Министерство образования и науки РФ
ФГБОУ ВПО «Уральский государственный педагогический университет»
Математический факультет
Кафедра высшей математики

Математика

Лекция 7. Дифференцирование и дифференциал. Производные высших порядков. Основные теоремы дифференциального исчисления. Правила Лопиталя.

Лектор: Бодряков В.Ю. E-mail: Bodryakov_VYu@e1.ru
Поток: 1 к. ИКРиМ, 2012-2013 уч.г.

Екатеринбург - 2012

Рекомендуемая литература

1. Берман Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа: учеб пособие. СПб.: Лань, 2007. – 448 с.
2. Письменный Д.Т. Конспект лекций по высшей математике: [в 2 ч.]. Ч. 1. – М.: Айрис – Пресс, 2008. – 288 с.
3. Тер-Крикоров А.М., Шабунин М.И. Курс математического анализа: учебное пособие для вузов. М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2009. – 672 с.
4. Фихтенгольц Г.М. Основы математического анализа. Ч. 1. СПб.: Лань, 2005. – 448 с., Ч.2, 2005. – 464 с.
5. Электронный ресурс: www.exponenta.ru

Содержание лекции

§1. Дифференцирование неявных и параметрически заданных функций. Логарифмическое дифференцирование

§2. Производные высших порядков

§3. Дифференциал функции

§4. Основные теоремы дифференциального исчисления

§5. Правила Лопиталя

§1. Дифференцирование неявных и параметрически заданных функций. Логарифмическое дифференцирование

1.1. Неявно заданная функция

Df: Говорят, что функция **задана в явном виде (явная функция)**, если она может быть выражена уравнением $y = f(x)$, разрешенном относительно y.

Df: Говорят, что функция **задана в неявном виде (неявная функция)**, если она не может быть выражена уравнением $y = f(x)$, разрешенном относительно y; в этом случае функция задается неявным уравнением $F(x; y) = 0$.

Так, неявно заданными функциями будут функции

$y + 2x + \cos y = 1$; $e^y - x + y = 0$; $4x^2 + 9y^2 - 16 = 0$, и др. Неявно заданные функции трудно или невозможно (однозначно) разрешить относительно y.

Однако, для нахождения производной $y' \equiv y_x'$ нет необходимости в получении явного выражения $y = y(x)$.

1.1. Неявно заданная функция (продолжение)

П р а в и л о дифференцирования функции, неявно заданной уравнением $F(x; y) = 0$.

Для вычисления производной $y' \equiv y_x'$ неявно заданной функции, достаточно уравнение $F(x; y) = 0$ продифференцировать по x, рассматривая при этом y как функцию x, и полученное уравнение затем разрешить относительно производной y'.

При этом производная $y' = y'(x; y)$ будет выражена через обе переменные x и y.

П р и м е р 1. Найти производную y' неявно заданной функции: $F(x; y) = x^3 + y^3 - 3xy = 0$.

Решение: $F_x' = 3x^2 + 3y^2 y' - 3y - 3x y' = 0$,

откуда $x^2 - y + (y^2 - x)y' = 0$ и $y' = \dfrac{y - x^2}{y^2 - x}$.

Ответ: $y' = (y - x^2)/(y^2 - x)$.

1.2. Функция, заданная параметрически

* ***Df***: Говорят, что функция **задана в параметрическом виде (параметрически)**, если она может быть выражена системой (парой) уравнений

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases}$$

где t – вспомогательная независимая переменная (*параметр*).

Параметрическое задание функции бывает удобным в тех случаях, когда явное выражение функции $y = y(x)$ получить невозможно или затруднительно. Если под $x(t)$ и $y(t)$ понимать координаты точки при ее движении на плоскости, то параметр t можно интерпретировать как время.

Так, движение тела, брошенного горизонтально с начальной скоростью v_0 с высоты, равной h, есть

$$\begin{cases} x = v_0 t, \\ y = h - \frac{1}{2} g t^2. \end{cases}$$

1.2. Функция, заданная параметрически (продолжение)

* Вычислим производную y_x', считая, что функции $x = x(t)$, $y = y(t)$ имеют производные (по параметру t), и, кроме того, функция $x = x(t)$ имеет обратную $t = \varphi(x)$. Производную y_x' найдем как производную сложной функции:

$$y_x' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{dy}{dt} \Big/ \frac{dx}{dt} = \frac{y_t'}{x_t'}.$$

Полученная формула позволяет находить производную y_x' функции, заданной параметрически, не находя собственно зависимости y от x.

П р и м е р 2. Найти производную y_x' функции, заданной параметрически: $\begin{cases} x = t^3, \\ y = t^2. \end{cases}$

Решение: Согласно выведенной формуле, имеем: $y_t' = 2t$, $x_t' = 3t^2$, так что $y_x' = y_t' / x_t' = \frac{2t}{3t^2} = \frac{2}{3t} = \{t = \sqrt[3]{x}\} = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$.

Ответ: $y_x' = \frac{2}{3t} = \{t = \sqrt[3]{x}\} = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$.

1.3. Логарифмическое дифференцирование

Иногда для нахождения производной функции $y = f(x)$ эту функцию удобно сначала прологарифмировать, и лишь затем вычислять производную. Этот подход основан на соотношении

$$(\ln y)' = \frac{y'}{y} \Rightarrow$$

$$y' = y \cdot (\ln y)'.$$

Подход эффективен в тех случаях, когда логарифм функции представляет собой легко дифференцируемое выражение.

***Df*:** Производная функции $y = f(x)$, вычисленная после предварительного логарифмирования функции, называется **логарифмической производной**, а процесс ее вычисления – **логарифмическим дифференцированием**.

***Df*:** Есть функции, производные которых находят лишь логарифмическим дифференцированием. К их числу относится **степенно-показательная функция** $y(x) = u(x)^{v(x)}$ $(u(x) > 0)$.

1.3. Логарифмическое дифференцирование (продолжение)

Вычислим производную степенно – показательной функции $y = u^v$, где $u(x)$ и $v(x)$ – дифференцируемые функции от x $(u(x) > 0)$.

$$y' = (u^v)' = y\cdot(\ln y)' = u^v\cdot(v\cdot\ln u)' = u^v\cdot\left(v'\cdot\ln u + v\cdot\frac{u'}{u}\right).$$

З а м е ч а н и е: Вместо запоминания полученной формулы проще запомнить сам принцип логарифмического дифференцирования.

П р и м е р 3. Вычислить производную функции $y = x^x$ $(x > 0)$.

