Решение транспортных задач линейного программирования.

Проектирование маршрутов городского транспорта.

Задача 1.

Выбор трассы новой автобусной линии в городе. Построен за городом новый жилой микрорайон, который нужно связать с центром города. Имеем исходную стратегическую игру (Ω, A, L). Статистик пришел к выводу, что линию можно провести до пункта A_1, или A_2, или A_3. Решение $A = \{a_1, a_2, a_3\}$, где a_1, означает проведение трассы до A_1, a_2 - до A_2, a_3 - до A_3, причем A_1 и A_3 находятся в разных концах города. Множеством состояний природы Ω являются Θ_1, Θ_2, Θ_3 - состояния, когда большинство жителей микрорайона работает соответственно в окрестности пункта A_1, пункта A_2 и пункта A_3, находящегося в самом центре города.

Если принятое решение провести трассу не будет удовлетворять нужды жителей микрорайона, то транспортное предприятие понесет потери. Потери будут максимальными при ошибочном решении проложить трассу к пункту A_3 вместо A_1 или наоборот.

Решение. Функция $L(\Theta, a)$ потерь характеризуется матрицей (табл.1).

Таблица 1.

Ω \ A	a_1	a_2	a_3
Θ_1	0	5	10
Θ_2	5	0	5
Θ_3	10	5	0

Преобразуем стратегическую игру (Ω, *A*, *L)* в статистическую (Ω, *D*, *R)* при учете информации о действительном состоянии природы. Для этого проводится выборочный опрос жителей микрорайона. Результаты этого опроса образуют вектор

$$\bar{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix},$$

где x_1, x_2, x_3 - доля от общего числа опрошенных (не менее 50 %), которые предлагают строительство трассы до пунктов A_1, A_2, A_3 соответственно;

x_4 — любое из трех направлений не получило решающего количества голосов.

Действительные данные результата опроса показали следующие вероятности рекомендаций жителей (табл. 2) в зависимости от состояний природы Θ.

Таблица 2.

$P(x_k\|\Theta_j)$ / Θ_j	$P(x_1\|\Theta_j)$	$P(x_2\|\Theta_j)$	$P(x_3\|\Theta_j)$	$P(x_4\|\Theta_j)$
Θ_1	0,7	0,2	0,05	0,05
Θ_2	0,1	0,7	0,1	0,1
Θ_3	0,05	0,2	0,7	0,05

В результате опроса получаем условные вероятности $P(x_1|\Theta_1) = P(x_2|\Theta_2) = P(x_3|\Theta_3) = 0,7$. Пусть $d(x) = a$ - нерандомизированная функция решения, преобразующая множество X результатов эксперимента в множество решений. Множество D нерандомизированных решений при наличии четырех результатов эксперимента и трех возможных решений будет иметь $3^4 = 81$ различную функцию решений статистика в статистической игре с природой (Ω, D, $R\}$. Из них мы ограничимся шестью допустимыми функциями: $d_1, d_2, \dots, d_6$ (табл. 3).

Какие же решения не вошли в допустимые? Недопустимые функции решения — это все функции $d \in D$, которые не ставят в соответствие хотя бы одному из результатов x_1, x_2, x_3 решение a_1, a_2, a_3 потому, что для этих функции значение риска $R(\Theta, d)$ будет всюду большим по сравнению с другими функциями решений. Результат x_4 при этом во внимание не принимается, поскольку он не отражает конструктивного предложения.

Таблица 3.

x \ d	d_1	d_2	d_3	d_4	d_5	d_6
x_1	a_1	a_1	a_1	a_1	a_2	a_3
x_2	a_2	a_2	a_2	a_1	a_2	a_3
x_3	a_3	a_3	a_3	a_1	a_2	a_3
x_4	a_1	a_2	a_3	a_1	a_2	a_3

