



Рекуррентные уравнения

Основные методы решения рекуррентных уравнений

- ❖ Метод итераций;
- ❖ Подстановочный метод;
- ❖ Метод рекурсивных деревьев.

Метод итераций

Пример 1. Найти решение рекуррентного

уравнения $T(n) = 2 \cdot T\left(\frac{n}{2}\right) + 5n^2$, $T(1) = 7$

методом итераций.

Решение: Пусть $n=2^k$.

$$T(n) = 2 \cdot T\left(\frac{n}{2}\right) + 5n^2 = 2\left(2T\left(\frac{n}{4}\right) + 5\left(\frac{n}{2}\right)^2\right) + 5n^2 =$$

$$= 2\left(2\left(2T\left(\frac{n}{8}\right) + 5\left(\frac{n}{4}\right)^2\right) + 5\left(\frac{n}{2}\right)^2\right) + 5n^2 =$$

$$= 2^k T(1) + 2^{k-1} \cdot 5\left(\frac{n}{2^{k-1}}\right)^2 + \dots + 2 \cdot 5\left(\frac{n}{2}\right)^2 + 5n^2$$

$$7n + 5 \sum_{i=0}^{k-1} \frac{n^2}{2^i} = 7n + 5n^2 \sum_{i=0}^{k-1} \frac{1}{2^i}$$

$$\sum_{i=1}^{k-1} \frac{1}{2^i} = 1 - \frac{1}{2^n}$$

$$T(n) = 7n + 5n^2 \left(2 - \frac{1}{2^{k-1}} \right) = 7n + 5n^2 \left(2 - \frac{2}{n} \right) = 10n^2 - 3n$$

Пример 2. Найти решение рекуррентного уравнения

$$T(n) = aT(n - 1) + bn ,$$

$$0 < a < 1, b > 0, n > 1$$

$$T(1) = 0$$

$$\begin{aligned}T(n) &= aT(n-1) + bn = a(T(n-2) + b(n-1)) + bn = \\&= bn + ab(n-1) + a^2T(n-2) = \\&= bn + ab(n-1) + a^2b(n-2) + a^3T(n-3) = \\&= b \sum_{i=0}^{n-2} a^i (n-i) \leq bn \sum_{i=0}^{n-2} a^i < bn \frac{1}{1-a}\end{aligned}$$

Подстановочный метод

Пример 3. Решить рекуррентное уравнение

$$T(n) = 2T\left(\frac{n}{2}\right) + n$$

Идея метода: Найти функцию $g(n)$ наименьшего возможного порядка так, что при подстановке в рекуррентное уравнение вместо $T(n)$ получим верное неравенство

$$g(n) \geq 2g\left(\frac{n}{2}\right) + n$$

Подставим функцию $g(n) = cn$ в уравнение
и получим ложное неравенство

$$cn \leq cn + n$$

Подставим теперь функцию $g(n) = cn^2$

Получим неравенство $cn^2 \geq \frac{cn^2}{2} + n$

или $c > 2/n$, которое верно для $c \geq 2$

Пусть $g(n) = cn \log_2 n$

Тогда

$$cn \log_2 n \dots 2c \frac{n}{2} \log_2 \left(\frac{n}{2} \right) + n$$

$$cn \log_2 n \dots cn(\log_2 n - 1) + n$$

$$cn \log_2 n \geq cn \log_2 n - cn + n$$

$$T(n) \approx O(n \log_2 n)$$

Пример 4. Методом подстановок
решить рекуррентное уравнение

$$T(n) = 2T\left(\frac{n}{2}\right) + b$$

Метод рекурсивных деревьев

Пример 5. Решить рекуррентное уравнение:


$$T(n) = T\left(\frac{n}{3}\right) + T\left(\frac{2n}{3}\right) + n$$

Идея метода: По виду рекуррентного уравнения строится древовидная структура.

На первой итерации формируется дерево по правилу:

- в корень дерева заносится свободный член исходного рекуррентного уравнения;
- Сыновьями этого корня являются рекуррентные функции правой части исходного соотношения.

На последующих итерациях для каждого из сыновей строится аналогичная древовидная структура.

- 
1. Вычисляются суммы значений для равноудаленных от корня вершин;
 2. Находится максимальная сумма по уровням.

Общая трудоемкость ограничена:

1. Максимальной суммой, умноженной на количество уровней;
2. суммой всех значений по уровням.

Пример 6. Решить рекуррентное уравнение

$$T(n) = T\left(\frac{n}{5}\right) + T\left(\frac{3n}{4}\right) + n$$

Теорема 1. Пусть a, b, c, k – некоторые константы. Тогда решение рекуррентного уравнения

$$T(n) = aT(n/b) + cn^k, \quad T(1) = c$$

имеет вид:

- $T(n) = O(n^{\log_b a}),$ если $a > b^k$

- $T(n) = O(n^k \log n),$ если $a = b^k$

- $T(n) = O(n^k),$ если $a < b^k$