным координатам имеет следующий вид:

$$\iint\limits_{(D)} f(x,y)dxdy = \iint\limits_{(D')} f\left(\varphi(u,v),\psi(u,v)\right)\left|J(u,v)\right|dudv, \qquad (1.7)$$

$\left|J(u,v)\right| \neq 0$, за исключением конечного числа точек.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. На практике декартовые координаты точки и ее криволинейные координаты рассматривают не на разных координатных плоскостях, а на одной совмещенной.

Простейшим и важнейшим примером криволинейных координат являются *полярные координаты* ρ, φ. Они имеют наглядное геометрическое истолкование, как полярный радиус-вектор и полярный угол, но могут быть введены и формально, с помощью соотношений:

$$\begin{cases} x = \rho \cos \varphi \\ y = \rho \sin \varphi \end{cases}, (\rho \geq 0). \tag{1.8}$$

Если значения ρ и φ откладывать по двум взаимно перпендикулярным осям, считая, скажем, ρ - абсциссой, а φ - ординатой (при правой ориентации осей), то каждой точке полуплоскости $\rho \geq 0$ по указанным формулам отвечает одна определенная точка на плоскости xOy.

Прямым $\rho = const$ отвечают круги радиуса ρ с центром в начале (полюсе), а прямым $\varphi = const$ отвечают лучи, исходящие из начала (полюса) под углом φ к оси Ox (рис. 1.8).

