практика № 5 (5117)

РЕШЕНИЕ СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ С ПОМОЩЬЮ ОБРАТНОЙ МАТРИЦЫ

Была задана домашняя работа (на отдельных листах)

1) Найти A^{-1} - обратную матрицу(и сделать проверку) для матрицы A из задачи 1 своего варианта РГР .

из лекции №3

Дома сделать проверку.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \\ 2 & 5 & 1 \end{pmatrix} \qquad A^{-1} = \begin{pmatrix} {}^{6}/_{15} & {}^{-3}/_{15} & 0 \\ {}^{-3}/_{15} & {}^{-1}/_{15} & {}^{5}/_{15} \\ {}^{3}/_{15} & {}^{11}/_{15} & {}^{-10}/_{15} \end{pmatrix}$$

из практики № 4

Дома сделать проверку.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 4 & -2 & 5 \end{pmatrix} \qquad A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ {}^{7}/_{4} & {}^{-9}/_{4} & {}^{5}/_{4} \\ {}^{3}/_{2} & {}^{-5}/_{2} & {}^{3}/_{2} \end{pmatrix};$$

Проверка: $A\cdot A^{-1}=A^{-1}\cdot A=E=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix}1&2&-1\\3&0&2\\4&-2&5\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1&2&-1\\7/4&-9/4&5/4\\3/2&-5/2&3/2\end{pmatrix}=C_{3\times3}=\begin{pmatrix}c_{11}&c_{12}&c_{13}\\c_{21}&c_{22}&c_{23}\\c_{31}&c_{32}&c_{33}\end{pmatrix};$$

$$c_{11}=\begin{pmatrix}1&2&-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1\\7/4\\3/2\end{pmatrix}=1\cdot(-1)+\cancel{2}\cdot\frac{7}{\cancel{4}_2}+(-1)\cdot\frac{3}{2}=-1+\frac{7}{2}-\frac{3}{2}=\frac{-2+7-3}{2}=\frac{2}{2}=1;$$

$$c_{12}=\begin{pmatrix}1&2&-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2\\-9/4\\-5/2\end{pmatrix}=1\cdot2+\cancel{2}\cdot\left(-\frac{9}{\cancel{4}}\right)_2+(-1)\cdot\left(\frac{-5}{2}\right)=2-\frac{9}{2}+\frac{5}{2}=\frac{4-9+5}{2}=$$

$$=\frac{0}{2}=0;$$

$$c_{13}=\begin{pmatrix}1&2&-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1\\5/4\\3/2\end{pmatrix}=1\cdot(-1)+\cancel{2}\cdot\frac{5}{\cancel{4}_2}+(-1)\cdot\left(\frac{3}{2}\right)=-1+\frac{5}{2}-\frac{3}{2}=\frac{-2+5-3}{2}=$$

$$=\frac{0}{2}=0;$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 4 & -2 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 7/4 & -9/4 & 5/4 \\ 3/2 & -5/2 & 3/2 \end{pmatrix} = C_{3\times 3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix};$$

$$c_{21} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 7/4 \\ 3/2 \end{pmatrix} = 3 \cdot (-1) + 0 \cdot \frac{7}{4} + \cancel{2} \cdot \frac{3}{\cancel{2}} = -3 + 0 + 3 = 0;$$

$$c_{22} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -9/4 \\ -5/2 \end{pmatrix} = 3 \cdot 2 + 0 \cdot \left(-\frac{9}{4}\right) + \cancel{2} \cdot \left(-\frac{5}{\cancel{2}}\right) = 6 + 0 - 5 = 1;$$

$$c_{23} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 5/4 \\ 3/2 \end{pmatrix} = 3 \cdot (-1) + 0 \cdot \frac{5}{4} + \cancel{2} \cdot \frac{3}{\cancel{2}} = -3 + 0 + 3 = 0;$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 4 & -2 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 7/4 & -9/4 & 5/4 \\ 3/2 & -5/2 & 3/2 \end{pmatrix} = C_{3\times 3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix};$$

$$c_{31} = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 7/4 \\ 3/2 \end{pmatrix} = 4 \cdot (-1) + (-\cancel{2}) \cdot \frac{7}{\cancel{4}_2} + 5 \cdot \frac{3}{2} = -4 - \frac{7}{2} + \frac{15}{2} = \frac{-8 - 7 + 15}{2} = 0;$$

$$c_{32} = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -9/4 \\ -5/2 \end{pmatrix} = 4 \cdot 2 + (-\cancel{2}) \cdot \left(-\frac{9}{\cancel{4}}\right)_2 + 5 \cdot \left(-\frac{5}{2}\right) = 8 + \frac{9}{2} - \frac{25}{2} =$$

$$= \frac{16 + 9 - 25}{2} = 0;$$

$$c_{33} = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 5/4 \\ 3/2 \end{pmatrix} = 4 \cdot (-1) + (-\cancel{2}) \cdot \frac{5}{\cancel{4}_2} + 5 \cdot \frac{3}{2} = -4 - \frac{5}{2} + \frac{15}{2} = \frac{-8 - 5 + 15}{2} =$$

$$= \frac{2}{2} = 1;$$

ОТВЕ
Т:

