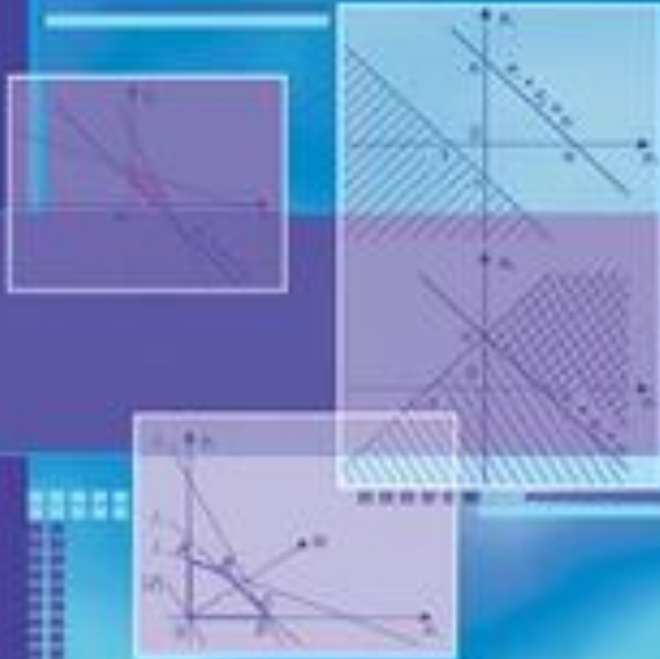


КВАЛИФИКАЦИОННЫЙ  
УРОВЕНЬ

Д.Г. Супрун

# МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ

Часть I. Задачи линейного программирования



# Решение прикладных задач

**Студенты группы 03-11 нэо:**

**Медведева Е.В.**

**Дорофеева В.В.**

**Анисимова Е.О.**

**Фокина М.А.**

**Патрулина Н.О.**

**Деделькина Н.А.**

# Задача 1

**Условие:** Завод выпускает два вида строительных материалов: жидкое стекло и пенопласт. Трудозатраты на производство 1 т. стекла – 20 ч. , пенопласта – 10ч. На заводе работает 10 рабочих по 40 часов в неделю. Оборудование позволяет производить не более 15 т. стекла и 30 т. пенопласта в неделю. Прибыль от реализации 1 т. стекла – 50 руб., 1 т. пенопласта – 40 руб. Сколько материалов каждого вида необходимо произвести для того, чтобы получить максимальную прибыль?

	Пенопласт	Жидкое стекло	Ограничения
Трудозатраты	10	20	$\leq 400$
Прибыль от реализации	40	50	max
Количество продукции	$\leq 30$	$\leq 15$	

## Решение:

Обозначим через  $x_1$ ,  $x_2$  выпуск жидкого стекла и пенопласта в тоннах в неделю, соответственно.

Оборудование позволяет производить не более 15 т. стекла и 30 т. пенопласта в неделю, следовательно,  $x_1 \leq 15$  и  $x_2 \leq 30$ .

Трудозатраты на производство  $x_1$  тонны жидкого стекла и  $x_2$  тонны пенопласта составят  $20x_1 + 10x_2$  часов, и так как на заводе работает 10 рабочих по 40 часов в неделю, то  $20x_1 + 10x_2 \leq 400$ .

Прибыль от реализации 1 т. стекла – 50 руб., 1 т. пенопласта – 40 руб., поэтому  $Z = 50x_1 + 40x_2 \rightarrow \max$ .

Составим математическую модель

Необходимо составить такой план выпуска, при котором функция  $Z = 50x_1 + 40x_2$  достигает максимума и будут выполнены ограничения

$$\begin{cases} 20x_1 + 10x_2 \leq 400, \\ x_1 \leq 15 \\ x_2 \leq 30 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} Z = 50x_1 + 40x_2 \rightarrow \max \\ 2x_1 + x_2 \leq 40, \\ x_1 \leq 15 \\ x_2 \leq 30 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

# Задача 2

**Условие:** Предприятие располагает ресурсами сырья и рабочей силы, необходимыми для производства двух видов продукции.

Запас сырья составляет 120 т. , трудозатрат – 400 часов. На единицу первого продукта необходимо затратить 3 т. сырья, на единицу второго – 5 т. На единицу первого продукта тратится 14 ч.. второго – 12 ч. Прибыль от реализации единицы первого продукта равна 30тыс./т., второго продукта – 35 тыс./т. Чему равна максимальная прибыль?