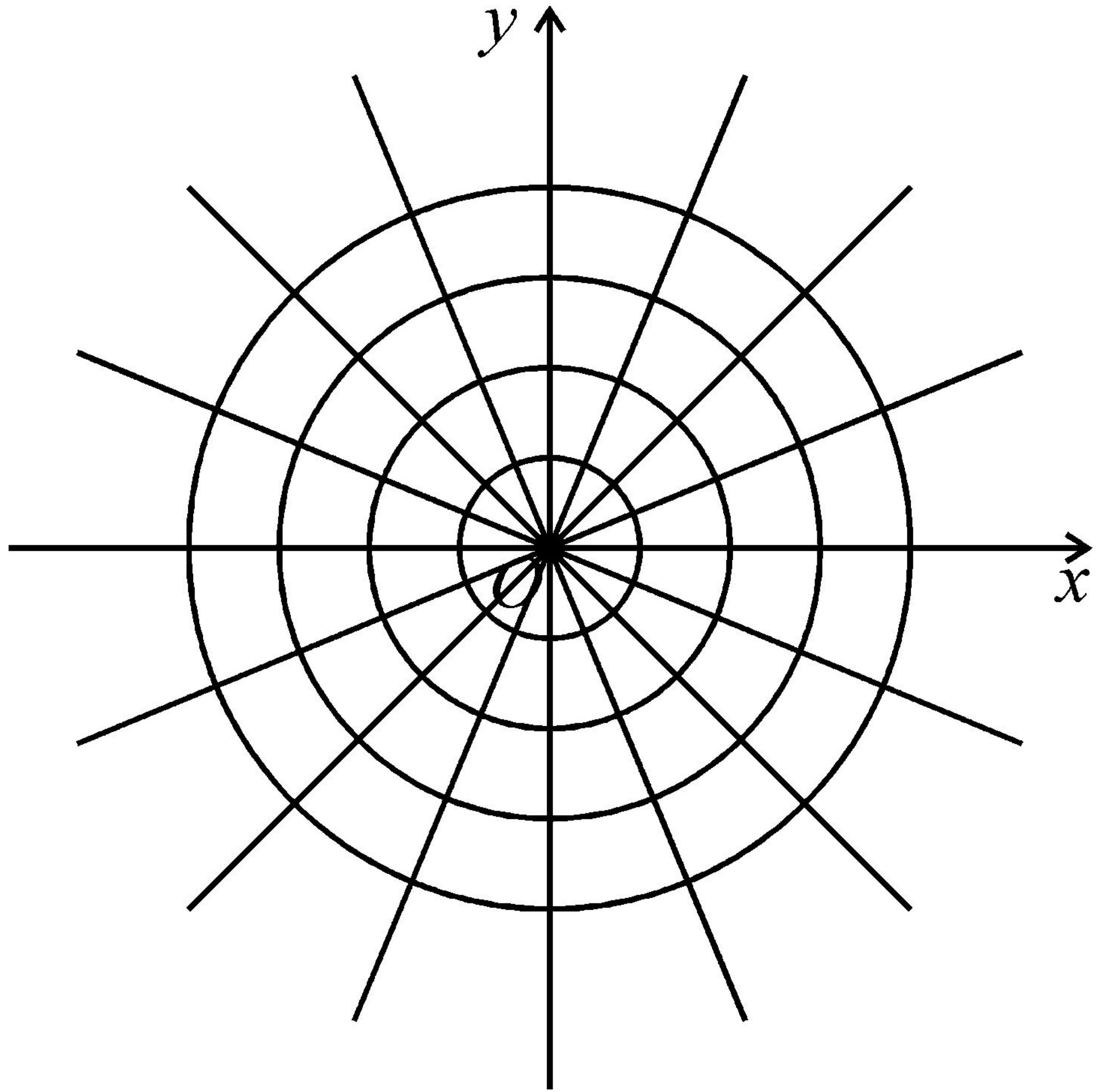

Рисунок. 1.8

Однако в данном случае формулы преобразования не будут однозначно разрешимы: изменения величины угла φ *на* $2\pi k$ (где k – целое) не отразится на значениях x и y. Для того чтобы получить все точки плоскости xOy, достаточно ограничиться значениями $\rho \geq 0$, $0 \leq \varphi < 2\pi$. Каждой точке (x,y), отличной от начала, отвечает одно значение $\rho > 0$ и одно значение φ *в* указанных пределах. Но неустранимое нарушение однозначности соответствия связано с началом координат: точке $x = y = 0$ отвечает на плоскости $\rho O\varphi$ вся ось φ (или, если угодно, отрезок ее от $\varphi = 0$ до $\varphi = 2\pi$).

Формулы (1.8) называют формулами связи между декартовыми и полярными координатами.

Используя формулу (1.6), вычисляем якобиан перехода от декартовых координат к полярным:

$$J(\varphi, \rho) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial \varphi} & \dfrac{\partial x}{\partial \rho} \\ \dfrac{\partial y}{\partial \varphi} & \dfrac{\partial y}{\partial \rho} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\rho \sin\varphi & \cos\varphi \\ \rho\cos\varphi & \sin\varphi \end{vmatrix} = -\rho\,.$$

Тогда, используя формулу (1.7), формула перехода от декартовых координат к полярным принимает следующий вид:

$$\iint\limits_{(D)} f(x,y)\,dxdy = \iint\limits_{(D')} f(\rho cos\varphi, \rho\sin\varphi)\rho\, d\varphi\, d\rho\,. \qquad (1.9)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6. Область (D) называется правильной в направлении полярной оси ρ, если луч, проходящий через внутренние точки области (D), пересекает границу области в двух точках (рис.1.9).

Следующая теорема позволяет вычислять двойной интеграл в полярных координатах (см. замечание 3).

ТЕОРЕМА 5. Если функция $f\left(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi\right)$ непрерывна в области (D), область (D) - правильная в направлении полярной оси ρ (рис. 9), то

$$\iint\limits_{(D)} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\rho\, d\varphi\, d\rho = \int\limits_{\alpha}^{\beta} d\varphi \int\limits_{\rho_1(\varphi)}^{\rho_2(\varphi)} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\rho\, d\rho\,.$$

Тогда по формуле (1.9) получаем:

$$\iint\limits_{(D)} f(x, y)\,dx\,dy = \int\limits_{\alpha}^{\beta} d\varphi \int\limits_{\rho_1(\varphi)}^{\rho_2(\varphi)} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\rho\, d\rho$$

