Министерство образования и науки РФ
ФГБОУ ВПО «Уральский государственный педагогический университет»
Математический факультет
Кафедра высшей математики

«Математика»
Лекция 2. Элементы линейной алгебры. Системы линейных уравнений

Лектор: Бодряков В.Ю. E-mail: Bodryakov_VYu@e1.ru
Поток: 1 к. ИКРиМ, 2012-2013 уч.г.

Екатеринбург - 2012

Рекомендуемая литература

1. Берман Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа: учеб пособие. СПб.: Лань, 2007. – 448 с.
2. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика . М.: Высшая школа. 1999. – 479 с.
3. Гмурман В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике – М.: Высшая школа. 1999. – 400 с.
4. Лунгу К.Н. и др. Сборник задач по высшей математике, М., Айрис Пресс, 2007, ч. 1, 2.
5. Коробков, С.С. Математика для гуманитарных специальностей [Электронный ресурс]: учебное пособие. – Екатеринбург: УрГПУ, 2007. – 124 с.
6. Кремер Н.И. Высшая математика для экономических специальностей – М : Высшая школа. 2008. – 732 с.
7. Письменный Д.Т. Конспект лекций по высшей математике: [в 2 ч.]. Ч. 1. – М.: Айрис – Пресс, 2008. – 288 с.
8. Тер-Крикоров А.М., Шабунин М.И. Курс математического анализа: учебное пособие для вузов. М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2009. – 672 с.
9. Фихтенгольц Г.М. Основы математического анализа. Ч. 1. СПб.: Лань, 2005. – 448 с., Ч.2, 2005. – 464 с.
10. Электронный ресурс: www.exponenta.ru

Содержание лекции

§1. Основные понятия

§2. Решение систем линейных уравнений. Теорема Кронекера - Капелли

§3. Решение невырожденных линейных систем. Формулы Крамера

§4. Решение систем линейных уравнений методом Гаусса

§5. Системы линейных однородных уравнений

Цель и задачи занятия

Цель занятия: развитие средствами изучаемой дисциплины общекультурных и профессиональных компетенций, регламентируемых ФГОС ВПО направлению «080400 – Управление персоналом» (квалификация «бакалавр») по циклу Б2 – математический и естественно-научный цикл, в частности, компетенции ОК-16: *владение методами количественного анализа и моделирования, теоретического и экспериментального исследования*, и др.

Задачи занятия: Познакомиться с профессионально важными понятиями линейной алгебры (матрицы, определители, системы линейных уравнений и методы их решения и др.); проиллюстрировать применение изученного материала на конкретных примерах.

§1. Основные понятия

***Df*: Системой линейных алгебраических уравнений,** содержащей *m* уравнений и *n* неизвестных называется система вида:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases}$$

где числа a_{ij} называются **коэффициентами системы уравнений,** числа b_i называются **свободными членами** ($i = 1, 2, \dots, m$; $j = 1, 2, \dots, n$). Подлежат нахождению неизвестные переменные x_j.

З а м е ч а н и е: Число уравнений может быть как меньше, так и больше числа неизвестных.

§1. Основные понятия (продолжение)

Df: Систему линейных уравнений удобно записать в компактной **матричной форме**:

$$A \cdot X = B,$$

где $A = (a_{ij})$ – матрица коэффициентов системы, называемая **основной матрицей** системы:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

вектор-столбец переменных (неизвестных) x_j и вектор-столбец свободных членов b_i есть, соответственно,

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix}; \qquad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

З а м е ч а н и е: Произведение $A \cdot X$ определено, т.к. в матрице A столбцов столько же (n), сколько строк в матрице X.

§1. Основные понятия (продолжение)

Df: **Расширенной матрицей** системы называется матрица $\bar{A}$, дополненная столбцом свободных членов:

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}.$$

Df: **Решением** системы называются n значений неизвестных $x_1 = c_1$, $x_2 = c_2$, … , $x_n = c_n$, при подстановке которых все уравнения системы обращаются в верные равенства. Решение системы можно записать в виде матрицы-столбца: $C = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \dots \\ c_n \end{pmatrix}$.

§1. Основные понятия (продолжение)

Df: Система уравнений называется **совместной**, если она имеет хотя бы одно решение, и **несовместной**, если она не имеет ни одного решения.

Df: Совместная система называется **определенной**, если она имеет единственное решение, и **неопределенной**, если она имеет более одного решения. В последнем случае каждое ее решение называется **частным решением** системы. Совокупность всех частных решений называется **общим решением**.

Df: **Решить систему** алгебраических уравнений – это значит выяснить, совместна она или несовместна, и, если система совместна, найти ее общее решение.

