Регрессионный анализ

Понятие регрессии

- Для выражения регрессии служат эмпирические и теоретические ряды, их графики — *линии регрессии*, а также *корреляционные уравнения (уравнения регрессии) и коэффициент линейной регрессии.*

- Показатели регрессии выражают корреляционную связь двусторонне, учитывая изменение средней величины признака *Y* при изменении значений *xi* признака *X*, и, наоборот, показывают изменение средней величины признака *X* по измененным значениям *yi* признака *Y*. Исключение составляют временные ряды, или ряды динамики, показывающие изменение признаков во времени. Регрессия таких рядов является односторонней.

Ряды регрессии, особенно их графики, *дают наглядное представление о форме и тесноте корреляционной связи между признаками,* в чем и заключается их ценность. Форма связи между показателями, влияющими на уровень спортивного результата и общей физической подготовки занимающихся физической культурой и спортом, может быть разнообразной. И поэтому задача состоит в том, чтобы любую форму корреляционной связи выразить уравнением определенной функции (линейной, параболической и т.д.), что позволяет получать нужную информацию о корреляции между переменными величинами Y и X, предвидеть возможные изменения признака Y на основе известных изменений X, связанного с Y корреляционно.

Уравнение линейной регрессии

Обычно признак Y рассматривается как функция многих аргументов — *x1, x2, x3, ...*— и может быть записана в виде:

$$y = a + bx1 + cx2 + dx3 + ...$$

a, b, c и *d* — параметры уравнения, определяющие соотношение между аргументами и функцией. В практике учитываются не все, а лишь некоторые аргументы, в простейшем случае, как при описании линейной регрессии, — всего один:

$$y = a + bx$$

В этом уравнении параметр ***a*** — свободный член; графически он представляет отрезок ординаты **(y)** в системе прямоугольных координат. Параметр ***b*** называется коэффициентом регрессии. С точки зрения аналитической геометрии ***b***— угловой коэффициент, определяющий наклон линии регрессии по отношению к осям, координат. В области регрессионного анализа этот параметр показывает, насколько в среднем величина одного признака **(*Y*)** изменяется при изменении на единицу меры другого корреляционно связанного с ***Y*** признака ***X***. Наглядное представление об этом параметре и о положении линий регрессии ***Y*** по ***X*** и ***X*** по ***Y*** в системе прямоугольных координат дает следующий рисунок -