<u>Решение</u>: Вычислим производную данной функции с помощью логарифмического дифференцирования:

$y' = y\cdot(\ln y)' = x^x\cdot(x\cdot\ln x)' = x^x\cdot(\ln x + 1)$.

<u>Ответ</u>: $(x^x)' = x^x\cdot(\ln x + 1)$.

§2. Производные высших порядков
2.1. Явно заданные функции

Df: Производная функции $y = f(x)$ сама в общем случае является функцией от x: $y' = f'(x)$ и называется **производной первого порядка** функции $y = f(x)$.

Df: Если функция $f'(x)$ дифференцируема, то ее производная называется **производной второго порядка** функции $y = f(x)$. В этом случае говорят, что функция $y = f(x)$ **дважды дифференцируема**. Производная второго порядка обозначается как y'' (или $f''(x)$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, $\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)$). Итак, $y'' = (y')'$.

Df: Если функция $f''(x)$ дифференцируема, то ее производная называется **производной третьего порядка** функции $y = f(x)$. В этом случае говорят, что функция $y = f(x)$ **трижды дифференцируема**. Производная 3-го порядка обозначается: y''' (или $f'''(x)$, $\frac{d^3y}{dx^3}$, $\frac{d}{dx}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)$). Итак, $y''' = (y'')'$.

2.1. Явно заданные функции (продолжение)

***Df*: Производной $y^{(n)}$ n-го порядка** (или ***n*-ой производной**) функции $y = f(x)$ называется производная от производной $(n-1)$-го порядка:

$$y^{(n)} = (y^{(n-1)})'.$$

Производные порядков выше первого называются **производными высших порядков.**

Начиная с производных четвертого порядка, порядок производных обозначают римскими цифрами или числом в скобках; так, y^{IV} или $y^{(4)}$ – производная 4-го порядка.

П р и м е р 4. Найти 13-ю производную функции $y = \sin x$.

<u>Решение</u>: Для выявления закономерности вычислим несколько первых производных данной функции: $y' = (\sin x)' = \cos x$; $y'' = (\cos x)' = -\sin x$; $y''' = (-\sin x)' = -\cos x$; $y^{IV} = (-\cos x)' = \sin x$. Т. о., четвертая производная дает исходную функцию $y = \sin x$ и цикл замыкается. Поэтому $y^{(13)} = y' = \cos x$.

<u>Ответ</u>: $y^{(13)} = y' = \cos x$.

2.2. Неявно заданные функции

Пусть функция $y = f(x)$ задана неявно уравнением $F(x; y) = 0$. Требуется найти производные высших порядков переменной y по независимой переменной x.

Продифференцировав уравнение $F(x; y) = 0$ по x и разрешив полученное уравнение относительно y', найдем производную первого порядка (первую производную) $y' = y'(x; y)$. Продифференцировав вновь выражение $y'(x; y)$ по x получим вторую производную y'' от неявно заданной функции. В выражение для y'' войдут x, y, y'. Подставляя уже найденное значение y' в выражение для второй производной, получим выражение для второй производной $y'' = y''(x; y)$.

Аналогично вычисляют производные третьего, четвертого и более высоких порядков.

2.2. Неявно заданные функции

Пример 5. Найти первые три производные y по x в заданной неявным образом функции: $x^2 + y^2 = 1$.

Решение: Продифференцируем уравнение $F(x; y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$ по x: $2x + 2yy' = 0$, или $x + yy' = 0$. Отсюда

$$y' = -\frac{x}{y}.$$

Продифференцируем полученное выражение для первой производной $y' = y'(x; y)$ по x:

$$y'' = (y')' = \left(-\frac{x}{y}\right)' = -\frac{y - xy'}{y^2} = -\frac{y + x\frac{x}{y}}{y^2} = -\frac{x^2 + y^2}{y^3} = -\frac{1}{y^3}.$$

Аналогично поступим и для вычисления y''':

$$y''' = (y'')' = \left(-\frac{1}{y^3}\right)' = \frac{3y'}{y^4} = \frac{3\left(-\frac{x}{y}\right)}{y^4} = -\frac{3x}{y^5}.$$

Ответ: $y' = -\frac{x}{y}$; $y'' = -\frac{1}{y^3}$; $y''' = -\frac{3x}{y^5}$.

§3. Дифференциал функции
3.1. Основные понятия

Пусть функция $y = f(x)$ имеет в точке x отличную от нуля производную $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) \neq 0$. Тогда по теореме о связи функции, ее предела и бесконечно малой функции, можно записать: $\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \alpha$, где $\alpha \to 0$ при $\Delta x \to 0$. Т.о.,

$$\Delta y = f'(x)\Delta x + \alpha\Delta x,$$

т.е. приращение функции Δy представляет собой сумму двух слагаемых $f'(x)\Delta x$ и $\alpha\Delta x$, являющихся бесконечно малыми при $\Delta x \to 0$. При этом первое слагаемое есть бесконечно малая функция (б.м.ф.) одного порядка с Δx, так как $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f'(x)\Delta x}{\Delta x} = f'(x) \neq 0$, а второе слагаемое есть б.м.ф. более высокого порядка, чем Δx, т.к. $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\alpha\Delta x}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \alpha = 0$.

Поэтому первое слагаемое $f'(x)\Delta x$ называется *главной частью приращения функции* Δy.

§3. Дифференциал функции (продолжение)

Df: **Дифференциалом (первого порядка) функции** $y = f(x)$ называется главная часть ее приращения:

$$dy = f'(x)\Delta x.$$

Замечая, что если $y = x$, то $dy = dx = \Delta x$, выражение для дифференциала,можно переписать в общепринятом виде:

$$dy = f'(x)dx.$$

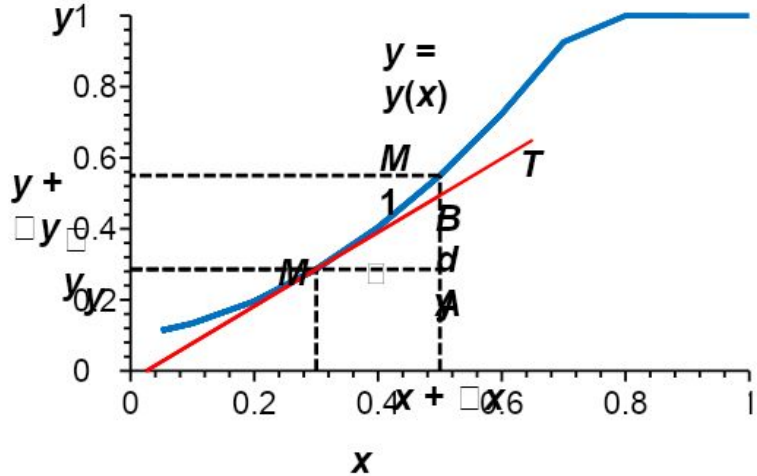
Т.е., **дифференциал функции равен произведению производной функции на дифференциал независимой переменной.**

Из последней формулы следует равенство $\frac{dy}{dx} = f'(x)$, так что обозначение $\frac{dy}{dx}$ можно рассматривать и как обозначение производной y', и как дробь – отношение дифференциалов dy и dx переменных y и x.