Учтем полученные условные вероятности и, зная значения функций потерь, вычислим математические ожидания функций потерь, т. е. получим функции риска для допустимых функций решений:

$$R(\Theta_1, d_1) = 0*0{,}7 + 5*0{,}2 + 10*0{,}05 + 0*0{,}05 = 1{,}5;$$

$$R(\Theta_1, d_2) = 0*0{,}7 + 5*0{,}2 + 10*0{,}05 + 5*0{,}05 = 1{,}75;$$

$$R(\Theta_1, d_3) = 0*0{,}7 + 5*0{,}2 + 10*0{,}05 + 10*0{,}05 = 2;$$

$$R(\Theta_2, d_1) = 5*0{,}1 + 0*0{,}7 + 5*0{,}1 + 5*0{,}1 = 1{,}5;$$

$$R(\Theta_2, d_2) = 5*0{,}1 + 0*0{,}7 + 5*0{,}1 + 0*0{,}1 = 1;$$

$$R(\Theta_2, d_3) = 5*0{,}1 + 0*0{,}7 + 5*0{,}1 + 5*0{,}1 = 1{,}5;$$

$$R(\Theta_3, d_1) = 10*0{,}05 + 5*0{,}2 + 0*0{,}7 + 10*0{,}05 = 2;$$

$$R(\Theta_3, d_2) = 10*0{,}05 + 5*0{,}2 + 0*0{,}7 + 5*0{,}05 = 1{,}75;$$

$$R(\Theta_3, d_3) = 10*0{,}05 + 5*0{,}2 + 0*0{,}7 + 0*0{,}05 = 1{,}5.$$

Из табл. 3 видно, что вне зависимости от $x_1, x_2\ x_3, x_4$ решение d_4 будет соответствовать решению a_1, $d_5 \rightarrow a_2$, $d_6 \rightarrow a_3$.

Объединим все полученные решения в табл. 4 и выпишем минимальные значения функции риска по строке и максимальные значения - по столбцу.

Таблица 4.

Θ_j \ d	d_1	d_2	d_3	d_4	d_5	d_6	min
Θ_1	1,5	1,75	2	0	5	10	0
Θ_2	1,5	1	1,5	5	0	5	0
Θ_3	2	1,75	1,5	10	5	0	0
max	2	1,75	2	10	5	10	

Таким образом, как показывает табл. 8.4, среди нерандомизированных функций решений нет минимаксной функции: $v_1=0<v_2=1{,}75$. Следовательно, минимаксную функцию решения надо искать во множестве D^* рандомизированных функций δ.

В данной статистической игре (Ω, D, R) в качестве оптимальной нужно принять минимаксную функцию решения.

Для того чтобы найти рандомизированную минимаксную функцию решения δ_0, следует обратиться к линейному программированию .

Пусть δ - распределение вероятностей на множестве нерандомизированных функций решения *d.* Обозначим это распределение $\eta_1 = P(d_1)$, $\eta_2 = P(d_2)$, … ,$\eta_6 = P(d_6)$. Теперь обозначим через υ цену расширенной статистической игры (Ω, D^*, R) при рандомизации функций решений и запишем в терминах линейного программирования задачу статистика, который решает ее в интересах транспортного предприятия.

Для этого воспользуемся данными табл. 4:

$$\left.\begin{aligned}
&1{,}5\eta_1 + 1{,}75\eta_2 + 2\eta_3 + 5\eta_5 + 10\eta_6 \le \upsilon \\
&1{,}5\eta_1 + \eta_2 + 1{,}5\eta_3 + 5\eta_4 + 5\eta_6 \le \upsilon \\
&2\eta_1 + 1{,}75\eta_2 + 1{,}5\eta_3 + 10\eta_4 + 5\eta_5 \le \upsilon \\
&\eta_1 + \eta_2 + \eta_3 + \eta_4 + \eta_5 + \eta_6 = 1
\end{aligned}\right\}$$

$$\eta_1 \ge 0; \eta_2 \ge 0; \eta_3 \ge 0; \eta_4 \ge 0; \eta_5 \ge 0; \eta_6 \ge 0.$$

Преобразуем переменные, разделив η на цену игры $\upsilon > 0$, и введем дополнительные переменные q_7, q_8, q_9. В результате перейдем от неравенств к равенствам:

$$\max Z = q_1 + q_2 + q_3 + q_4 + q_5 + q_6 = \frac{1}{V};$$

$$1{,}5q_1 + 1{,}75q_2 + 2q_3 + 5q_5 + 5q_6 + q_0 = 1;$$

$$1{,}5q_1 + q_2 + 1{,}5q_3 + 5q_4 + 5q_6 + q_8 = 1;$$

$$2q_1 + 0{,}75q_2 + 1{,}5q_3 + 10q_4 + 5q_5 + q_9 = 1$$

при $q_j > 0, j =$

Решим эту задачу линейного программирования симплексным методом (техника решения известна и здесь не излагается) и получим базисное оптимальное решение:

