Решение дифференциальных уравнений. Метод прогонки.

- Прогонкой называется модификация метода Гаусса для решения систем линейных алгебраических уравнений с трехдиагональной матрицей. Если матрица системы обладает определенными свойствами, то метод прогонки является численно устойчивым и очень эффективным методом, который позволяет практически мгновенно решать одномерные краевые задачи, одну из которых мы рассмотрели в предыдущем разделе. Большинство корректно поставленных физических задач приводит к системе уравнений с хорошей матрицей, и в этих случаях метод прогонки проявляет слабую чувствительность как к погрешностям задания начальных условий, так и к погрешностям вычислительного характера.

Суть метода прогонки.

- Суть метода прогонки заключается в том, что, используя специфику структуры матрицы системы уравнений (наличие трех диагоналей), удается получить рекуррентные формулы для вычисления последовательности коэффициентов прогонки,которые позволяют на обратном ходу вычислить значения функции в узлах сетки. Рассматривая конечно-разностное уравнение для первой тройки узлов:
- **b1U1+c1U2=-a1U0,**
- видим, что оно связывает между собой два соседних значения U1, и U_2. Перепишем его в виде:
- **d1U2+e=U1, (1)**
- где d_1 и е1вычисляются по известным значениям. Наблюдательный читатель заметит, что это справедливо только для задач первого рода. Чуть позже мы получим общее решение. Теперь мы можем исключить £/, из уравнения для следующей тройки узлов:
- **a2U1+b2U2+c2U2=f2,**
- подставив значение U1 из уравнения (8). После этой процедуры последнее уравнение также может быть приведено к виду:
- **d3U3+e2=U2,**
- Подстановки можно продолжать и дальше, но для получения рекуррентного соотношения, достаточно рассмотреть одну из них для произвольного индекса i. Подставив
- **di-1Ui+ei-1=Ui-1,**
- в уравнение
- **aiUi-1+biUi+ciUi+1=fi,**
- получим:
- **Ui=-[CiUi+1/(aidi-1+bi)]+[fi-ai+1*ei+1/(aidi-1+bi)] (2)**
- Это соотношение дает две рекуррентные формулы для коэффициентов:
- **di=-Ci/(ai*di-1+bi) (3)**
- **ei=(fi-ai*ei-1)/(aidi-1+bi) (4)**

Суть метода прогонки.

- Цикл вычисления последовательности коэффициентов в соответствии с этими формулами носит название прямого хода прогонки.
- **do=yo, eo=бo,**
- Цикл прямого хода повторяется N-1 раз. Последними будут вычислены коэффициенты d_{N-1} и e_{N-1}, которые связывают функции в двух узлах вблизи правой границы:
- **Un-1=dn-1Un+en-1 (5)**
- Если на правой границе задано условие первого рода $U_n = c$, то уже можно вычислить U_{n-1} и далее продолжать обратный ход прогонки при I = N - 1,..., 1, 0. Если условие более сложное, то надо рассмотреть уравнение (6), определяющее граничное условие на правой границе. Напомним его:
- **Un=ynUn-1+бn (6)**
- Соотношения (6) и (5) составляют систему из двух уравнений с двумя неизвестными. Используя определители, запишем ее решение.
- **Un-1=(en-1+бndn-1)/(1-yndn-1) (7)**
- **Un=(бn+ynen-1)/(1-yndn-1)**
- Таким образом, мы нашли значения в двух узлах, лежащих вблизи правой границы расчетной области. Теперь, используя формулу (2) и уменьшая индекс i от N= 2 до 0, можно вычислить все неизвестные £/.. Этот процесс носит название обратного хода прогонки. Почему-то в голову приходит лозунг нашего времени: «Цели ясны, задачи определены.