Df: Две системы называются **эквивалентными** (равносильными), если они имеют одно и то же общее решение, т.е. всякое решение одной системы является, в то же время, решением другой, и наоборот.

§1. Основные понятия (продолжение)

Df: Эквивалентные системы получаются, в частности, при **элементарных преобразованиях** системы при условии, что преобразования выполняются лишь над строками матрицы.

Df: Система уравнений называется **однородной**, если все ее свободные члены равны нулю:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0. \end{cases}$$

Однородная система всегда совместна, так как **нулевое** решение $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$ всегда является ее решением. Нулевое решение системы также называют **тривиальным**.

§2. Решение систем линейных уравнений. Теорема Кронекера - Капелли

Пусть дана произвольная система *m* линейных алгебраических уравнений с *n* неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases}$$

Исчерпывающий ответ на вопрос о совместности этой системы дает *теорема Кронекера – Капелли*.

Т е о р е м а 1 (Кронекера – Капелли). Система линейных алгебраических уравнений совместна тогда и только тогда, когда ранг $r(\bar{A})$ расширенной матрицы системы равен рангу $r(A)$ основной матрицы.

Примем эту и две следующих теоремы без доказательства.

§2. Решение систем линейных уравнений. Теорема Кронекера – Капелли (продолжение)

Правила практического разыскания всех решений совместной системы линейных уравнений вытекают из следующих теорем.

Т е о р е м а 2. Если ранг $r(A)$ матрицы A совместной системы линейных уравнений равен числу неизвестных n, т. е. $r(A) = n$, то система имеет единственное решение.

Т е о р е м а 3. Если ранг $r(A)$ совместной системы меньше числа неизвестных n, т.е. $r(A) < n$, то система имеет бесчисленное множестве решений.

П р а в и л о решения произвольной системы линейных уравнений.

1. Найти ранги основной $r(A)$ и расширенной $r(\bar{A})$ матриц системы. Если $r(A) \neq r(\bar{A})$, то система несовместна.

§2. Решение систем линейных уравнений. Теорема Кронекера – Капелли (продолжение)

2. Если $r(A) = r(\bar{A}) = r$, система совместна. Найти какой-либо базисный минор порядка r. Взять произвольно r уравнений системы из коэффициентов которых составлен базисный минор, отбросив остальные $m - r$ уравнений.

Неизвестные, коэффициенты при которых входят в базисный минор, называются *главными*; их оставляют слева, а остальные $n - r$ неизвестных называют *свободными* и переносят в правые части уравнений.

3. Найти выражения для главных неизвестных через свободные.

4. Придавая свободным неизвестным произвольные действительные значения, получим все соответствующие значения главных неизвестных. Таким образом можно найти все частные решения исходной системы уравнений.

§2. Решение систем линейных уравнений. Теорема Кронекера – Капелли (продолжение)

П р и м е р 1: Исследовать на совместность систему и решить ее, если она совместна:

$$\begin{cases} x + y = 1, \\ 3x + 3y = -2. \end{cases}$$

Решение: Укажем необходимые параметры системы. Основная матрица и расширенная матрица системы есть, соответственно:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}; \quad \bar{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & -2 \end{pmatrix}.$$

Ранг основной матрицы равен (СРС) $r(A) = 1$, тогда как ранг расширенной матрицы $r(\bar{A}) = 2$ (СРС). Т.о., $r(A) \neq r(\bar{A})$ и система несовместна.

§2. Решение систем линейных уравнений. Теорема Кронекера – Капелли (продолжение)

П р и м е р 2: Исследовать на совместность систему и решить ее, если она совместна:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 1, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = -1, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 + 3x_4 = 3. \end{cases}$$

Решение: Укажем необходимые параметры системы. Основная матрица и расширенная матрица системы есть, соответственно:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}; \qquad \bar{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 & 3 & 3 \end{pmatrix}.$$

Ранг основной матрицы равен (СРС) $r(A) = 2$, как и ранг расширенной матрицы $r(\bar{A})$ (СРС). Т.о., $r(A) = r(\bar{A})$ и система совместна.

§2. Решение систем линейных уравнений. Теорема Кронекера – Капелли (продолжение)

В соответствии со сформулированными выше правилами решения системы линейных уравнений, оставим в рассмотрении два из них, скажем:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 1, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = -1. \end{cases}$$

В качестве главных неизвестных выберем x_3 и x_4, т.к. определитель, составленный из коэффициентов при них, т.е. $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$. Перенеся свободные переменные в правую часть, имеем:

$$\begin{cases} x_3 + x_4 = 1 - x_1 + 2x_2, \\ x_3 - x_4 = -1 - x_1 + 2x_2. \end{cases}$$

Складывая и вычитая почленно уравнения системы, получим общее решение: $x_3 = -x_1 + 2x_2$ и $x_4 = 1$, где $x_1, x_2 \in \boldsymbol{R}$. Положив, например, $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, получим частное решение системы: $x_1 = x_2 = x_3 = 0$, $x_4 = 1$.