3.2. Геометрический смысл дифференциала функции

Выясним геометрический смысл дифференциала.

Для этого проведем к графику функции $y = f(x)$ в точке M $(x; y)$ касательную MT и рассмотрим ординату этой касательной для точки с абсциссой $x + \Delta x$ (см. рис.).



На рис.: $|AM| = \Delta x$, $|AM_1| = \Delta y$, $|AB| = dy$. Из прямоугольного треугольника ΔAMB имеем $\operatorname{tg} \alpha = AB/AM = dy/dx = f'(x)$.

Дифференциал функции $y = f(x)$ **в точке** x **равен приращению ординаты этой касательной в т.** $x + \Delta x$.

3.3. Основные теоремы о дифференциалах

Основные теоремы о дифференциалах легко получить, используя связь дифференциала и производной функции $y = f(x)$, а именно $dy = f'(x)$, и соответствующие теоремы о производных. Так, можно утверждать, что дифференциал постоянной величины $y = c$ равен нулю. Действительно, в этом случае $dy = c'dx = 0 \cdot dx = 0$.

Пусть $u = u(x)$ и $v = v(x)$ – две дифференцируемые в некотором интервале $(a; b)$ функции.

Т е о р е м а 1. Дифференциал суммы, произведения и частного двух функций определяется формулами:

$$d(u + v) = du + dv; \quad d(uv) = v \cdot du + u \cdot dv; \quad d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vdu - udv}{v^2}.$$

Доказательство: Осуществляется на основании соответствующих теорем о производных (СРС).

3.3. Основные теоремы о дифференциалах (продолжение)

Т е о р е м а 2. Дифференциал сложной функции равен произведению производной этой функции по промежуточному аргументу на дифференциал этого промежуточного аргумента:

$$dy = y_u' \cdot du.$$

Доказательство: Пусть $y = f(u)$ и $u = \phi(x)$ – две дифференцируемые функции, образующие сложную функцию $y = f(\phi(x))$. По теореме о производной сложной функции можем написать: $y_x' = y_u' \cdot u_x'$. Умножив обе части этого равенства на dx, имеем: $y_x' \cdot dx = y_u' \cdot u_x' \cdot dx$. Заметив, что $y_x' \cdot dx = dy$ и $u_x' \cdot dx = du$, получаем требуемое:

$$dy = y_u' \cdot du,$$

ч.т.д.

3.3. Основные теоремы о дифференциалах (продолжение)

Сравнивая формулы для дифференциалов

$$dy = y_x' \cdot dx$$

и

$$dy = y_u' \cdot du,$$

видим, что они имеют один и тот же вид, независимо от того, является ли аргумент функции $y(x)$ или $y(u)$ независимой переменной x или сам является функцией другого аргумента $u = u(x)$.

Df**:** Независимость вида (первого) дифференциала от того является ли аргумент функции независимой переменной или сам является функцией другого аргумента, называется **инвариантностью (неизменностью) формы первого дифференциала**.

3.4. Таблица дифференциалов

С помощью определения дифференциала и основных теорем о дифференциалах легко преобразовать таблицу производных в таблицу дифференциалов.

Основные теоремы о дифференциалах

1. $d(u \pm v) = du \pm dv$;

2. $d(u \cdot v) = du \cdot v + u \cdot dv$; в частности, $d(c \cdot u) = c \cdot du$;

3. $d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{du \cdot v - u \cdot dv}{v^2}$; в частности, $d\left(\frac{c}{v}\right) = -\frac{c dv}{v^2}$;

4. $dy = y_x' \cdot dx$, если $y = f(x)$;

5. $dy = y_u' \cdot du$, если $y = f(u)$, $u = \varphi(x)$.

Формулы дифференциалов

1. $dc = 0$;

2. $d(u^\alpha) = \alpha u^{\alpha-1} du$, $\alpha \in \boldsymbol{R}$;

3. $d(a^u) = a^u \cdot \ln a \cdot du$; в частности, $d(e^u) = e^u du$;

3.4. Таблица дифференциалов (продолжение)

4. $d(\log_a u) = \frac{du}{u \cdot \ln a}$; в частности, $d(\ln u) = \frac{du}{u}$;
5. $d(\sin u) = \cos u\, du$;
6. $d(\cos u) = -\sin u\, du$;
7. $d(\operatorname{tg} u) = \frac{du}{\cos^2 u}$;
8. $d(\operatorname{ctg} u) = -\frac{du}{\sin^2 u}$;
9. $d(\arcsin u) = \frac{du}{\sqrt{1-u^2}}$;
10. $d(\arccos u) = -\frac{du}{\sqrt{1-u^2}}$;
11. $d(\operatorname{arctg} u) = \frac{du}{1+u^2}$;
12. $d(\operatorname{arcctg} u) = -\frac{du}{1+u^2}$.

З а м е ч а н и е: Для вычисления дифференциалов большинства функций достаточно знать выписанные правила и формулы дифференцирования и строго придерживаться их при решении задач.

3.5. Применение дифференциала к приближенным вычислениям

Как известно, приращение Δy функции $y = f(x)$ в точке x можно представить в виде $\Delta y = f'(x) \cdot \Delta x + \alpha \cdot \Delta x$, где $\alpha \to 0$ при $\Delta x \to 0$. Отбрасывая бесконечно малую функцию более высокого порядка, получим приближенно:

$$\Delta y \approx f'(x) \cdot \Delta x = dy.$$

Это равенство выполняется тем точнее, чем меньше Δx. Нередко оказывается, что дифференциал функции вычислить проще, чем приращение самой функции, поэтому формула $\Delta y \approx dy$ широко применяется в практике приближенных вычислений. **Формулу приближенных вычислений** удобно использовать в виде:

$$f(x + \Delta x) \approx f(x) + f'(x) \cdot \Delta x.$$

Подразумевается, что значение функции $f(x)$ в точке x известно или может быть легко найдено.