Теоретическая часть

- Пусть Ax=b, где A – трехдиагональная матрица. Матрица $A=[a_{ij}]$ называется (2m+1) – диагональной, если $a_{ij}=0$ при $|i-j|>m$.
- Для решения систем уравнений такого вида часто наиболее целесообразно применять метод Гаусса при естественном порядке исключения неизвестных. В случае, когда этот метод применяется для решения СЛАУ, его называют *методом прогонки*.

$$A = \begin{pmatrix} C_1 & B_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ A_2 & C_2 & B_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A_3 & C_3 & B_3 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & A_n & C_n \end{pmatrix}.$$

Теоретическая часть

- Получаем , $A_i x_{i-1} + C_i x_i + B_i x_{i+1} = b_i$ (1)
- используем метод прогонки, исходя из следующего рекуррентного соотношения: $x_{i-1} = \alpha_{i-1} x_i + \beta_{i-1}$,(2)
- получаем: $\alpha_2 = \frac{-B_1}{C_1}, \beta_2 = \frac{b_1}{C_1}$; (3) $\alpha_{i+1} = \frac{-B_i}{A_i \alpha_i + C_i}, \beta_{i+1} = \frac{b_i - A_i \beta_i}{A_i \alpha_i + C_i}$; (4)
- Эти формулы представляют собой прямой проход метода. Обратный проход: $x_n = \frac{b_n - A_n \beta_n}{A_n \alpha_n + C_n}$; (5)
- Остальные x_i находим из формулы (2).
- Для применимости метода прогонки достаточно, чтобы матрица A была с диагональным преобладанием.

Алгоритм.

- 1. Вводим str/stlb – количество строк/столбцов, A – элементы расширенной матрицы
- 2. Проверяем матрицу на диагональное преобладание
- 3. Если матрица с диагональным преобладанием тогда п.4, иначе п.8
- 4. Выполняем прямой ход метода (формулы (3), (4)): c[1]:=A[1,2]/A[1,1]; d[1]:=A[1,stlb]/A[1,1];
- c[i]:= (-A[i,i+1])/(A[i,i-1]*c[i-1]+A[i,i]);
- d[i]:= (A[i,stlb]-A[i,i-1]*d[i-1])/(A[i,i-1]*c[i-1]+A[i,i])
- 5. Далее обратный ход (формулы (2),(5)):
- x[str]:=(A[str,stlb]-A[str,str-1]*d[str-1])/(A[str,str]+A[str,str-1]*c[str-1]);
- x[i]:=c[i]*x[i+1]+d[i];
- 6. Выводим x;
- 7. Проверки на невязку;
- 8. Заканчиваем алгоритм.
- *В программе: A[i,i+1] = B_i, A[i,i] = C_i, A[i,i-1] = A_i, A[i,stlb] = b_i, d[i] = $?_i$, c[i] = $?_i$, str = n.*
- <u>Описание входной информации:</u> Str (Stlb) – количество строк (столбцов) в расширенной матрице, A [i, j] – матрица A (i – строки, j – столбцы)

Метод прогонки.

- Если матрица системы является разреженной, то есть содержит большое число нулевых элементов, то применяют еще одну модификацию метода Гаусса - метод прогонки. Рассмотрим систему уравнений с трехдиагональной матрицей:

$$\begin{cases} b_1x_1 + c_1x_2 = d_1 \\ a_2x_1 + b_2x_2 + c_2x_3 = d_2 \\ \text{-------------------------} \\ a_ix_{i-1} + b_ix_i + c_ix_{i+1} = d_i \\ \text{-------------------------} \\ a_mx_{m-2} + b_{m-1}x_{m-1} + c_{m-1}x_m = d_{m-1} \\ a_mx_{m-1} + b_mx_m = d_m \end{cases}$$

Преобразуем первое уравнение системы к виду

- $x_1 = \alpha_1 x_2 + \beta_1$, где ; $\alpha_1 = -c_1 / b_1$ $\beta_1 = d_1 / b_1$
- Подставим полученное выражение во второе уравнение системы и преобразуем его к виду
- $x_2 = \alpha_2 x_3 + \beta_2$ и т.д.