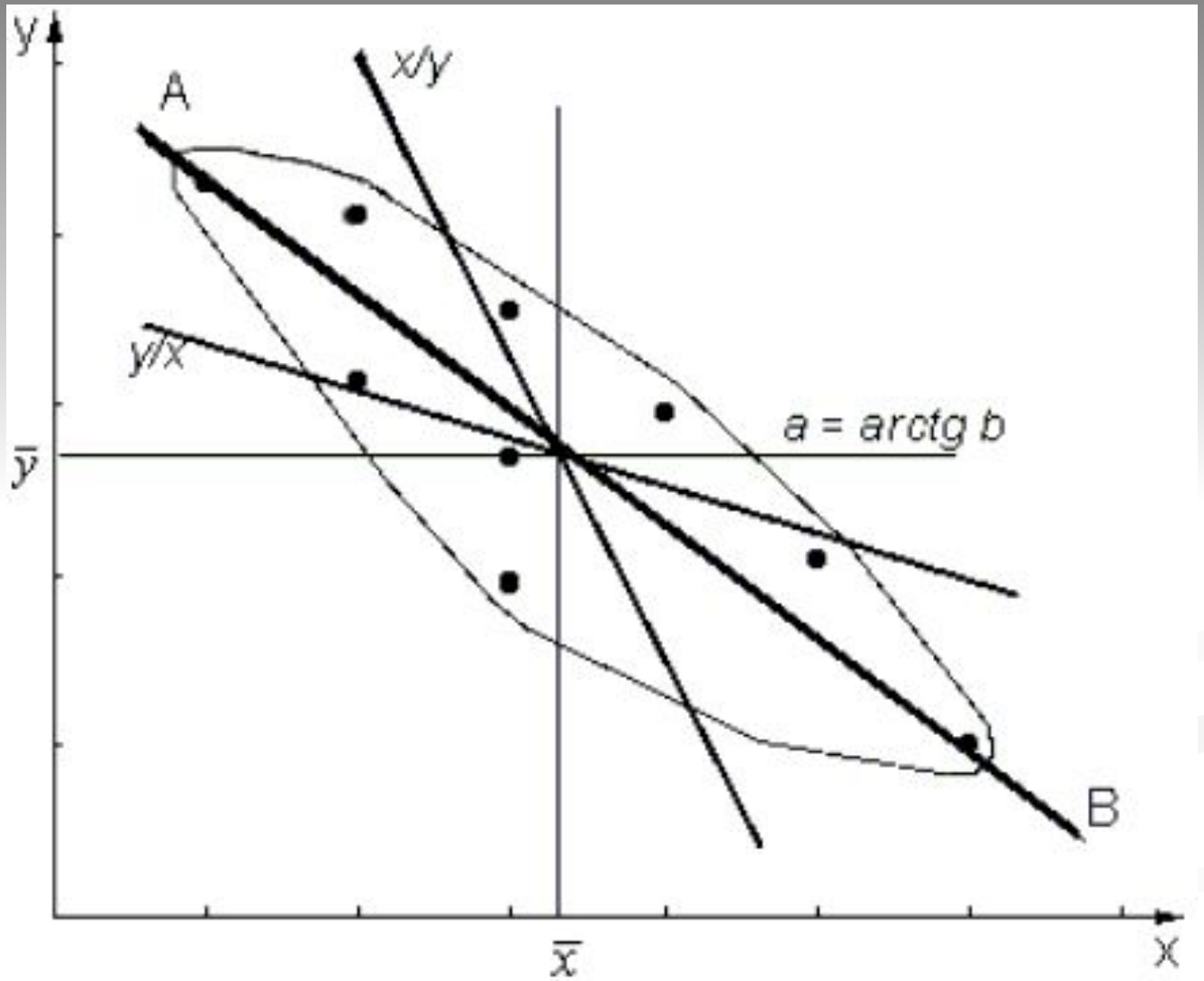


Схема линий регрессии *Y* по *X* и *X* по *Y* в системе прямоугольных координат.

Линии регрессии, как показано, пересекаются в точке **0**, соответствующей средним арифметическим значениям корреляционно связанных друг с другом признаков ***Y* и *X***. Линия **AB**, проходящая через эту точку, изображает полную (функциональную) зависимость между переменными величинами ***Y* и *X***, когда коэффициент корреляции ***r = 1***. Чем сильнее связь между ***Y* и *X***, тем ближе линии регрессии к **AB**, и, наоборот, чем слабее связь между варьирующими признаками, тем более удаленными оказываются линии регрессии от AB. При отсутствии связи между признаками, когда ***r = 0***, линии регрессии оказываются под прямым углом **(90°)** по отношению друг к другу.

Уравнение регрессии тем лучше описывает зависимость, чем меньше рассеяние диаграммы, чем больше теснота взаимосвязи. Уравнение прямой линии пригодно для описания только линейных зависимостей. В случае нелинейных зависимостей математическая запись может отображаться уравнениями параболы, гиперболы и др.Необходимо также сделать одно важное замечание о значении показателей, характеризующих взаимосвязь признаков (коэффициентов корреляции, регрессии и т. п.). Все они дают лишь количественную меру связи, но ничего не говорят о причинах зависимости. Определить эти причины — дело самого исследователя.

Коэффициенты уравнения парной линейной регрессии

Как уже было определено выше, в случае линейной зависимости уравнение регрессии является уравнением прямой линии. Таких уравнений два:

$Y = a1 + by/xX$ — прямое

и $X = a2 + bx/yY$ — обратное,

где: a и b – коэффициенты, или параметры, которые надлежит определить. Значение коэффициентов регрессии вычисляется по формуле:

$$b_{x/y} = r \cdot \frac{\sigma_x}{\sigma_y} = \frac{\sum (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum (y_i - \bar{y})^2}$$

$$b_{y/x} = r \cdot \frac{\sigma_y}{\sigma_x} = \frac{\sum (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum (x_i - \bar{x})^2}$$

Коэффициенты регрессии b имеют размерность, равную отношению размерностей изучаемых показателей X и Y, и тот же знак, что и коэффициент корреляции.