Можно показать, что абсолютная погрешность δy приближенной формулы не превышает величины $|\delta y| \le M(\Delta x)^2$, где $M = \max|f''(x)|$, $x \in [x; x + \Delta x]$.

3.5. Применение дифференциала к приближенным вычислениям (продолжение)

П р и м е р 6. Вычислить приближенно arctg1,05.

Решение: Обозначим $f(x) = \operatorname{arctg} x$ и заметим, что $f(1) = \operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}$. Кроме того, $f'(x) = (\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$ и $\Delta x = 0{,}05$. Тогда $\operatorname{arctg} 1{,}05 \approx \operatorname{arctg} 1 + \frac{0{,}05}{1+1^2} = \frac{\pi}{4} + 0{,}025 \approx 0{,}8104$.

Оценим погрешность δy приближенных вычислений. Вычислим 2-ю производную:

$$f''(x) = (\operatorname{arctg} x)'' = \left(\frac{1}{1+x^2}\right)' = -\frac{2x}{(1+x^2)^2}.$$

С учетом «узости» промежутка [1; 1,05] оценим наибольшее значение $M = |f''(x)|$ величиной $M = \frac{2\cdot 1}{(1+1)^2} = 0{,}5$. Погрешность $|\delta y| \le M(\Delta x)^2 = 0{,}5\cdot(0{,}05)^2 = 125\cdot 10^{-5} \approx 0{,}0013$.

Ответ: $\operatorname{arctg} 1{,}05 \approx 0{,}8104 \pm 0{,}0013$. «Точное» значение: $\operatorname{arctg} 1{,}05 = 0{,}80978$.

3.5. Применение дифференциала к приближенным вычислениям (продолжение)

П р и м е р 7. Вычислить приближенно $\sqrt[5]{31}$.

Решение: Обозначим $f(x) = \sqrt[5]{x}$ и заметим, что $f(32) = \sqrt[5]{32} = 2$. Кроме того, $f'(x) = (x^{1/5})' = \frac{1}{5}x^{-4/5}$ и $\Delta x = -1$. Тогда $\sqrt[5]{31} \approx \sqrt[5]{32} - \frac{1}{5 \cdot 32^{-4/5}} = 2 - \frac{1}{80} = 1{,}9875$.

Оценим погрешность δy приближенных вычислений. Вычислим 2-ю производную:

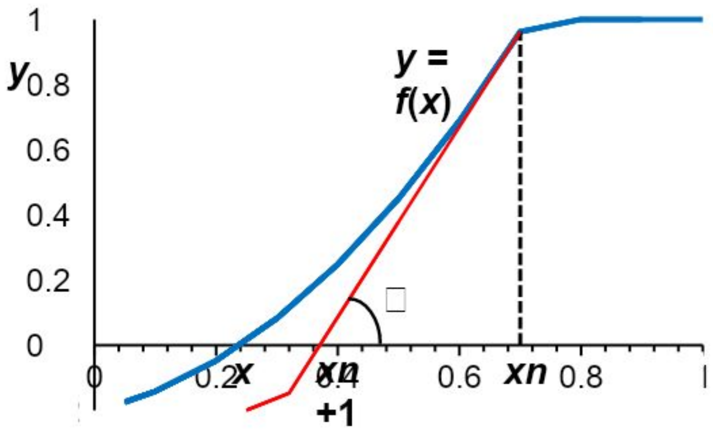
$$f''(x) = (\sqrt[5]{x})'' = \left(\frac{1}{5}x^{-4/5}\right)' = -\frac{4}{25} \cdot x^{-9/5}.$$

С учетом «узости» промежутка [32; 31] оценим наибольшее значение $M = |f''(x)|$ величиной $M = \frac{4}{25} \cdot 32^{-9/5} = \frac{4}{25} \cdot \frac{1}{512} = \frac{1}{3200} = 0{,}0003125$. Погрешность $|\delta y| \le M(\Delta x)^2 = 0{,}0003125 \cdot 1^2 \approx 0{,}0003$.

Ответ: $\sqrt[5]{31} \approx 1{,}9875 \pm 0{,}0003$. «Точное» значение: $\sqrt[5]{31} = 1{,}98734$.

3.5. Применение дифференциала к приближенным вычислениям (продолжение)

Еще один прикладной аспект применения дифференциального исчисления состоит в численном нахождении корня уравнения вида $f(x) = 0$.



Пусть в результате предварительного исследования функции $y = f(x)$ установлена единственность корня x и на n-ом итерационном шаге в точке x_n значение функции равно $f(x_n)$. Следующее приближение (x_{n+1}) выберем, проведя касательную к графику функции в точке x_n (см. рис.).

3.5. Применение дифференциала к приближенным вычислениям (продолжение)

Из геометрических соображений ясно:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{f(x_n)}{x_n - x_{n+1}} = f'(x_n),$$

откуда

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

***Df*:** Это соотношение называется **итерационной формулой Ньютона** численного нахождения корней уравнения $f(x) = 0$.

П р и м е р 8. Построить итерационную схему вычисления квадратного корня из числа a ($a > 0$).

Решение: Итак, требуется найти величину $x = \sqrt{a}$, иными словами, найти решение уравнения $f(x) = x^2 - a$. Согласно итерационной формуле Ньютона,

$$x_{n+1} = x_n - \frac{(x_n)^2 - a}{2x_n} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right).$$

Полученная формула называется *формулой Герона*.

3.5. Применение дифференциала к приближенным вычислениям (продолжение)

П р и м е р 9. С помощью итерационной формулы Герона найти величину $x = \sqrt{2}$ с точностью лучше 10^{-6}.

Решение: Согласно итерационной формуле Герона,

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{2}{x_n}\right).$$

Результаты вычислений запишем в таблицу ($\Delta x_n = x_{n+1} - x_n$):

n	x_n	x_{n+1}	Δx_n
0	1	1,5	0,5
1	1,5	1,416666667	-0,083333333
2	1,416666667	1,414215686	-0,00245098
3	1,414215686	1,414213562	-2,1239E-06
4	1,414213562	1,414213562	-1,59495E-12

Ответ: Четвертая итерация обеспечивает требуемую точность: $\sqrt{2} = 1{,}414213562$.

3.6. Дифференциалы высших порядков

Пусть $y = f(x)$ – дифференцируемая функция, а ее аргумент x – независимая переменная. Тогда ее первый дифференциал $dy = f'(x)dx$ сам является функцией от x и можно найти дифференциал этой функции.

