Практика №4 (5117)

РАЗЛОЖЕНИЕ ОПРЕДЕЛИТЕЛЯ. НАХОЖДЕНИЕ ОБРАТНОЙ МАТРИЦЫ.

Была задана домашняя работа:

Вычислит
ь:

1) $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 4 & -2 & 5 \end{vmatrix} = -4;$

2) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{vmatrix} = -2;$

3) $\begin{vmatrix} -1 & 5 & 2 \\ 0 & 7 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = -14;$

4) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 4;$

5) свой вариант РГР (задача 2 а), б).) + $|A|$ (из задачи 1) на отдельных листах!!!

Дома сделать проверку A^{-1} из лекции №3

Минор

элемент a_{ij}

номер строки

номер столбца

$$M_{12} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{vmatrix};$$

$$\mathrm{M}_{12} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 0;$$

$$\mathrm{M}_{31} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -4;$$

$$\mathrm{M}_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2;$$

Алгебраическое дополнение

элемент a_{ij}

номер строки

номер столбца

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} M_{12} = (-1)^3 M_{12} = -M_{12};$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} M_{33} = (-1)^6 M_{33} = M_{33};$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{vmatrix};$$

$M_{12} = 0;\ A_{12} = -M_{12} = 0;$

$M_{31} = -4;\ A_{31} = (-1)^{3+1} M_{31} = (-1)^4 M_{31} = M_{31} = -4;$

$M_{33} = 2;\ A_{33} = M_{33} = 2;$

Разложение определителя

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

по строке с номером i :

$$|A| = a_{i1} \cdot A_{i1} + a_{i2} \cdot A_{i2} + a_{i3} \cdot A_{i3} = \sum_{j=1}^{3} a_{ij} \cdot A_{ij}$$

по столбцу с номером j :

$$|A| = a_{1j} \cdot A_{1j} + a_{2j} \cdot A_{2j} + a_{3j} \cdot A_{3j} = \sum_{i=1}^{3} a_{ij} \cdot A_{ij}$$

Разложение определителя

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{vmatrix} =$$

Больше всего нулей во второй строке (или во втором столбце) $\Rightarrow$ разложим определитель по второй строке :

$$|A| = a_{i1} \cdot A_{i1} + a_{i2} \cdot A_{i2} + a_{i3} \cdot A_{i3}\,, i = 2$$

$$= a_{21} \cdot A_{21} + a_{22} \cdot A_{22} + a_{23} \cdot A_{23} = 0 \cdot A_{21} + 2 \cdot A_{22} + 0 \cdot A_{23} =$$

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 & -5 \\ 8 & 7 & -2 \\ 2 & -1 & 8 \end{vmatrix} = 0\,;$$

$\Rightarrow$ вычислим только A_{22}: $A_{22} = (-1)^{2+2} M_{22} = M_{22} =$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 1 \cdot 3 - 2 \cdot 2 = 3 - 4 = -1;$$

$$= 2 \cdot (-1) = -2\,;$$ ОТВЕТ

Дома: разложить определитель по второму столбцу.

Разложение определителя

$$\begin{vmatrix} -1 & 5 & 2 \\ 0 & 7 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} =$$

Больше всего нулей во второй строке (или в третьем столбце)

$\Rightarrow$ разложим определитель по третьему столбцу :

$$|A| = a_{1j} \cdot A_{1j} + a_{2j} \cdot A_{2j} + a_{3j} \cdot A_{3j}\ , j = 3$$

$$= a_{13} \cdot A_{13} + a_{23} \cdot A_{23} + a_{33} \cdot A_{33} = \ 2 \cdot A_{13} + 0 \cdot A_{23} + 0\ \cdot A_{33} =$$

$$= 2 \cdot A_{13} + 0 + 0 = \ \Rightarrow$$

вычислим только A_{13}: $\quad A_{13} = \ (-1)^{1+3} M_{13} = \ M_{13} =$

$$= \begin{vmatrix} -1 & 5 & 2 \\ 0 & 7 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 7 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = \ 0 \cdot 2 - 7 \cdot 1 = \ 0 - 7 = \ -7;$$

$= \ 2 \cdot (-7) = \ -14$; ОТВЕТ

Дома: разложить определитель по второй строке .

Нахождение обратной матрицы.

свой вариант РГР (задача 2 а), б).) + |A| (из задачи 1) на отдельных листах!!!

1) $|\mathrm{A}| = -2\,;$ Вычисление этого определителя было задано на дом!

$-14\,;$

2) Найдем алгебраические дополнения для всех элементов матрицы A : $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 4 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

$A_{11} = (-1)^{1+1} M_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{vmatrix} = -4;$ $\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} =$

$A_{12} = (-1)^{1+2} M_{12} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 2;$ $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} =$

$A_{13} = (-1)^{1+3} M_{13} = a_{ij}$ $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$ $A_{12} = (-1)^{1+2} M_{12} =$

$A_{21} = (-1)^{2+1} M_{21} = (-1)^3 M_{12} = -M_{12};$ $(-1)^6 M_{33} = M_{33}$ $A_{33} = (-1)^{3+3} M_{33} =$

$A_{22} = (-1)^{2+2} M_{22} = \mathrm{M}_{12} = \mathrm{M}_{31} = 0;$

$A_{23} = (-1)^{2+3} M_{23} = A_{33} = A_{12} = 2;$

3) $\bar{A} = \begin{pmatrix} 4 & -7 & -6 \\ -8 & 9 & 10 \\ 4 & -5 & -6 \end{pmatrix}$

$A_{31} = (-1)^{3+1} M_{31} = 0;$ $\mathrm{M}_{33} = 2;$ $\mathrm{M}_{33} =$

$A_{32} = (-1)^{3+2} M_{32} = (-1)^{3+1} M_{31} = \mathrm{M}_{31} = -4;$ $(-1)^4 M_{31} =$ по строке с номером i :