	<b>X 1</b>	<b>X2</b>	<b>Ограничение</b>
Сырье	3 т	5 т	120 т
Рабочая сила	14 ч	12 ч	400 ч
Прибыль	30 тыс/т	35 тыс/т	max

**Решение:** Обозначим через  $x_1$ ,  $x_2$  выпуск жидкого стекла и пенопласта в тоннах в неделю, соответственно.

Оборудование позволяет производить не более 15 т. стекла и 30 т. пенопласта в неделю, следовательно,  $x_1 \leq 15$  и  $x_2 \leq 30$ .

Трудозатраты на производство  $x_1$  тонны жидкого стекла и  $x_2$  тонны пенопласта со ставят часов, и так как на заводе работает 10 рабочих по 40 часов в неделю, то  $20x_1 + 10x_2 \leq 400$ .

Прибыль от реализации 1 т. стекла – 50 руб., 1 т. пенопласта – 40 руб., поэтому  $F = 50x_1 + 40x_2 \rightarrow \max$ .

Необходимо составить такой план выпуска, при котором функция  $F = 50x_1 + 40x_2$  достигает максимума и будут выполнены ограничения:

$$\begin{cases} 20x_1 + 10x_2 \leq 400, \\ x_1 \leq 15 \\ x_2 \leq 30 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

# Задача 3

**Условие:** Предприятие производит продукцию двух видов, используя для этого ресурсы трех видов. Известна технологическая матрица  $A$  и вектор ресурсов  $b$ . Элемент технологической матрицы  $a_{i,j}$  соответствует ресурсу  $i$ , необходимому для производства единицы продукта  $j$ .

$$\text{Технологическая матрица } A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{вектор } b = \begin{pmatrix} 90 \\ 50 \\ 80 \end{pmatrix}$$



## Решение:

Обозначим  $x_1$ ,  $x_2$  число единиц продукции 1-ого и 2-ого видов, запланированных к производству. Известна технологическая матрица  $A$  и вектор ресурсов  $b$ . Количество продукции  $x_1$  и  $x_2$  удовлетворяет системе ограничений:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 90 \\ 50 \\ 80 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 + 3x_2 \leq 90, \\ x_1 + x_2 \leq 50, \\ 2x_1 \leq 80, \end{cases}$$

# Задача 4

**Условие:** Предприятие имеет ресурсы А и В в количестве 240 и 120 единиц соответственно. Ресурсы используются при выпуске двух видов изделий, причем расход на изготовление одного изделия первого вида составляет 3 единицы ресурса А и две единицы ресурса В, на изготовление одного изделия второго вида – 2 единицы ресурса А и 2 единицы ресурса В. Прибыль от реализации одного изделия первого вида – 20 руб. , второго вида – 30 руб. Ресурс В должен быть использован полностью, изделий первого вида надо выпустить не менее, чем изделий второго вида.

	x1	x2	Наличие
A	3 ед	2 ед	240 ед
B	2 ед	2 ед	120 ед
Прибыль	20 руб	30 руб	

**Решение.** Обозначим  $x_1, x_2$  число единиц продукции 1-ого и 2-ого видов, запланированных к производству. Для их изготовления потребуется  $3x_1 + 2x_2$  единиц ресурса А и  $2x_1 + 2x_2$  единиц ресурса В. Предприятие имеет ресурсы А и В в количестве 240 и 120 единиц соответственно.

Прибыль от реализации единицы первого продукта равна 20руб., второго продукта – 30 руб., следовательно, прибыль равна  $Z = 20x_1 + 30x_2$ .

Так как изделий первого вида надо выпустить не менее, чем изделий второго вида, то  $x_1 \geq x_2$ .

Сформулируем экономико-математическую модель задачи:

Найти такой план выпуска продукции  $\bar{x} = (x_1, x_2)$ , удовлетворяющий системе

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \leq 240, \\ 2x_1 + 2x_2 = 120, \\ x_1 - x_2 \geq 0 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

при котором функция  $Z = 20x_1 + 30x_2$  принимает максимальное значение ( $Z = 20x_1 + 30x_2 \rightarrow \max$ ).

# Задача 5

**Условие:** Компания, занимающаяся добычей руды, имеет четыре карьера. Производительность карьеров соответственно 170, 130, 190, 200 тыс. т. ежемесячно. Руда направляется на три обогатительные фабрики, мощности которых соответственно 250, 150, 270 тыс. т. в месяц. Транспортные затраты на перевозку 1 тыс. т. руды с карьеров на фабрики заданы таблично. Сформировать таблицу транспортных затрат самостоятельно. Составить математическую модель задачи.