§3. Решение невырожденных линейных систем. Формулы Крамера

Пусть дана произвольная система n линейных алгебраических уравнений с n неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases}$$

В матричной форме эта система уравнений имеет вид: $A \cdot X = B$,

где основная матрица $A = A_{n\times n}$ системы является квадратной матрицей n-го порядка.

Df: Определитель этой матрицы

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

называется **определителем системы.** Если определитель отличен от нуля, то система уравнений называется **невырожденной.**

§3. Решение невырожденных линейных систем. Формулы Крамера (продолжение)

Заметим, что если det$A$ ≠ 0, то ранг матрицы системы линейных уравнений $r(A) = n = r(\bar{A})$ равен рангу расширенной матрицы, т.е. такая линейная система имеет единственное решение.

Для нахождения решения системы линейных уравнений n-го порядка с невырожденной матрицей $A = A_{n\times n}$ может быть применен **матричный метод (способ)**.

Техника применения матричного метода для решения системы уравнений очевидна из выкладок:

$$A \cdot X = B;$$

$$A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B,$$

но $A^{-1} \cdot A \cdot X = (A^{-1} \cdot A) \cdot X = E \cdot X = X$, откуда матрица-столбец решений выражается матричным образом как

$$X = A^{-1} \cdot B.$$

§3. … Формулы Крамера (продолжение)

П р и м е р 3: Решить систему матричным способом:

$$\begin{cases} x + y + z = 3, \\ x + 2y + 3z = 2, \\ x + 3y + 6z = -1. \end{cases}$$

<u>Решение</u>: Вычислим определитель системы (СРС):

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{vmatrix} = 1 \neq 0.$$

Вычислим обратную матрицу системы (СРС):

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 \\ -3 & 5 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Вычислим матрицу-столбец решений по формуле $X = A^{-1} \cdot B$:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 \\ -3 & 5 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Как показывает проверка (СРС), решение найдено верно.

§3. … Формулы Крамера (продолжение)

* Существует иной подход к нахождению решений квадратной системы линейных уравнений, получивший название «*формулы Крамера*», где не требуется явным образом вычислять обратную матрицу системы.

У т в е р ж д е н и е: Решение системы линейных алгебраических уравнений с невырожденной матрицей n-го порядка может быть получено по **формулам Крамера**:

$$x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta} \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

где $\Delta \neq 0$ – определитель системы, а Δ_i – определитель системы, в котором i-ый столбец заменен столбцом свободных членов. Например, для $i = 1$ имеем

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_n & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

§3. … Формулы Крамера (продолжение)

* Доказательство: Матричное равенство $X = A^{-1} \cdot B$ запишем в развернутом виде (с учетом определения A^{-1}):

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdots \\ b_n \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{\Delta} \cdot \begin{pmatrix} A_{11}b_1 + A_{21}b_2 + \cdots + A_{n1}b_n \\ A_{12}b_1 + A_{22}b_2 + \cdots + A_{n2}b_n \\ \cdots \\ A_{1n}b_1 + A_{2n}b_2 + \cdots + A_{nn}b_n \end{pmatrix}.$$

Таким образом,

$$x_1 = \frac{1}{\Delta} \cdot (A_{11}b_1 + A_{21}b_2 + \ldots + A_{n1}b_n),$$

$$x_2 = \frac{1}{\Delta} \cdot (A_{12}b_1 + A_{22}b_2 + \ldots + A_{n2}b_n),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$x_n = \frac{1}{\Delta} \cdot (A_{1n}b_1 + A_{2n}b_2 + \ldots + A_{nn}b_n).$$

§3. … Формулы Крамера (продолжение)

Но выражение для x_1, стоящие в скобках, т.е.

$$A_{11}b_1 + A_{21}b_2 + \ldots + A_{n1}b_n$$

представляет собой разложение определителя

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_n & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

по элементам первого столбца. Определитель Δ_1 получен из определителя системы Δ путем замены первого столбца коэффициентов столбцом из свободных членов. Итак,

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}.$$

Аналогично: $x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}$, где Δ_2 получен из определителя системы Δ путем замены второго столбца коэффициентов столбцом из свободных членов, и т.д.; наконец, $x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta}$, ч.т.д.

