Рекуррентные уравнения

Основные методы решения рекуррентных уравнений

- Метод итераций;
- Подстановочный метод;
- Метод рекурсивных деревьев.

Метод итераций

Пример 1. Найти решение рекуррентного уравнения $T(n) = 2 \cdot T\left(\frac{n}{2}\right) + 5n^2$, $T(1) = 7$ методом итераций.

Решение: Пусть $n=2^k$.

$$T(n) = 2\cdot T\left(\frac{n}{2}\right) + 5n^2 = 2\left(2T\left(\frac{n}{4}\right) + 5\left(\frac{n}{2}\right)^2\right) + 5n^2 =$$

$$= 2\left(2\left(2T\left(\frac{n}{8}\right) + 5\left(\frac{n}{4}\right)^2\right) + 5\left(\frac{n}{2}\right)^2\right) + 5n^2 =$$

$$= 2^k T(1) + 2^{k-1}\cdot 5\left(\frac{n}{2^{k-1}}\right)^2 + \ldots + 2\cdot 5\left(\frac{n}{2}\right)^2 + 5n^2$$

$$7n + 5\sum_{i=0}^{k-1} \frac{n^2}{2^i} = 7n + 5n^2 \sum_{i=0}^{k-1} \frac{1}{2^i}$$

$$\sum_{i=1}^{k-1`} \frac{1}{2^i} = 1 - \frac{1}{2^n}$$

$$T(n) = 7n + 5n^2\left(2 - \frac{1}{2^{k-1}}\right) = 7n + 5n^2\left(2 - \frac{2}{n}\right) = 10n^2 - 3n$$

Пример 2. Найти решение рекуррентного уравнения

$$T(n) = aT(n-1) + bn\,,$$

$$0 < a < 1, b > 0, n > 1$$

$$T(1) = 0$$

$$T(n) = aT(n-1) + bn = a\big(T(n-2) + b(n-1)\big) + bn =$$

$$= bn + ab(n-1) + a^2T(n-2) =$$

$$= bn + ab(n-1) + a^2b(n-2) + a^3T(n-3) =$$

$$= b\sum_{i=0}^{n-2} a^i (n-i) \le bn \sum_{i=0}^{n-2} a^i < bn\frac{1}{1-a}$$

Подстановочный метод

Пример 3. Решить рекуррентное уравнение

$$T(n) = 2T\left(\frac{n}{2}\right) + n$$

Идея метода: Найти функцию g(n) наименьшего возможного порядка так, что при подстановке в рекуррентное уравнение вместо T(n) получим верное неравенство

$$g(n) \geq 2g\left(\frac{n}{2}\right) + n$$

Подставим функцию $g(n)=cn$ в уравнение

и получим ложное неравенство

$$cn \leq cn + n$$

Подставим теперь функцию $g(n) = cn^2$

Получим неравенство $cn^2 \geq \frac{cn^2}{2} + n$

или c>2/n, которое верно для c≥2

Пусть $g(n) = cn\log_2 n$

Тогда

$$cn\log_2 n \ldots 2c\frac{n}{2}\log_2\left(\frac{n}{2}\right) + n$$

$$cn\log_2 n \ldots cn(\log_2 n - 1) + n$$

$$cn\log_2 n \geq cn\log_2 n - cn + n$$

$$T(n) \approx O(n\log_2 n)$$

Пример 4. Методом подстановок решить рекуррентное уравнение

$$T(n) = 2T\left(\frac{n}{2}\right) + b$$

Метод рекурсивных деревьев

Пример 5. Решить рекуррентное уравнение:

$$T(n) = T\left(\frac{n}{3}\right) + T\left(\frac{2n}{3}\right) + n$$

Идея метода: По виду рекуррентного уравнения строится древовидная структура.

На первой итерации формируется дерево по правилу:

- в корень дерева заносится свободный член исходного рекуррентного уравнения;
- Сыновьями этого корня являются рекуррентные функции правой части исходного соотношения.

На последующих итерациях для каждого из сыновей строится аналогичная древовидная структура.

1. Вычисляются суммы значений для равноудаленных от корня вершин;
2. Находится максимальная сумма по уровням.

Общая трудоемкость ограничена:

1. Максимальной суммой, умноженной на количество уровней;
2. суммой всех значений по уровням.

Пример 6. Решить рекуррентное уравнение

$$T(n) = T\left(\frac{n}{5}\right) + T\left(\frac{3n}{4}\right) + n$$

Теорема 1. Пусть *a*, *b*,c, *k* – некоторые константы. Тогда решение рекуррентного уравнения

$$T(n) = aT(n/b) + cn^k \ , \ T(1) = c$$

имеет вид:

- $T(n) = O(n^{\log_b a})$, если $a > b^k$
- $T(n) = O(n^k \log n)$, если $a = b^k$
- $T(n) = O(n^k)$, если $a < b^k$