$C_{3\times 3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ - единичная матрица, поэтому обратная матрица найдена верно.

Решение систем уравнений с помощью обратной матрицы

Запишем систему линейных уравнений:

с помощью матриц:

$$3 \cdot (-1) + 0 \cdot \frac{7}{4} + 2 \cdot \frac{3}{2} =$$

$$6 + 0 - 5 = 1;$$

$$3 \cdot 2 + 0 \cdot \left(-\frac{9}{4}\right) + 2 \cdot \left(-\frac{5}{2}\right) =$$

Тогда система уравнений в матричной форме будет выглядеть:

$$3 \cdot (-1) + 0 \cdot \frac{5}{4} + 2 \cdot \frac{3}{2} =$$

$$c_{22} =$$

$$0\,;$$

$$c_{21} =$$

$$c_{23} = \quad (4 \quad -2 \quad 5) \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 7/4 \\ 3/2 \end{pmatrix} =$$

По определению обратной матрицы

$$(4 \quad -2 \quad 5) \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -9/4 \\ -5/2 \end{pmatrix} =$$

, поэтому

$$(4 \quad -2 \quad 5) \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 5/4 \\ 3/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 4 & -2 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 7/4 & -9/4 & 5/4 \\ 3/2 & -5/2 & 3/2 \end{pmatrix} = C_{3x3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix};$$

так как при умножении на единичную матрица не изменяется, то

$$0;$$

и уравнение принимает вид:

$$4 \cdot (-1) + (-2) \cdot \frac{7}{4} + 5 \cdot \frac{3}{2} =$$

$$-3 + 0 + 3 =$$

Пример решения системы с помощью обратной матрицы

$$\begin{cases} 3x + 2y + z = 3 \\ x + 4y + 2z = 1 \\ 2x + 5y + z = -1 \end{cases}$$

Матрица системы $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \\ 2 & 5 & 1 \end{pmatrix}$;

столбец неизвестных $\mathrm{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$;

столбец правых частей $\mathrm{B} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$;

Обратная матрица A^{-1} найдена в лекции №3

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} {}^{6}/_{15} & {}^{-3}/_{15} & 0 \\ {}^{-3}/_{15} & {}^{-1}/_{15} & {}^{5}/_{15} \\ {}^{3}/_{15} & {}^{11}/_{15} & {}^{-10}/_{15} \end{pmatrix};$$

Вычислим X по формуле: $X = A^{-1} \cdot B$;

$-4-\frac{5}{2}+\frac{15}{2}=$

$$\begin{pmatrix} {}^{6}/_{15} & {}^{-3}/_{15} & 0 \\ {}^{-3}/_{15} & {}^{-1}/_{15} & {}^{5}/_{15} \\ {}^{3}/_{15} & {}^{11}/_{15} & {}^{-10}/_{15} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \left({}^{6}/_{15}\right) \cdot 3 + \left({}^{-3}/_{15}\right) \cdot 1 + 0 \cdot (-1) \\ \left({}^{-3}/_{15}\right) \cdot 3 + \left({}^{-1}/_{15}\right) \cdot 1 + \left({}^{5}/_{15}\right) \cdot (-1) \\ \left({}^{3}/_{15}\right) \cdot 3 + \left({}^{11}/_{15}\right) \cdot 1 + \left({}^{-10}/_{15}\right) \cdot (-1) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} {}^{18}/_{15} - {}^{3}/_{15} + 0 \\ -{}^{9}/_{15} - {}^{1}/_{15} - {}^{5}/_{15} \\ {}^{9}/_{15} + {}^{11}/_{15} + {}^{10}/_{15} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {}^{15}/_{15} \\ {}^{-15}/_{15} \\ {}^{30}/_{15} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

ОТВЕТ

Выполнить дома **проверку** решения системы.

Домашняя работа
(на отдельных листах)

1) Решить задачу 3 своего варианта

РГР .

2) Решить **одну** систему из задачи 3 своего варианта
РГР
с помощью обратной матрицы.