§3. … Формулы Крамера (продолжение)

П р и м е р 4: Решить систему по формулам Крамера:

$$\begin{cases} x + y + z = 3, \\ x + 2y + 3z = 2, \\ x + 3y + 6z = -1. \end{cases}$$

Решение: Вычислим определитель системы (СРС):

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{vmatrix} = 1 \neq 0.$$

Применим формулы Крамера (СРС):

$$x = \frac{1}{\Delta} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \\ -1 & 3 & 6 \end{vmatrix} = \frac{2}{1} = 2; \qquad y = \frac{1}{\Delta} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 6 \end{vmatrix} = \frac{3}{1} = 3;$$

$$z = \frac{1}{\Delta} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix} = \frac{-2}{1} = -2.$$

Задача решена.

§4. Решение систем линейных уравнений методом Гаусса

Решение больших систем линейных уравнений матричным методом или по формулам Крамера оказывается не слишком эффективным, т.к. связано с проблемой вычисления определителей, что трудно реализуется программным образом.

Одним из наиболее универсальных и эффективных методов решений систем линейных алгебраических уравнений является **метод Гаусса**, состоящий в последовательном исключении неизвестных.

Пусть дана произвольная система *m* линейных алгебраических уравнений с *n* неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases}$$

§4. Решение систем линейных уравнений методом Гаусса
(продолжение)

Процесс решения по методу Гаусса состоит из двух этапов. На *первом* этапе (*прямой ход*) система приводится к ступенчатому (в частности, треугольному) виду:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1k}x_k + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ \qquad\qquad a_{22}x_2 + \cdots + a_{2k}\, x_k + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \qquad\qquad\qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad\qquad\qquad\qquad a_{kk}x_k + \cdots + a_{kn}x_n = b_k, \end{cases}$$

где $k \le n$, $a_{ii} \ne 0$, $i = 1, 2, \ldots, k$. Коэффициенты a_{ii} называются *главными* элементами системы.

На *втором* этапе (*обратный ход*) идет последовательное определение неизвестных из этой ступенчатой системы.

Опишем метод Гаусса подробнее.

§4. …метод Гаусса (продолжение)

П р я м о й х о д.

Будем считать, что элемент $a_{11} \neq 0$ (если $a_{11} = 0$, то первым в системе запишем уравнение, в котором $a_{11} \neq 0$).

Преобразуем исходную систему, исключив неизвестное x_1 во всех уравнениях, кроме первого, используя элементарные преобразования системы.

Для этого умножим обе части первого уравнения на $-\frac{a_{21}}{a_{11}}$ и сложим почленно со вторым уравнением системы. Затем умножим обе части первого уравнения на $-\frac{a_{31}}{a_{11}}$ и сложим с третьим уравнением системы. Продолжая этот процесс, получим эквивалентную систему, содержащую неизвестное x_1 только в первом уравнении системы:

§4. … метод Гаусса (продолжение)

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ \qquad a'_{22}x_2 + \cdots + a'_{2n}x_n = b'_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \qquad a'_{m2}x_2 + \cdots + a'_{mn}x_n = b'_m. \end{cases}$$

Здесь a'_{ij}, b' ($i, j = 2, 3, \dots, m$) – новые значения коэф - тов и правых частей, которые получаются после первого шага.

Аналогичным образом, считая главным элементом $a'_{22} \neq 0$, исключив неизвестное x_2 из в всех уравнений, кроме первого и второго, и так далее. Продолжаем этот процесс, пока возможно.

Если в процесс приведения системы к ступенчатому виду появятся нулевые уравнения, т.е. равенства вида $0 = 0$, то их отбрасывают. Если же появятся уравнения вида $0 = b_i$, где $b_i \neq 0$, то это свидетельствует о несовместности системы.

§4. … метод Гаусса (продолжение)

Обратный ход.

Второй этап (обратный ход) заключается в решении полученной на первом этапе ступенчатой системы.

Ступенчатая система имеет, вообще говоря, бесчисленное множество решений. В последнем уравнении этой системы выражаем первое неизвестное x_k через оставшиеся неизвестные $(x_{k+1}, x_{k+2}, \dots, x_n)$. Затем подставляем значение x_k в предпоследнее уравнение системы и выражаем x_{k-1} через $(x_{k+1}, x_{k+2}, \dots, x_n)$; затем находим $x_{k-2}, x_{k-3}, \dots, x_1$. Придавая свободным неизвестным $(x_{k+1}, x_{k+2}, \dots, x_n)$ произвольные значения, получим бесчисленное множество частных решений системы.