***Df*:** Дифференциал от (первого) дифференциала функции $y = f(x)$ называется ее **вторым дифференциалом** (**дифференциалом второго порядка**); обозначается d^2y или $d^2f(x)$. По определению, $d^2y = d(dy) = d(f'(x)dx)$.

Вычислим второй дифференциал функции $y = f(x)$:
$d^2y = d(dy) = d(f'(x)dx) = (f'(x)dx)'dx = (f'(x))' \cdot dx \cdot dx = f''(x)dx^2$.
Здесь $dx^2 = dx \cdot dx = (dx)^2$ – квадрат приращения аргумента x.

Аналогично получаем для 3-го дифференциала:
$d^3y = d(d^2y) = d(f''(x)dx^2) = (f''(x)\, dx^2)'dx = (f''(x))' \cdot dx^2 \cdot dx =$
$= f'''(x)dx^3$,
где $dx^3 = dx^2 \cdot dx = (dx)^3$ – куб приращения аргумента x.

3.6. Дифференциалы высших порядков (продолжение)

* ***Df:*** Дифференциал *n*-го порядка есть дифференциал от дифференциала $(n-1)$-го порядка функции $y = f(x)$. называется ее **вторым дифференциалом** (**дифференциалом второго порядка**); обозначается $d^n y$ или $d^n f(x)$. По определению, $d^n y = d(d^{n-1}y) = d(f^{(n-1)}(x)dx^{n-1}) = f^{(n)}(x)dx^n$.

Обобщая сказанное, можем записать:

$$f'(x) = \frac{dy}{dx}; \quad f''(x) = \frac{d^2y}{dx^2}; \quad f'''(x) = \frac{d^3y}{dx^3}; \quad f^{(n)}(x) = \frac{d^ny}{dx^n},$$

т.е. производные 1, 2, 3, … , *n*-го порядков функции $y = f(x)$ можно рассматривать как отношения ее дифференциалов соответствующего порядка к соответствующей степени дифференциала независимой переменной *x*.

З а м е ч а н и е: Дифференциалы высших порядков, т.е. порядка выше первого, **не обладают** свойством инвариантности, им обладает лишь дифференциал 1-го порядка.

§4. Основные теоремы дифференциального исчисления

К числу основных теорем дифференциального исчисления относят классические теоремы Ферма, Ролля, Лагранжа и Коши.

Т е о р е м а (лемма) П. Ферма. Если функция имеет производную, и в точке c имеет экстремум, то значение производной в этой точке равно нулю: $f'(c) = 0$.

Доказательство: Приведено далее, при анализе экстремального поведения дифференцируемой функции.

§4. Основные теоремы дифференциального исчисления (продолжение)

Т е о р е м а М. Ролля (о нуле производной). Если функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$, дифференцируема на интервале $(a; b)$ и на концах отрезка принимает одинаковые значения $f(a) = f(b)$, то найдется по крайней мере одна точка $c \in (a; b)$, в которой производная $f'(x)$ обращается в нуль, т.е. $f'(c) = 0$.

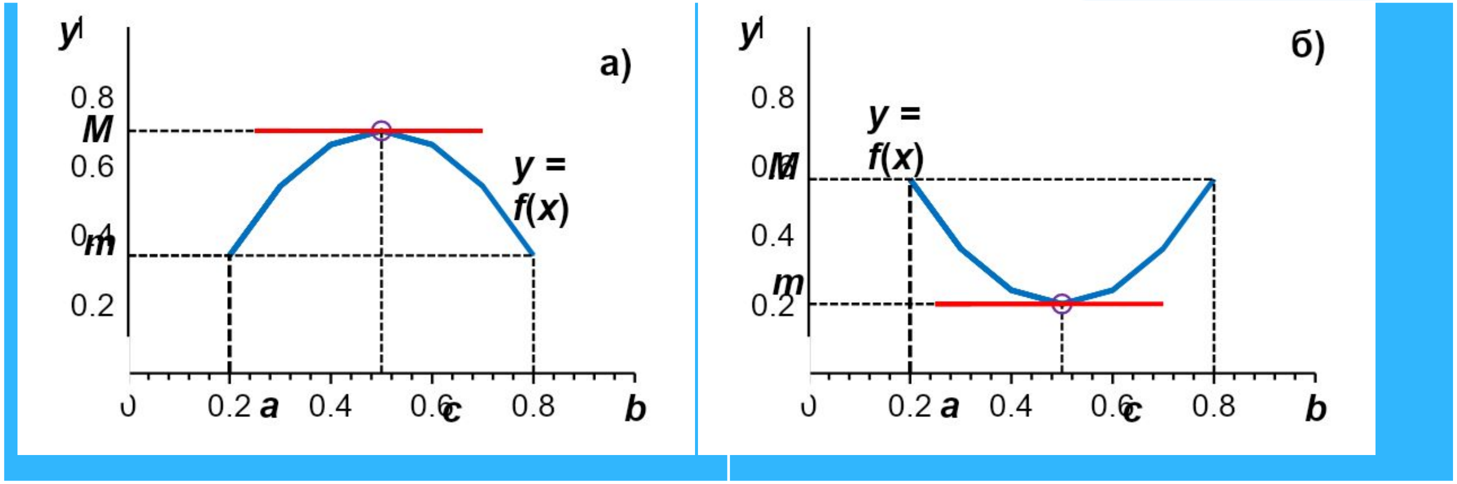
Доказательство: Согласно теореме Вейерштрасса, непрерывная на отрезке $[a; b]$ функция $f(x)$ достигает на этом отрезке своего наибольшего и наименьшего значений; обозначим их M и m, соответственно.

Если $M = m$, то функция постоянна ($f(x) \equiv \mathrm{Const}$) и потому $f'(x) \equiv 0 \ \forall x \in (a; b)$. Для этого, тривиального, случая утверждение теоремы доказано.

§4. Теорема Ролля (продолжение)

Рассмотрим нетривиальный случай: $M \neq m$.

Если $M \neq m$, то функция достигает хотя бы одно из значений M или m во *внутренней* точке c интервала $(a; b)$, так как $f(a) = f(b)$ (см. рис.).



Пусть, например, функция $f(x)$ принимает значение $M = f(c)$ во внутренней точке c области определения функции: $c \in [a; b]$. Тогда для всех $x \in (a; b)$ выполняется соотношение $f(x) \leq f(c) = M$.