$q_1 = q_3 = 2/7; q_2 = q_4 = q_5 = q_6 = 0.$

Значит, $Z_{max} = q_1 + q_3 = 2/7 + 2/7 = 4/7.$

Отсюда $\upsilon = 1/Z_{max} = 2/7 = 1{,}75.$

Перейдем к исходным переменным $\eta_i = q_i$;υ $i =$, где η_i - вероятности, с которыми следует сочетать соответствующие нерандомизированные функции решения d_i $(i =$). После перемножения получим рандомизированные функции δ:

$$\eta_1 = \eta_3 = 2/7 \times 7/4 = 1/2;\ \eta_2 = \eta_4 = \eta_5 = \eta_6 = 0.$$

Итак, получена минимаксная рандомизированная функция решения δ_0 с распределением вероятностей: $P(d_1) = 1/2$; $P(d_3) = 1/2$. Как ее охарактеризовать? Это смешанная стратегия δ_0 с одинаковыми вероятностями чистых функций решения d_1 и d_3. Они различаются только результатом статистического эксперимента.

Вывод. В задаче выбора транспортным предприятием наилучшей трассы маршрута новой автобусной линии получена оптимальная минимаксная функция решения:

• если по эксперименту с анкетами получен результат x_1, или x_2, или x_3, то следует принять решение a_1 или a_2, или a_3 соответственно;

• если получен результат x_4, то нужно использовать механизм случайного выбора между решениями a_1 (трассу вести до A_1) и a_3 (трассу вести до A_3) с одинаковыми вероятностями, равными 0,5. Следует сделать одно важное замечание: в данном случае мы из расчетов получили одинаковые вероятности. (Это решение не имеет ничего общего с принципом равновероятности, который иногда необоснованно применяется при отсутствии информации о возможных вероятностях событии.)

Задача 2

Пусть имеется несколько пунктов отправления, в которых сосредоточены запасы какого-либо однородного товара в определенных количествах, несколько пунктов назначения, которые хотят получить этот товар в определенных количествах. Известно, что сумма заявок на получение груза из всех пунктов назначения равна сумме запасов товара, находящегося во всех пунктах отправления. Известна стоимость перевозки единицы товара от каждого пункта отправления до каждого пункта назначения. Требуется составить такой план перевозок, чтобы:

- Все грузы из всех пунктов отправления были вывезены;
- Заявки всех пунктов назначения были бы удовлетворены;
- Суммарные затраты на перевозку были бы минимальны.

Рассмотрим конкретный пример.

Пусть имеется:

- Три пункта отправления: города под названием A_1, A_2, A_3, в которых сосредоточены запасы какого-либо товара (например машин) соответственно в количестве $a_1 = 10$, $a_2 = 20$, $a_3 = 30$;
- три пункта назначения: города под названием B_1, B_2, B_3, в которых сосредоточены потребители товара, желающие получить его в количестве $в_1 = 10$, $в_2 = 10$, $в_3 = 40$;

установлено, что сумма заявок всех городов - потребителей товара равна суммарному количеству товара, т.е. :

$a_1 + a_2 + a_3 = b_1 + b_2 + b_3 = 60$

$$\sum_{i=1}^{3} ai = \sum_{j=1}^{3} bj = 60;$$

- Известна стоимость перевозки одной единицы товара (одной машины) из пункта отправления названием A_i в пункт назначения B_i , т.е. задана матрица стоимостей перевозок:

$$C = \begin{matrix} C11 & C12 & C13 \\ C21 & C22 & C23 \\ C31 & C32 & C33 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} 10 & 20 & 50 \\ 40 & 60 & 90 \\ 30 & 80 & 70 \end{matrix}$$

- Требуется составить такой план перевозок, при котором весь имеющийся запас товара был бы из всех городов- поставщиков товара, являющихся пунктами отправления, вывезен, все заявки городов-потребителей удовлетворены, а стоимость перевозок всего товара , который перевозится от поставщиков к потребителям, была бы минимальна.