§4. …метод Гаусса (продолжение)

З а м е ч а н и е 1. Если ступенчатая система оказывается треугольной, т.е. $k = n$, то исходная система имеет единственное решение. Из последнего уравнения найдем x_n, из предпоследнего уравнения x_{n-1}, далее, поднимаясь по системе, найдем все остальные неизвестные $x_{n-2}, x_{n-3}, \dots, x_1$.

З а м е ч а н и е 2. На практике удобнее работать не с исходной системой линейных алгебраических уравнений, а с ее расширенной матрицей, выполняя все элементарные преобразования над ее строками. Удобно, чтобы коэффициент a_{11} был равен единице. Для того, чтобы добиться этого, можно либо уравнения поменять местами, либо разделить обе части уравнения на $a_{11} \neq 1$.

§4. …метод Гаусса (продолжение)

П р и м е р 5: Решить систему методом Гаусса:

$$\begin{cases} x + y + z = 3, \\ x + 2y + 3z = 2, \\ x + 3y + 6z = -1. \end{cases}$$

<u>Решение</u>: Произведем элементарные преобразования над строчками расширенной матрицы системы:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 6 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 6 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 5 & -4 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

§4. …метод Гаусса (продолжение)

Полученная матрица соответствует системе

$$\begin{cases} x + y + z = 3, \\ \quad y + 2z = -1, \\ \qquad\quad z = -2. \end{cases}$$

Осуществляя обратный гауссов ход, получим решение $x = 2$; $y = 3$; $z = -2$.

§5. Системы линейных однородных уравнений

Пусть дана система m линейных однородных алгебраических уравнений с n неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0. \end{cases}$$

Очевидно, что однородная система всегда совместна, т.е. $r(A) = r(\bar{A})$, и имеет *нулевое* (*тривиальное*) решение $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$.

Возникает, однако, вопрос, при каких условиях однородная система имеет и нетривиальное решение?

На этот вопрос отвечают следующие две теоремы.

§5. Системы линейных однородных уравнений (продолжение)

Т е о р е м а. Для того, чтобы система однородных уравнений имела ненулевые решения, необходимо и достаточно, чтобы ранг $r(A)$ ее основной матрицы был меньше числа n неизвестных, т.е. $r(A) < n$.

Доказательство: Необходимость ($\Rightarrow$). Так как ранг не может превосходить размера матрицы, то, очевидно, $r(A) \le n$. Пусть $r(A) = n$. Тогда один из миноров размера $n \times n$ отличен от нуля. Поэтому соответствующая система линейных уравнений имеет единственное (нулевое) решение: $x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta} = 0$, $\Delta_i = 0$, $\Delta \neq 0$. Значит, других решений, кроме тривиальных, нет. Итак, если есть нетривиальное решение, то $r(A) < n$.

Достаточность ($\Leftarrow$). Пусть $r(A) < n$. Тогда однородная система, будучи совместной, является неопределенной. Значит она имеет бесчисленное множество решений, т.е. имеет и ненулевые решения, ч.т.д.

§5. Системы линейных однородных уравнений (продолжение)

Т е о р е м а. Для того, чтобы однородная система n линейных уравнений с n неизвестными имела ненулевые решения, необходимо и достаточно, чтобы ее определитель Δ был равен нулю, т.е. $\Delta = 0$.

Доказательство: Если система имеет ненулевые решения, то $\Delta = 0$. Ибо при $\Delta \neq 0$ система имеет только единственное, нулевое, решение. Если же $\Delta = 0$, то ранг $r(A)$ основной матрицы системы меньше числа неизвестных, т.е. $r(A) < n$. И, значит, система имеет бесконечное множество (ненулевых) решений, ч.т.д.

§5. Системы однородных уравнений (продолжение)

П р и м е р 6: Решить систему:

$$\begin{cases} x - 2y + 4z = 0, \\ 2x - 3y + 5z = 0. \end{cases}$$

Решение: Проверим систему на наличие нетривиальных решений. Для этого вычислим ранг матрицы системы $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 2 & -3 & 5 \end{pmatrix}$. Поскольку, например, $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$, то $r(A) = 2$, что меньше числа неизвестных $n = 3$. Следовательно, система имеет бесчисленное множество решений. Найдем их:

$$\begin{cases} x - 2y = -4z, \\ 2x - 3y = -5z. \end{cases}$$

Решая последнюю систему любым способом, например, методом Гаусса, получим общее решение в виде $x = 2z$; $y = 3z$, где $z \in \boldsymbol{R}$.

* Спасибо за внимание!
* Ваши вопросы, замечания, предложения …