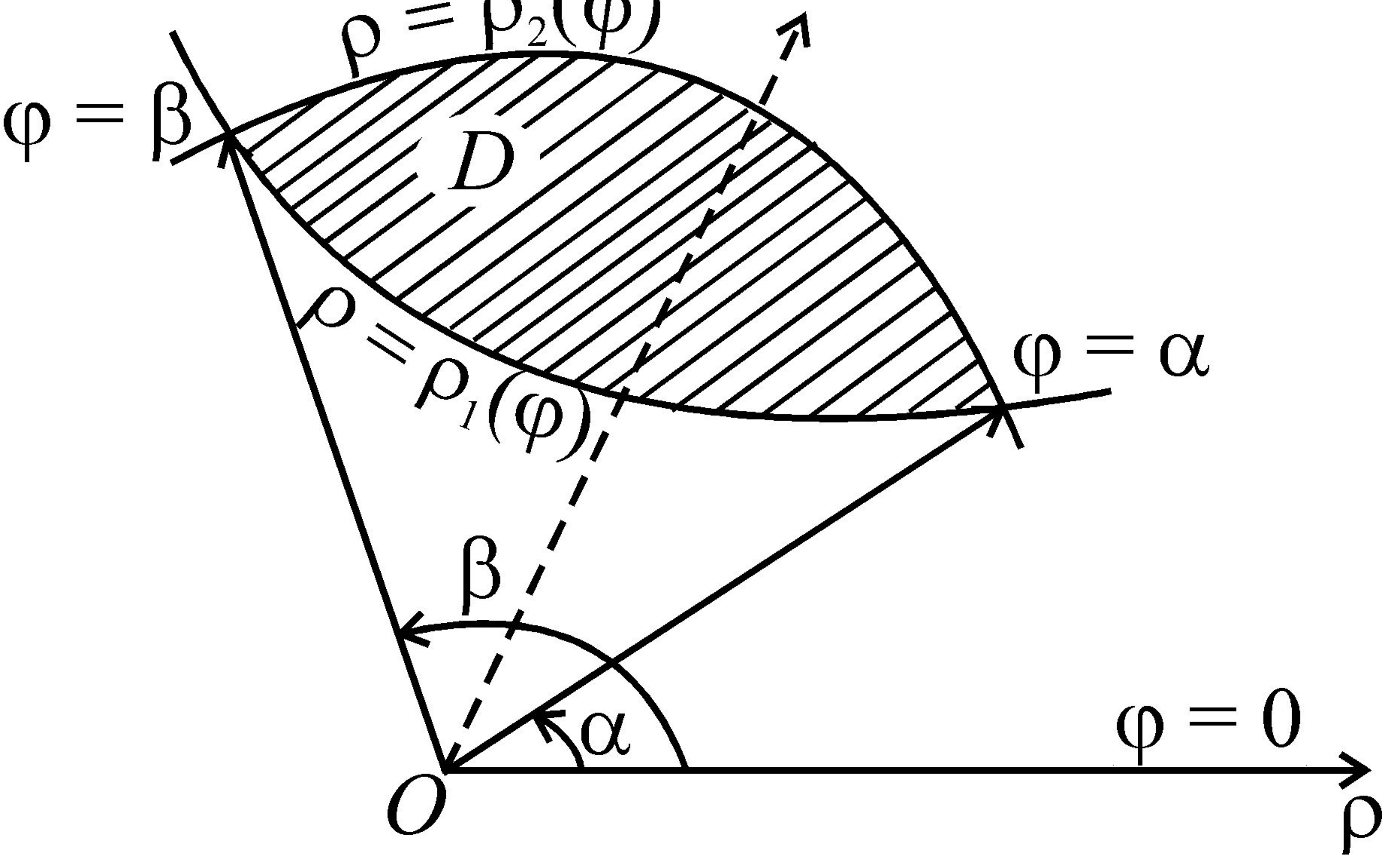
$\rho = \rho_2(\varphi)$
$\varphi = \beta$
D
$\rho = \rho_1(\varphi)$
$\varphi = \alpha$
β
α
$\varphi = 0$
O
ρ

Рисунок. 1.9

Приложения двойных интегралов к геометрии и механике

Самостоятельно!!!