§4. Теорема Ролля (продолжение)

Найдем производную $f'(x)$ в точке $x = c$:

$$f'(c) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(c+\Delta x) - f(c)}{\Delta x}.$$

В силу условия $f(x) \le f(c)$ разность $f(c + \Delta x) - f(c) \le 0$. Если $\Delta x > 0$, т.е. $\Delta x \to 0+0$, то *справа* от точки с

$$\frac{f(c+\Delta x) - f(c)}{\Delta x} \le 0 \text{ и поэтому } f'(c) \le 0.$$

Наоборот, $\Delta x < 0$, т.е. $\Delta x \to 0-0$, то *слева* от точки с

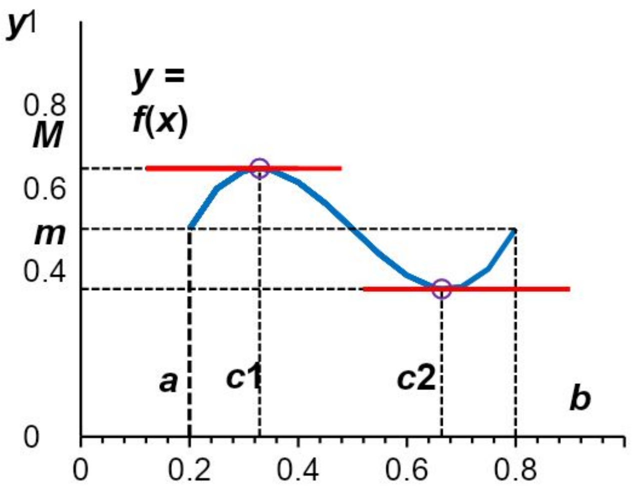
$$\frac{f(c+\Delta x) - f(c)}{\Delta x} \ge 0 \text{ и поэтому } f'(c) \ge 0.$$

Таким образом, слева от точки с производная $f'(c) \ge 0$; справа от точки с производная $f'(c) \le 0$. Следовательно, в самой точке с производная функции $f'(c) = 0$.

Для случая $f(c) = m$, доказательство полностью аналогично, ч.т.д.

§4. Теорема Ролля (продолжение)

Геометрически теорема Ролля означает, что на графике функции $y = f(x)$ найдется точка, в которой касательная к графику функции параллельна оси Ox (см. выше рис. а, б). Таких точек в области определения функции может быть несколько (см. рис.), и даже бесконечное (счетное) множество.



§4. Основные теоремы дифференциального исчисления (продолжение)

Т е о р е м а Ж. Л. Лагранжа (обобщение теоремы Ролля). Если функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$, дифференцируема на интервале $(a; b)$, то найдется по крайней мере одна точка $c \in (a; b)$, такая, что выполняется равенство $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$, или $f(b) - f(a) = f'(c)\cdot(b - a)$.

Доказательство: Если $f(b) = f(a)$, то имеем случай доказанной выше теоремы Ролля. Рассмотрим более общий случай $f(b) \neq f(a)$.

Рассмотрим вспомогательную функцию

$$F(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}\cdot(x - a).$$

Функция $F(x)$ удовлетворяет всем требованиям теоремы Ролля. Действительно, функция $F(x)$ дифференцируема и непрерывна в той же области, что и исходная функция $f(x)$; причем $F(a) = F(b) = 0$.

§4. Теорема Лагранжа (продолжение)

Согласно теореме Ролля найдется точка $c \in (a; b)$ такая, что производная функции $F'(x) = 0 = f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ при $x = c$:

$$F'(c) = f'(c) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = 0.$$

Из этого равенства вытекает утверждение доказываемой теоремы: $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ или $f(b) - f(a) = f'(c)\cdot(b - a)$, ч.т.д.

С л е д с т в и е (формула Лагранжа). Применив теорему Лагранжа к отрезку $[x; x + \Delta x]$, $\Delta x > 0$, будем иметь

$$f(x + \Delta x) - f(x) = f'(c)\cdot\Delta x.$$

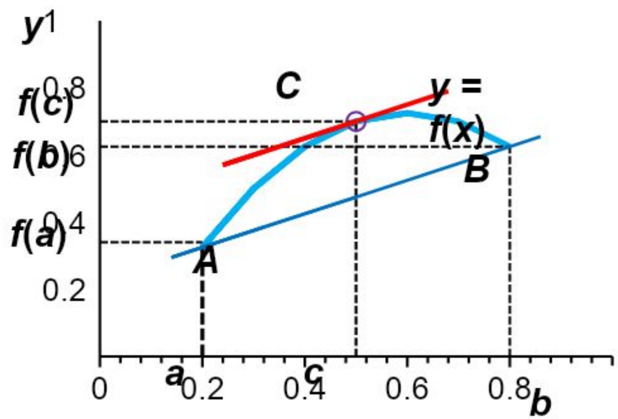
Поскольку $c\in(x; x+\Delta x)$, то можно записать $c = x + \theta\cdot\Delta x$, где $0<\theta<1$.

Df: Формулу $f(x + \Delta x) = f(x) + f'(x + \theta\cdot\Delta x)\cdot\Delta x$ называют **формулой Лагранжа конечных приращений.**

З а м е ч а н и е. Формула Лагранжа дает *точную* величину приращения функции, однако содержит неизвестный параметр θ, определяющий точку c вычисления производной.

§4. Теорема Лагранжа (продолжение)

З а м е ч а н и е: теорема Лагранжа имеет простой геометрический смысл. Обратим внимание на то, что правая часть равенства $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ представляет собой угловой коэффициент секущей (см. рис.).



Следовательно, геометрический смысл теоремы Лагранжа таков: на графике функции $y = f(x)$ найдется точка $C(c; f(c))$, $a < c < b$, в которой касательная к графику функции параллельная секущей AB.

§4. Основные теоремы дифференциального исчисления (продолжение)

Т е о р е м а О. Л. Коши (обобщение теоремы Лагранжа). Если функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ непрерывны на отрезке $[a; b]$, дифференцируемы на интервале $(a; b)$, причем $\varphi'(x) \neq 0$ для всех $x \in (a; b)$, то найдется по крайней мере одна точка $c \in (a; b)$ такая, что выполняется равенство $\dfrac{f(b)-f(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)} = \dfrac{f'(c)}{\varphi'(c)}$.

Доказательство: Заметим, что $\varphi(b) \neq \varphi(a)$, так как в противном случае по теореме Ролля нашлась бы точка c такая, что $\varphi'(c) = 0$, чего не может быть по условию теоремы.