- На *i*-ом шаге уравнение преобразуется к виду
- $x_i = \alpha_i x_{i+1} + \beta_i$, где $\alpha_i = -c_i/(b_i + a_i\alpha_{i-1})$ $\beta_i = (d_i - a_i\beta_{i-1})/(b_i + a_i\alpha_{i-1})$
- На *m*-ом шаге подстановка в последнее уравнение выражения $x_{m-1} = \alpha_{m-1}x_m + \beta_{m-1}$ дает возможность определить значение x_m : $x_m = \beta_m = (d_m - a_m\beta_{m-1})/(b_m + a_m\alpha_{m-1})$
- . Значения остальных неизвестных
- находятся по формулам: $x_i = \alpha_i x_{i+1} + \beta_i$
- , *i = m-1, m-2, ..., 1.*

Метод прогонки.

- Для решения систем вида $Ax = F$ или, что то же самое,
- $A_i x_{i-1} + C_i x_i + B_i x_{i+1} = F_i$
- используется **метод прогонки**, основанный на предположении, что искомые неизвестные связаны рекуррентным соотношением:
- $x_i = \alpha_{i+1} x_{i+1} + \beta_{i+1}$, где $i = n-1, n-2, \dots, 1$ (2)
- Используя это соотношение, выразим x_{i-1} и x_i через x_{i+1} и подставим в уравнение (1):

$$\left(A_i\alpha_i\alpha_{i+1} + C_i\alpha_{i+1} + B_i\right) x_{i+1} + A_i\alpha_i\beta_{i+1} + A_i\beta_i + C_i\beta_{i+1} - F_i = 0$$

где F_i — правая часть i-то уравнения. Это соотношение будет выполняться независимо от решения, если потребовать

- $$\begin{cases} A_i\alpha_i\alpha_{i+1} + C_i\alpha_{i+1} + B_i = 0 \\ A_i\alpha_i\beta_{i+1} + A_i\beta_i + C_i\beta_{i+1} - F_i = 0 \end{cases}$$
- Из первого уравнения получим: $\alpha_{i+1} = \dfrac{-B_i}{A_i\alpha_i + C_i}$ $\beta_{i+1} = \dfrac{F_i - A_i\beta_i}{A_i\alpha_i + C_i}$

$\alpha_2 = \dfrac{-B_1}{C_1}$ $\beta_2 = \dfrac{F_1}{C_1}$

Метод прогонки.

- После нахождения прогоночных коэффициентов α и β, используя уравнение (2), получим решение системы. При этом,

$x_i = \alpha_{i+1} x_{i+1} + \beta_{i+1},$ $i = n-1..1$ $x_n = \dfrac{F_n - A_n\beta_n}{C_n + A_n\alpha_n}$

- Другим способом объяснения существа метода прогонки, более близким к терминологии конечно-разностных методов и объясняющим происхождение его названия, является следующий: преобразуем уравнение (1) к эквивалентному ему уравнению
- $A'x = F'$ (1')
- с надиагональной матрицей

$$A' = \begin{pmatrix} C'_1 & B_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & C'_2 & B_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C'_3 & B_3 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & C'_{n-1} & B_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & C'_n \end{pmatrix}$$

- Вычисления проводятся в два этапа. На первом этапе вычисляются компоненты матрицы C'_i и вектора F', начиная с i=2 до i=n

$C'_1 = C_1;$ $C'_i = \dfrac{C_i - A_iB_{i-1}}{C'_{i-1}},$ $F'_1 = F_1;$ $F'_i = \dfrac{F_i - F_{i-1}B_{i-1}}{C'_{i-1}}.$

- На втором этапе, для вычисляетсяi=n, n-1,…1 решение: $x_n = \dfrac{F'_n}{C'_n};$ $x_i = \dfrac{F'_i - B_i x_{i+1}}{C'_i}.$

Такая схема вычисления объясняет также английский термин этого метода «shuttle».

- Для применимости формул метода прогонки достаточно свойства <u>диагонального преобладания</u> у матрицы А.
- <u>Описание выходной информации:</u> х – матрица-ответ

Спасибо за внимание!