Коэффициенты *a* определяются по формуле:

$$a_1 = \bar{y} - b_{y/x} \cdot \bar{x}$$

$$a_2 = \bar{x} - b_{x/y} \cdot \bar{y}$$

Чтобы вычислить этот коэффициенты, надо просто в уравнения регрессии подставить средние значения коррелируемых переменных.
Для оценки качества уравнений регрессии вычисляются остаточные средние квадратические отклонения (или абсолютные погрешности уравнений) по формуле:

$$\sigma_{y/x} = \sigma_y \cdot \sqrt{1 - r^2} \qquad \text{и} \qquad \sigma_{x/y} = \sigma_x \cdot \sqrt{1 - r^2}$$

Эти оценки абсолютны и, следовательно, не могут быть сравнимы друг с другом. Поэтому вводят оценки ***относительной погрешности уравнений***, которые выражаются в процентах и **с*лужат для точности предсказания (прогнозирования) результатов одного показателя по заранее известным значениям другого***. Относительные погрешности уравнений регрессии определяются по формуле:

$$\sigma'_{y/x} = \frac{\sigma_{y/x}}{\bar{y}} \cdot 100\% \qquad \text{и} \qquad \sigma'_{x/y} = \frac{\sigma_{x/y}}{\bar{x}} \cdot 100\%$$

Связь между коэффициентами регрессии и корреляции

Между коэффициентом корреляции и параметром парной линейной регрессии существует зависимость, которая применительно к выборочным оценкам может быть представлена следующим образом:

$$b = r_{xy} \cdot \frac{S_y}{S_x}$$

где: и S_y, S_x – средние квадратические ошибки.

Приведенное выражение позволяет оценить параметр регрессии без решения системы нормальных уравнений при условии, что коэффициент корреляции уже определен. На основе формулы легко показать, что ***выборочный коэффициент корреляции*** равен среднему геометрическому выборочных коэффициентов регрессии. Действительно, Сравнив формулы с основной формулой коэффициента корреляции, видим, что их числители равны $\sum (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$

Это свидетельствует об определенной связи между этими характеристиками. Выборочный коэффициент корреляции выражается тогда равенством $r2 = by/x * bx/y$, откуда

$$r = \pm\sqrt{b_{y/x} \cdot b_{x/y}}$$

Эта формула ценна тем, что, во-первых, может быть использована для нахождения неизвестной величины коэффициента корреляции по известным значениям коэффициента регрессии ***by/x*** **и** ***bx/y***, а во-вторых, позволяет контролировать правильность расчета коэффициента корреляции, если известны величины ***by/x*** **и** ***bx/y*****.**

Знак выборочного коэффициента корреляции совпадает со знаком выборочных коэффициентов регрессии, что следует из формулы . Если зависимость между признаками функциональная, то ***by/x = 1 / bx/y*** и, следовательно, ***r = 1***. И, наоборот, при полном отсутствии взаимосвязи между признаками ***by/x= 0, bx/y= 0*****, и** ***r = 0*****.**

Определение параметров парной линейной регрессии

Определение параметров линейной регрессии – одна из задач регрессионного анализа. Она решается способом наименьших квадратов, основанным на требовании, чтобы сумма квадратов отклонений вариант от линии регрессии была наименьшей. *Этому требованию удовлетворяет следующая система нормальных уравнений:*

$$an + b\sum x = \sum y,$$

$$a\sum x + b\sum x^2 = \sum xy.$$

Ряды регрессии — это ряды усредненных значений (*yx* и *xy*) варьирующих признаков *Y* и *X*, соответствующих значениям аргументов x_i и y_i. Поэтому эмпирические уравнения регрессии следует записывать так:

$$y_x = ay/x + by/x*x$$

$$x_y = ax/y + bx/y*y$$

Формулы для определения параметров ***a*** **и** ***b*** принимают следующие выражения:

$$a_{y/x} = \bar{y} - b_{y/x} \cdot \bar{x}$$

$$a_{x/y} = \bar{x} - b_{x/y} \cdot \bar{y}$$

Уравнение линейной регрессии можно выразить в виде отклонений вариант от их средних арифметических:

$$y_x - \bar{y} = b_{y/x} \cdot (x_i - \bar{x})$$

$$x_y - \bar{x} = b_{x/y} \cdot (y_i - \bar{y})$$

В таком случае система нормальных уравнений для определения параметров *a* и *b* будет следующая:

$$an + b\sum (x_i - \bar{x}) = \sum (y_i - \bar{y});$$

$$a\sum (x_i - \bar{x}) + b\sum (x_i - \bar{x})^2 = \sum (y_i - \bar{y})(x_i - \bar{x}).$$