$A_{33} = (-1)^{3+3} M_{33} =$ $a_{i1} \cdot A_{i1} + a_{i2} \cdot A_{i2} + a_{i3} \cdot A_{i3} = \sum_{j=1}^{3} a_{ij} \cdot A_{ij}$ $a_{1j} \cdot A_{1j} + a_{2j} \cdot A_{2j} + a_{3j} \cdot A_{3j} = \sum_{i=1}^{3} a_{ij} \cdot A_{ij}$ $|A| =$

4) $\overline{A} = \begin{pmatrix} 4 & -7 & -6 \\ -8 & 9 & 10 \\ 4 & -5 & -6 \end{pmatrix}$; $A^* = \left(\overline{A}\right)^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 4 & -8 & 4 \\ -7 & 9 & -5 \\ -6 & 10 & -6 \end{pmatrix}$;

5) $|A| = -4$; $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{4}{-4} & \frac{-8}{-4} & \frac{4}{-4} \\ \frac{-7}{-4} & \frac{9}{-4} & \frac{-5}{-4} \\ \frac{-6}{-4} & \frac{10}{-4} & \frac{-6}{-4} \end{pmatrix} =$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 7/4 & -9/4 & 5/4 \\ 3/2 & -5/2 & 3/2 \end{pmatrix};$$

Проверка: $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 4 & -2 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 7/4 & -9/4 & 5/4 \\ 3/2 & -5/2 & 3/2 \end{pmatrix} = C_{3\times3} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix};$$

$$c_{11} = (1 \quad 2 \quad -1) \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 7/4 \\ 3/2 \end{pmatrix} = 1 \cdot (-1) + \cancel{2} \cdot \frac{7}{\cancel{4}_{2}} + (-1) \cdot \frac{3}{2} = -1 + \frac{7}{2} - \frac{3}{2} = \frac{-2+7-3}{2} = \frac{2}{2} = 1;$$

$$c_{12} = (1 \quad 2 \quad -1) \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -9/4 \\ -5/2 \end{pmatrix} = 1 \cdot 2 + \cancel{2} \cdot \left(-\frac{9}{\cancel{4}}\right)_{2} + (-1) \cdot \left(\frac{-5}{2}\right) = 2 - \frac{9}{2} + \frac{5}{2} = \frac{4-9+5}{2} = \\ = \frac{0}{2} = 0;$$

$$c_{13} = (1 \quad 2 \quad -1) \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 5/4 \\ 3/2 \end{pmatrix} = 1 \cdot (-1) + \cancel{2} \cdot \frac{5}{\cancel{4}_{2}} + (-1) \cdot \left(\frac{3}{2}\right) = -1 + \frac{5}{2} - \frac{3}{2} = \frac{-2+5-3}{2} = \\ = \frac{0}{2} = 0;$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 4 & -2 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 7/4 & -9/4 & 5/4 \\ 3/2 & -5/2 & 3/2 \end{pmatrix} = C_{3\times3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix};$$

$$c_{21} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 7/4 \\ 3/2 \end{pmatrix} = 3 \cdot (-1) + 0 \cdot \frac{7}{4} + \cancel{2} \cdot \frac{3}{\cancel{2}} = -3 + 0 + 3 = 0;$$

$$c_{22} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -9/4 \\ -5/2 \end{pmatrix} = 3 \cdot 2 + 0 \cdot \left(-\frac{9}{4}\right) + \cancel{2} \cdot \left(-\frac{5}{\cancel{2}}\right) = 6 + 0 - 5 = 1;$$

$$c_{23} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 5/4 \\ 3/2 \end{pmatrix} = 3 \cdot (-1) + 0 \cdot \frac{5}{4} + \cancel{2} \cdot \frac{3}{\cancel{2}} = -3 + 0 + 3 = 0;$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 4 & -2 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ {}^{7}/_{4} & -{}^{9}/_{4} & {}^{5}/_{4} \\ {}^{3}/_{2} & -{}^{5}/_{2} & {}^{3}/_{2} \end{pmatrix} = C_{3\times 3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix};$$

$$c_{31} = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ {}^{7}/_{4} \\ {}^{3}/_{2} \end{pmatrix} = 4 \cdot (-1) + (-\cancel{2}) \cdot \frac{7}{\cancel{4}_{2}} + 5 \cdot \frac{3}{2} = -4 - \frac{7}{2} + \frac{15}{2} = \frac{-8 - 7 + 15}{2} = 0;$$

$$c_{32} = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -{}^{9}/_{4} \\ -{}^{5}/_{2} \end{pmatrix} = 4 \cdot 2 + (-\cancel{2}) \cdot \left(-\frac{9}{\cancel{4}}\right)_{2} + 5 \cdot \left(-\frac{5}{2}\right) = 8 + \frac{9}{2} - \frac{25}{2} =$$

$$= \frac{16 + 9 - 25}{2} = 0;$$

$$c_{33} = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ {}^{5}/_{4} \\ {}^{3}/_{2} \end{pmatrix} = 4 \cdot (-1) + (-\cancel{2}) \cdot \frac{5}{\cancel{4}_{2}} + 5 \cdot \frac{3}{2} = -4 - \frac{5}{2} + \frac{15}{2} = \frac{-8 - 5 + 15}{2} =$$

$$= \frac{2}{2} = 1;$$

ОТВЕТ:

$C_{3\times 3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ - единичная матрица, поэтому обратная матрица найдена верно.

Домашняя работа
(на отдельных листах)

1) Найти A^{-1} - обратную матрицу(и сделать проверку) для матрицы A из задачи 1 своего варианта РГР .