10	**20**	**50**	$a_1 = 10$	A_1
40	60	90	$a_2 = 20$	A_2
30	80	70	$a_3 = 30$	A_3
$в_1 = 10$	$в_2 = 10$	$в_3 = 40$	60	
B_1	B_2	B_3		

Перейдем к математической формулировке этой задачи.

Обозначим через x_{ij} количество товара, который перевозится из пункта A_i в пункт назначения B_j $(1 \le i \le 3,\ 1 \le j \le 3)$.

Сформируем для данной задачи систему ограничений.

- Первое содержательное ограничение – сумма товара, содержащихся во всех пунктах отправления, должна равняться сумме заявок на доставку данного товара, которые подали все пункты назначения. Математически это означает, что должно выполнятся уравнение:

$$\sum_{i=1}^{3} ai = \sum_{j=1}^{3} bi.$$

Второе содержательное ограничение в данной задаче- все товары, содержащийся в каждом из пунктов отправления, должны быть вывезены, возможно, различные пункты отправления. Математически это означает, что должны выполнятся следующие равенства:

$$\sum_{j=1}^{3} x1i \ = 10 \text{ или } x11 + x12 + x13 = 10$$

$$\sum_{j=1}^{3} x2i \ = 20 \text{ или } x21 + x22 + x23 = 20$$

$$\sum_{j=1}^{3} x3i \ = 30 \text{ или } x31 + x32 + x33 = 30$$

- Третье содержательное ограничение – суммарное количество товара, доставляемого в каждый пункт назначения изо всех пунктов отправления, должно быть равно заявке, поданной данным пунктом. Математически это означает, что должны выполнятся следующие неравенства:

$$\sum_{i=1}^{3} x_{i1} = b_1 \text{ или } x_{11} + x_{21} + x_{31} = b_1$$

$$\sum_{i=1}^{3} x_{i2} = b_2 \text{ или } x_{12} + x_{22} + x_{32} = b_2$$

$$\sum_{i=1}^{3} x_{i3} = b_3 \text{ или } x_{13} + x_{23} + x_{33} = b_3$$

F=

• Четвертое ограничение предполагает, что перевозимые товары не могут принимать отрицательное значение, т.е.

$$x_{ij} \geq 0$$

Цель задачи – в минимизации перевозок. Математически это означает, что целевая функция

F= $c_{11} x_{11} + c_{12} + \cdots + c_{33} x_{33} \rightarrow min.$

Таким образом, математическая задача состоит в нахождении такого плана перевозок X= ($x_{11}, x_{12,\ldots,} x_{33}$орый удовлетворял бы системе ограничений и составлял бы минимум целевой функции.

Отличительные особенности экономико-математической модели транспортной задачи:

• Система ограничений представляет собой систему управлений;

- В системе ограничений коэффициенты при переменных принимают только два возможных значения: либо 0, либо 1;
- Каждая переменная входит в систему ограничений два раза.

Для математической формулировки транспортной задачи в общем виде введем следующие обозначения:

- m- количество пунктов отправления, в которых сосредоточены товары;
- ai - количество товара, сосредоточенного в пункте отправления Ai;
- n- количество пунктов назначения, в которые должны быть перевезены товары;
- bi – количество товара, которое заявлено пунктом Bj;
- cij- стоимость перевозки единицы товара из пункта i в пункт j.

В этом случае система ограничений примет вид:

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j \ (1 \leq m; j \leq n)$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \ (1 \leq i \leq m; 1 \leq j \leq n)$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_i \; (1 \le i \le m; 1 \le j \le n)$$

$$x_{ij} \geq 0;$$

а линейная функция F(x)= $\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}\, x_{ij} \to min$

В этой задаче необходимо найти такой вектор X= (x 11, x12,…xmn), который удовлетворял бы построенной системе ограничений и доставлял бы минимум целевой функции.

Важная особенность данной постановки задачи – соблюдение баланса между количеством товара, которые хотят приобрести по заявкам все пункты назначения, и количеством груза, имеющегося во всех пунктах отправления. Такие транспортные задачи называются *закрытыми.* При несоблюдении этого условия транспортные задачи называются *открытыми*.

Будучи задачей линейного программирования, транспортная задача может быть решена симплекс-методом. Однако в силу отмеченных выше особенностей для нахождения ее оптимального решения могут быть применены и специальные методы решения (например метод потенциалов).

СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