Заменив параметры *by/x* и *bx* получим систему уравнений парной линейной регрессии:

$$y_x = \bar{y} + \frac{\sum (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum (x_i - \bar{x})^2} \cdot (x - \bar{x})$$

$$x_y = \bar{x} + \frac{\sum (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum (y_i - \bar{y})^2} \cdot (y - \bar{y})$$

Формулы расчета свободных коэффициентов

$$a_0 = \frac{\sum y_i \cdot \sum x_i^2 - \sum x_i \cdot \sum x_i y_i}{\sum x_i^2 - \sum (x_i)^2}$$

$$b_0 = \frac{\sum x_i \cdot \sum y_i^2 - \sum y_i \cdot \sum x_i y_i}{\sum y_i^2 - \sum (y_i)^2}$$

Упрощенные формулы для расчета коэффициентов регрессии получаются из систем уравнений

$$\begin{cases} \mathrm{a}_0 \cdot N + a_1 \sum x_i = \sum y_i \\ a_0 \cdot \sum x_i + a_1 \cdot \sum (x_i \cdot x_i) = \sum y_i \cdot x_i \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mathrm{b}_0 \cdot N + b_1 \sum y_i = \sum x_i \\ b_0 \cdot \sum y_i + b_1 \cdot \sum (y_i \cdot y_i) = \sum y_i \cdot x_i \end{cases}$$

Графическое представление уравнения парной линейной регрессии

Эмпирические ряды регрессии *Y* по *X* и *X* по *Y* изображаются в виде линейного графика, при построении которого наиболее точным является использование способа наименьших квадратов, предложенного в 1806 г. К. Гауссом и независимо от него А. Лежандром. В основу этого способа положена теорема, согласно которой сумма квадратов отклонений вариант (*xi*) от средней арифметической $\bar{x}$ - есть величина наименьшая, т. е. $\sum (x_i - \bar{x})^2 = \min$