Запишем таблицу транспортных затрат

$$C = \begin{pmatrix} 12 & 14 & 21 \\ 14 & 14 & 19 \\ 3 & 8 & 14 \\ 24 & 33 & 36 \end{pmatrix}$$

Обозначим через  $x_{ij}$  количество руды (тыс. тонн) перевезённое с  $i$ -ого карьера на  $j$ -ую обогатительную фабрику.

$$\text{Затраты на перевозку равны } Z = \sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^3 c_{ij} x_{ij}.$$

На карьерах добывается  $170+130+190+200=690$  тыс. т. руды.

Обогатительные фабрики перерабатывают  $250+150+270=670$  тыс. т руды, меньше чем добывают.

Сформулируем экономико-математическую модель задачи.

Необходимо найти минимум функции  $Z = \sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^3 c_{ij} x_{ij}$  при ограничениях:

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + x_{13} \leq 170, \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} \leq 130, \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} \leq 190, \\ x_{41} + x_{42} + x_{43} \leq 200, \\ x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41} = 250, \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} + x_{42} = 150, \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} + x_{43} = 270, \\ x_{ij} \geq 0, \quad i = 1, 2, 3, 4; \quad j = 1, 2, 3; \end{cases}$$

# Задача 6

**Условие:** Компания, занимающаяся добычей руды, имеет четыре карьера. Производительность карьеров соответственно 170, 130, 190, 200 тыс. т. ежемесячно. Руда направляется на три обогатительные фабрики, мощности которых соответственно 250, 150, 270 тыс. т. в месяц. Транспортные затраты на перевозку 1 тыс. т. руды с карьеров на фабрики заданы таблично. Сформировать таблицу транспортных затрат самостоятельно. Составить математическую модель задачи.

	x1	x2	x3	x4	x5	Мах время работы станков
А станок	3	5	11	10	5	100
В станок	5	10	15	3	2	250
С станок	4	8	6	12	10	180
Время выполнения операции	100	120	70	110	130	



Обозначим через  $x_{ij}$  время (часов) затраченное  $i$ -ой группой станков на выполнение  $j$ -ой операции.

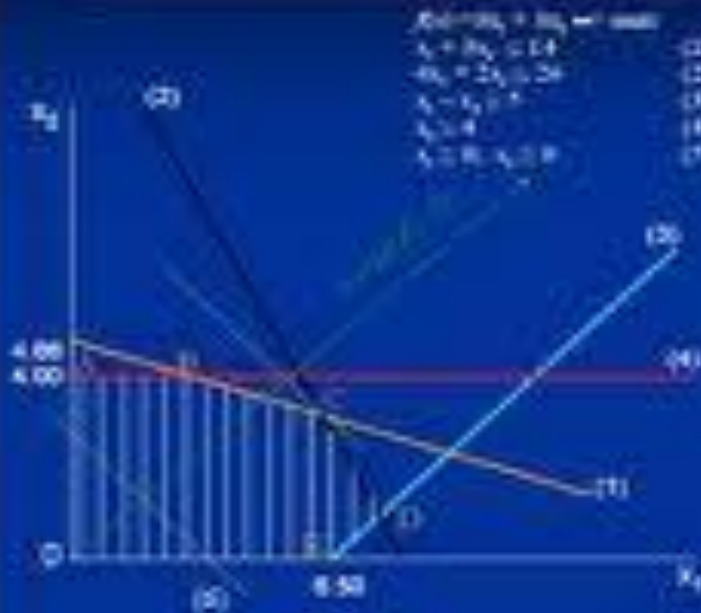
Так как время работы станков равно  $100+250+180=530$ ч. и время выполнения всех операций составляет  $100+120+70+110+130=530$  ч., то должны выполняться ограничения:

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{15} = 100, \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} + x_{25} = 250, \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} + x_{35} = 180, \\ x_{11} + x_{21} + x_{31} = 100, \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} = 120, \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} = 70, \\ x_{14} + x_{24} + x_{34} = 110, \\ x_{15} + x_{25} + x_{35} = 130, \\ x_{ij} \geq 0, \quad i = 1, 2, 3; \quad j = 1, 2, 3, 4, 5; \end{cases}$$

Необходимо найти максимум функции  $Z = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^5 a_{ij} x_{ij}$  при ограничениях приведённых

выше.

## Графический метод решения задач математического программирования



Шаг 1. Построим область допустимых значений для  $x_1$  и  $x_2$ .

Шаг 2. Проводится направление (5):

$$V = \text{grad}(Z) = (3, 3)$$

Шаг 3. Проводится прямая (6) перпендикулярная прямой (5).

Шаг 4. Прямая (6) перемещается по прямой (5) до верхней точки касания с областью.

Спасибо за внимание!!!