Рассмотрим вспомогательную функцию

$$F(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)} \cdot (\varphi(x) - \varphi(a)).$$

Функция $F(x)$ удовлетворяет всем требованиям теоремы Ролля. Действительно, функция $F(x)$ дифференцируема и непрерывна в той же области, что и исходные функции $f(x)$ и $\varphi(x)$; причем $F(a) = F(b) = 0$.

§4. Теорема Коши (продолжение)

Согласно теореме Ролля найдется точка $c \in (a; b)$ такая, что производная вспомогательной функции

$$F'(x) = 0 = f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)} \cdot \varphi'(x)$$

при $x = c$, т.е.

$$f'(c) - \frac{f(b)-f(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)} \cdot \varphi'(c) = 0.$$

Из этого равенства вытекает утверждение доказываемой теоремы: $\dfrac{f(b)-f(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)} = \dfrac{f'(c)}{\varphi'(c)}$, ч.т.д.

С л е д с т в и е 1. Если производная функция равна нулю на некотором промежутке, то функция постоянна на этом промежутке.

С л е д с т в и е 2. Если две функции имеют равные производные на некотором промежутке, то они отличаются друг от друга на постоянное слагаемое.

§5. Правила Лопиталя

* Нередко при вычислении пределов под знаками пределов возникают неопределенности вида $\frac{0}{0}$ или $\frac{\infty}{\infty}$. Основные теоремы дифференциального исчисления позволяют раскрывать эти неопределенности с помощью **правил Лопиталя.**

Т е о р е м а о раскрытии неопределенности вида $\frac{0}{0}$ (первое правило Г. Лопиталя).

Пусть функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ непрерывны и дифференцируемы в окрестности точки x_0 (конечной или бесконечной) и обращаются в нуль в этой точке: $f(x_0) = \varphi(x_0) = 0$. Пусть $\varphi'(x) \neq 0$ в окрестности точки x_0. Если существует предел $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)} = a$, то $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)} = a$.

§5. Правила Лопиталя

* Доказательство: Применим к функциям $f(x)$ и $\varphi(x)$ теорему Коши для отрезка $[x_0; x]$, содержащего точку x_0. Тогда $\frac{f(x)-f(x_0)}{\varphi(x)-\varphi(x_0)} = \frac{f'(c)}{\varphi'(c)}$, где точка $c \in (x_0; x)$. Учитывая, что по условию теоремы $f(x_0) = \varphi(x_0) = 0$, получаем $\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{f'(c)}{\varphi'(c)}$. При $x \to x_0$ точка c также стремится к x_0. Переходя к пределу, заключаем:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{c\to x_0} \frac{f'(c)}{\varphi'(c)} = a,$$ ч.т.д.

З а м е ч а н и е 1. Краткая формулировка правила: *предел отношения двух бесконечно малых равен отношению их производных, если таковое существует.*

З а м е ч а н и е 2. *Если после применения правила Лопиталя вновь получим неопределенность вида 0/0, то правило Лопиталя можно применить повторно.*

§5. Правила Лопиталя (продолжение)

* Т е о р е м а о раскрытии неопределенности вида $\frac{\infty}{\infty}$ (второе правило Г. Лопиталя).

Пусть функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ непрерывны и дифференцируемы в окрестности точки x_0 (конечной или бесконечной) и обращаются в бесконечность в этой точке: $f(x_0) = \varphi(x_0) = \infty$. Пусть $\varphi'(x) \neq 0$ в окрестности точки x_0. Если существует предел $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)} = a$, то $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim\limits_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)} = a$.

<u>Доказательство</u>: Для доказательства достаточно применить 1-ое правило Лопиталя к функциям $f_1(x) = 1/f(x)$ и $\varphi_1(x) = 1/\varphi(x)$. Действительно, если $\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} \varphi(x) = \infty$, то $\lim\limits_{x\to x_0} f_1(x) = \lim\limits_{x\to x_0} \varphi_1(x) = 0$.

§5. Правила Лопиталя (продолжение)

На примерах рассмотрим применение правил Лопиталя для раскрытия неопределенностей вида $\frac{0}{0}$ или $\frac{\infty}{\infty}$.

П р и м е р 10. С помощью правила Лопиталя найти предел: $\lim_{x\to 1} \frac{x-1}{x\cdot\ln x}$.

Решение: Обозначим $f(x) = \frac{x-1}{x} = 1 - \frac{1}{x}$; $\varphi(x) = \ln x$. При $x \to 1$ как $f(x) \to 0$, так и $\varphi(x) \to 0$, т.е. имеем дело с неопределенностью вида 0/0; обе функции в окрестности точки x = 1 непрерывны и дифференцируемы, причем $f'(x) = \left(1 - \frac{1}{x}\right)' = \frac{1}{x^2}$; $\varphi'(x) = (\ln x)' = \frac{1}{x}$. Согласно правилу Лопиталя раскрытия неопределенностей, имеем: $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x-1}{x\cdot\ln x} = \left\{\frac{0}{0}\right\} = \lim\limits_{x\to 1} \frac{\left(1-\frac{1}{x}\right)'}{(\ln x)'} = \lim\limits_{x\to 1} \frac{1/x^2}{1/x} = \lim\limits_{x\to 1} \frac{1}{x} = 1$.

Ответ: $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x-1}{x\cdot\ln x} = 1$.

§5. Правила Лопиталя (продолжение)

П р и м е р 11. Найти: $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 6x}{2x^2}$.

Решение: 1-ый способ. Дважды применяя правило Лопиталя, имеем:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 6x}{2x^2}=\left\{\frac{0}{0}\right\}=\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos 6x)'}{2(x^2)'}=\lim_{x\to 0}\frac{6\sin 6x}{4x}=\left\{\frac{0}{0}\right\}=$$

$$=\frac{3}{2}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{(\sin 6x)'}{(x)'}=\frac{3}{2}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{6\cdot\cos 6x}{1}=9.$$

2-ой способ. Заметим, что согласно формуле половинного аргумента $\frac{1-\cos 6x}{2}=\sin^2 3x$. С учетом первого замечательного предела,

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 6x}{2x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 3x}{x^2}=9\cdot\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin 3x}{3x}\right)^2=9\cdot 1^2=9.$$

Ответ: $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 6x}{2x^2}=9$.

§5. Правила Лопиталя (продолжение)

П р и м е р 12. Найти: $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\operatorname{tg}3x}{\operatorname{tg}5x}$.