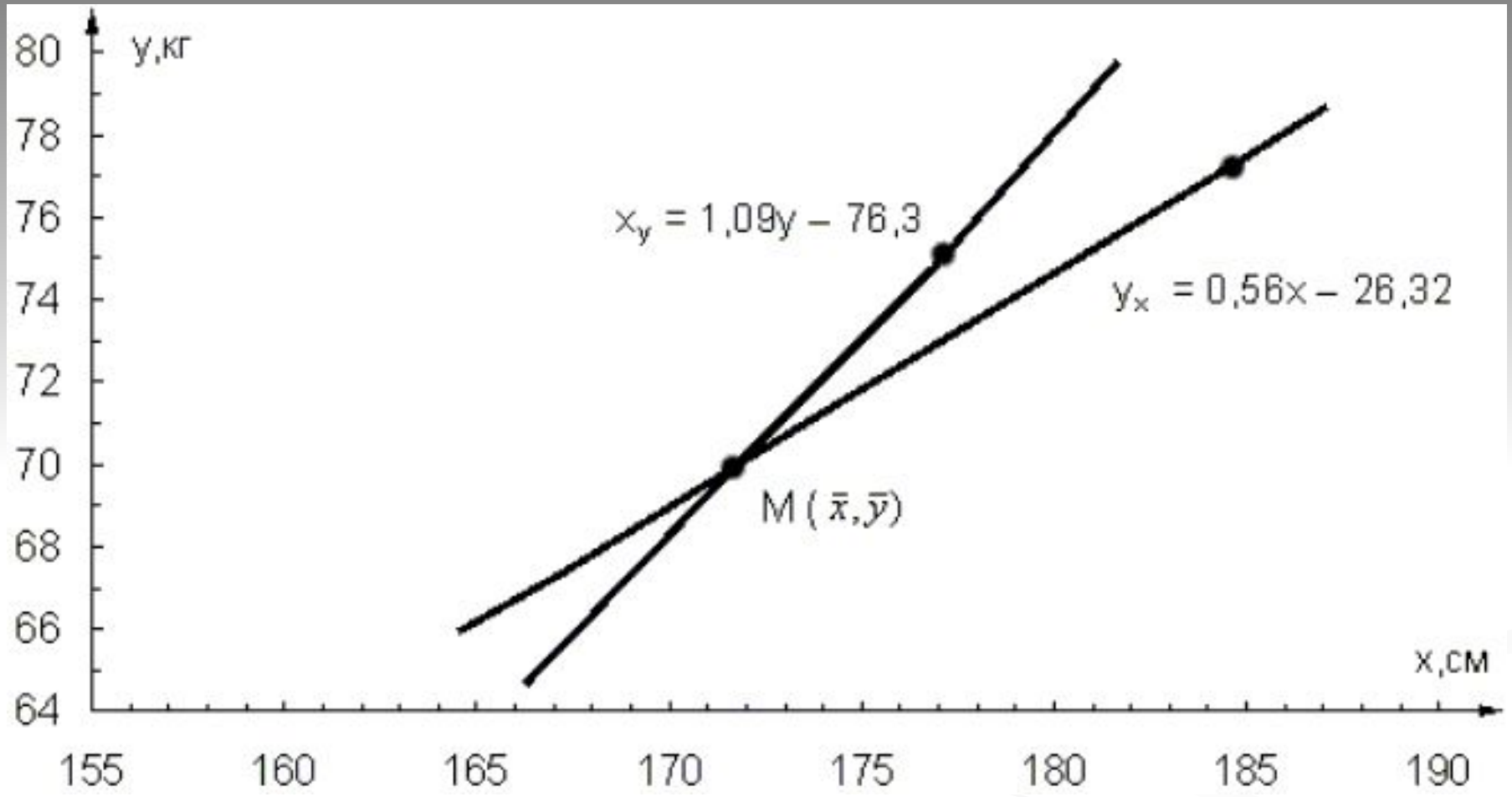
При графическом изображении эмпирического уравнения регрессии (например, показатели роста и веса 10 исследуемых), представленного на рисунке используется следующая последовательность:

1.Определив форму и направление взаимосвязи между эмпирическими данными на основе данных расчета нормированного коэффициента корреляции, производят расчет уравнений регресиии (прямого и обратного) по формуле.

2. Подставляя в конечный вид уравнений, выражающих зависимость между переменными величинами *Y* и *X*, эмпирические данные *xi* и *yi* находят координаты точек линий регрессии для усредненных значений *yx* и *xy*.

3. На графике, выполненном в прямоугольной системе координат, на оси *x* откладывают значения переменных *xi*, на оси *y* – значения *yi* и отмечают точками рассчитанные координаты линий регрессии для усредненных значений *yx* и *xy* .

4. Две линии регрессии на графике пересекаются в точке М с координатами средних значений показателей *xi* и *yi*.



Графическое изображение эмпирического уравнения регрессии.

График линий регрессии отражает ряды теоретически ожидаемых значений функции по известным значениям аргумента. При этом, чем сильнее взаимосвязь между величинами *xi* и *yi*, тем меньше угол между линиями регрессии. При r = ± 1 линии уравнения регресии либо совпадают, либо расположены параллельно, так как корреляционная зависимость между признаками в этом случае переходит в функциональную. И, наоборот, чем слабее зависимость между признаками, тем больше угол между линиями на графике. При r = 0 линии регрессии расположены перпендикулярно.

Коэффициент τ - Кендалла

$$\tau_{\text{ýìï}} = \frac{P-Q}{N\cdot(N-1)}\cdot\frac{1}{2} = 1-\frac{4\cdot Q}{N\cdot(N-1)} = \frac{4\cdot P}{N\cdot(N-1)} - 1$$

P – число совпадений

Q – число инверсий

N – число ранжируемых признаков

Расчет уровня значимости коэффициента корреляции

$$Tф = |r_{ýìï}| \cdot \sqrt{\frac{n-2}{1-r_{ýìï}^2}}$$

Величина $T_ф$ проверяется на уровень значимости по таблице для t-критерия Стьюдента