Решение: При $x \to \frac{\pi}{2}$ как $\operatorname{tg}3x \to \infty$, так и $\operatorname{tg}5x \to \infty$. Можно было бы непосредственно применить 2-ое правило Лопиталя, однако проще предварительно преобразовать выражение под знаком предела: $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\operatorname{tg}3x}{\operatorname{tg}5x} =$

$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sin 3x}{\sin 5x}\cdot\frac{\cos 5x}{\cos 3x} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sin 3x}{\sin 5x}\cdot\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos 5x}{\cos 3x} = (-1)\cdot\left(-\frac{5}{3}\right) = \frac{5}{3}.$$

Действительно, $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sin 3x}{\sin 5x} = \frac{\sin\frac{3\pi}{2}}{\sin\frac{5\pi}{2}} = \frac{-1}{1} = -1$; кроме того,

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos 5x}{\cos 3x} = \left\{\frac{0}{0}\right\} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{(\cos 5x)'}{(\cos 3x)'} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{-5\cdot\sin 5x}{-3\cdot\sin 3x} = \frac{5}{3}\cdot\frac{\sin\frac{5\pi}{2}}{\sin\frac{3\pi}{2}} = \frac{5}{3}\cdot\frac{1}{-1} = -\frac{5}{3}.$$

Ответ: $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\operatorname{tg}3x}{\operatorname{tg}5x} = \frac{5}{3}$.

§5. Правила Лопиталя: раскрытие неопределенностей различных видов

Правила Лопиталя применяется для раскрытия неопределенностей вида $\frac{0}{0}$ или $\frac{\infty}{\infty}$, которые называются **основными.** Однако, при вычислении пределов возникают неопределенности других видов, такие как $0\cdot\infty$, $\infty-\infty$, 1^{∞}, ∞^0, 0^0; они сводятся к основным видам неопределенностей с помощью тождественных преобразований.

1. Неопределенность вида $0\cdot\infty$.

Пусть $f(x)\to 0$; $\varphi(x)\to\infty$ при $x\to x_0$. Тогда очевидны следующие эквивалентные преобразования:

$$\lim_{x\to x_0}(f(x)\cdot\varphi(x)) = \{0\cdot\infty\} = \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{\frac{1}{\varphi(x)}} = \left\{\frac{0}{0}\right\},$$

или, наоборот,

$$\lim_{x\to x_0}(f(x)\cdot\varphi(x)) = \{0\cdot\infty\} = \lim_{x\to x_0}\frac{\varphi(x)}{\frac{1}{f(x)}} = \left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}.$$

§5. Правила Лопиталя: раскрытие неопределенностей различных видов (продолжение)

2. Неопределенность вида $\infty - \infty$.

Пусть $f(x) \to \infty$; $\varphi(x) \to \infty$ при $x \to x_0$. Тогда:

$$\lim_{x \to x_0}(f(x) - \varphi(x)) = \{\infty - \infty\} = \lim_{x \to x_0}\left[\frac{1}{\frac{1}{f(x)}} - \frac{1}{\frac{1}{\varphi(x)}}\right] =$$

$$= \lim_{x \to x_0}\left[\frac{1}{f_1(x)} - \frac{1}{\varphi_1(x)}\right] = \lim_{x \to x_0}\frac{\varphi_1(x) - f_1(x)}{\varphi_1(x) \cdot f_1(x)} = \left\{\frac{0}{0}\right\},$$

где $f_1(x) = 1/f(x)$, $\varphi_1(x) = 1/\varphi(x)$.

3. Неопределенности вида 1^∞, ∞^0, 0^0.

Неопределенности вида 1^∞, ∞^0, 0^0, которые возникают при рассмотрении пределов вида $\lim_{x \to x_0} f(x)^{\varphi(x)}$, *приводятся к уже рассмотренным неопределенностям путем предварительного логарифмирования.*

§5. Правила Лопиталя (продолжение)

Рассмотрим несколько примеров вычисления пределов, содержащих неопределенности вида 1^∞, ∞^0, 0^0.

П р и м е р 13. Найти: $\lim_{x\to 2} \operatorname{tg}\frac{\pi x}{4}\cdot(2-x)$.

Решение: При $x \to 2$ $\operatorname{tg}\frac{\pi x}{4} \to \infty$, а $(2-x) \to 0$; таким образом, имеем неопределенность вида $0\cdot\infty$. Можно предварительно преобразовать выражение под знаком предела,

$$\lim_{x\to 2} \operatorname{tg}\frac{\pi x}{4}\cdot(2-x) = \lim_{x\to 2}\frac{(x-2)\cdot\sin\frac{\pi x}{4}}{\cos\frac{\pi x}{4}} = \lim_{x\to 2}\sin\frac{\pi x}{4}\cdot\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)}{\cos\frac{\pi x}{4}} =$$

$$= 1\cdot\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)}{\cos\frac{\pi x}{4}} = \left\{\frac{0}{0}\right\} = \lim_{x\to 2}\frac{(x-2)'}{(\cos\frac{\pi x}{4})'} = \lim_{x\to 2}\frac{1}{\frac{\pi}{4}\cdot\sin\frac{\pi x}{4}} = \frac{4}{\pi}.$$

Ответ: $\lim_{x\to 2} \operatorname{tg}\frac{\pi x}{4}\cdot(2-x) = \frac{4}{\pi}$.

§5. Правила Лопиталя (продолжение)

П р и м е р 14. Найти: $\lim_{x\to 0}(\cos 2x)^{\frac{1}{x^2}}$.

Решение: При x → 0 имеем неопределенность вида 1^{∞}. Пусть $\lim\limits_{x\to 0}(\cos 2x)^{\frac{1}{x^2}} = A$, тогда

$$\ln A = \lim_{x\to 0}\frac{\ln\cos 2x}{x^2} = \left\{\frac{0}{0}\right\} = \lim_{x\to 0}\frac{(\ln\cos 2x)'}{(x^2)'} = \lim_{x\to 0}\frac{-2\sin 2x}{2x\cdot\cos 2x} =$$

$$= -2\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos 2x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{2x} = -2\cdot 1\cdot 1 = -2.$$

Следовательно, $A = \lim\limits_{x\to 0}(\cos 2x)^{\frac{1}{x^2}} = e^{-2}$.

Ответ: $\lim\limits_{x\to 0}(\cos 2x)^{\frac{1}{x^2}} = e^{-2}$.

* Спасибо за внимание!
* Ваши вопросы, замечания, предложения …