

РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ С ПОМОЩЬЮ ЧИСЛЕННЫХ МЕТОДОВ

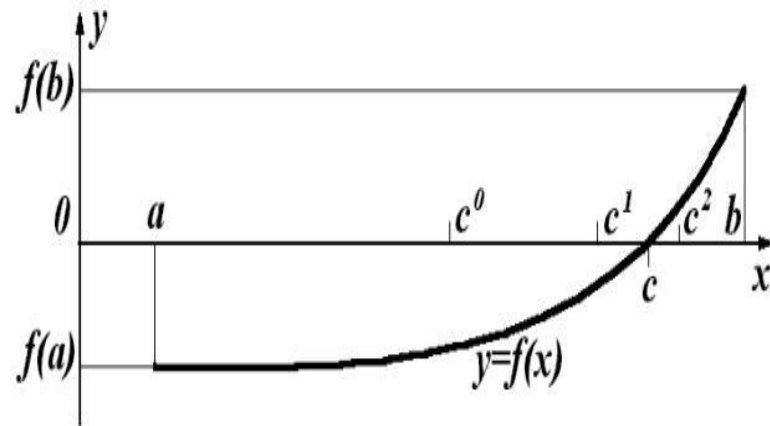


МЕТОД ПОЛОВИННОГО ДЕЛЕНИЯ (ДИХОТОМИИ)

ПРЕДНАЗНАЧЕННЫЙ ДЛЯ НАХОЖДЕНИЯ КОРНЕЙ УРАВНЕНИЙ, ПРЕДСТАВЛЕННЫХ В ВИДЕ $F(x)=0$.

Пусть непрерывная функция $f(x)$ на концах отрезка $[a, b]$ имеет значения разных знаков, т. е. $f(a) \times f(b) < 0$, тогда на отрезке имеется хотя бы один корень.

Возьмем середину отрезка $c = (a+b)/2$. Если $f(a) \times f(c) \leq 0$, то корень явно принадлежит отрезку от a до $(a+b)/2$ и в противном случае от $(a+b)/2$ до b .



Поэтому берем подходящий из этих отрезков, вычисляем значение функции в его середине и т.д. до тех пор, пока длина очередного отрезка не окажется меньше заданной предельной абсолютной $(b-a) < \varepsilon$

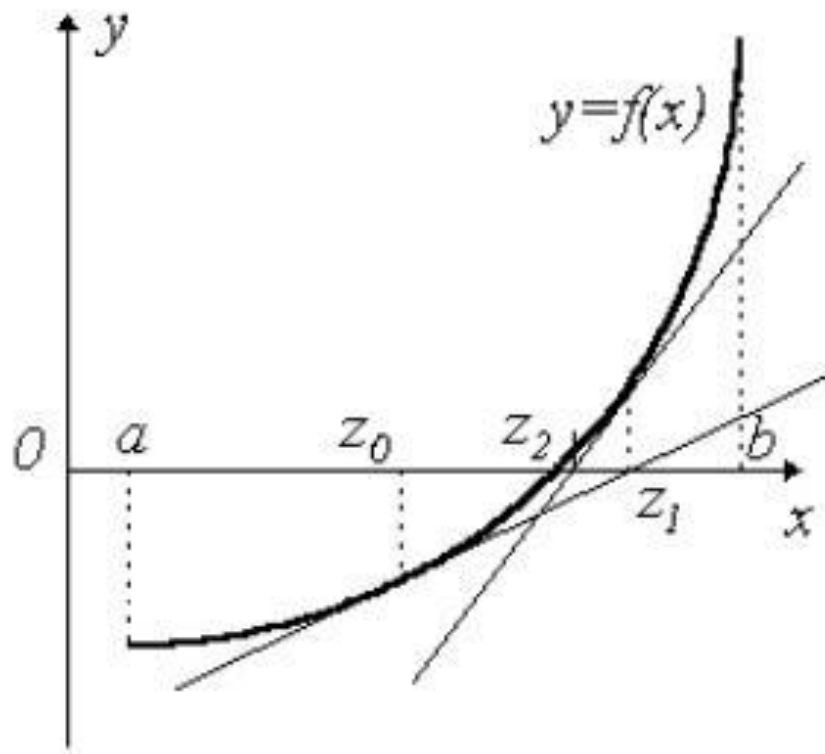
МЕТОД ПОЛОВИННОГО ДЕЛЕНИЯ

Так как каждое очередное вычисление $f(c)$ сужает интервал поиска вдвое, то при исходном отрезке $[a, b]$ и предельной погрешности ε количество вычислений n определяется условием $(b-a)/2^n < \varepsilon$, или $n \sim \log_2((b-a)/\varepsilon)$.

Например, при исходном единичном интервале и точности порядка 6 знаков ($\sim 10^{-6}$) после десятичной точки достаточно провести 20 вычислений (итераций) значений функции.



ИТЕРАЦИОННЫЕ МЕТОДЫ - МЕТОДЫ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ. ЗДЕСЬ ЗАДАЕТСЯ НЕ НАЧАЛЬНЫЙ ИНТЕРВАЛ МЕСТОНАХОЖДЕНИЯ КОРНЯ, А ЕГО НАЧАЛЬНОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ.



Пусть известно некоторое приближенное значение X_n корня X . Нужно найти следующее приближение корня X_{n+1} .
Формула метода касательных:

$$X^* \approx Z_{n+1} = Z_n - \frac{f(Z_n)}{f'(Z_n)}$$

В качестве исходной точки x выбирается тот конец интервала $[a, b]$, которому ордината того же знака, что и знак второй производной, т.е. $f(a) \cdot f''(a) > 0$ — $x = a$ или

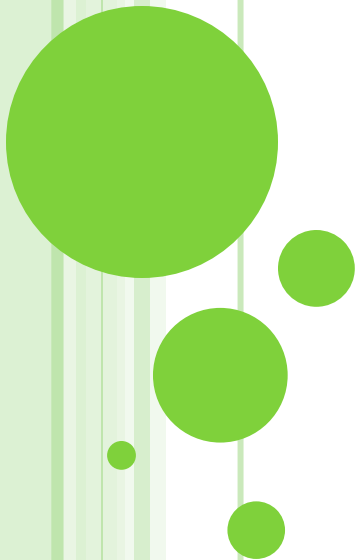
$f(b) \cdot f''(b) > 0$ — $x = b$. Корень можно найти с любой степенью точности ϵ . Это означает, что $x_{n+1} - x_n < \epsilon$.

Если производная функции мало изменяется в окрестности корня, то можно использовать видоизменение метода

$$z_{n+1} = z_n - \frac{f(z_n)}{f'(z_n)}, \quad n=0, 1, 2, \dots$$



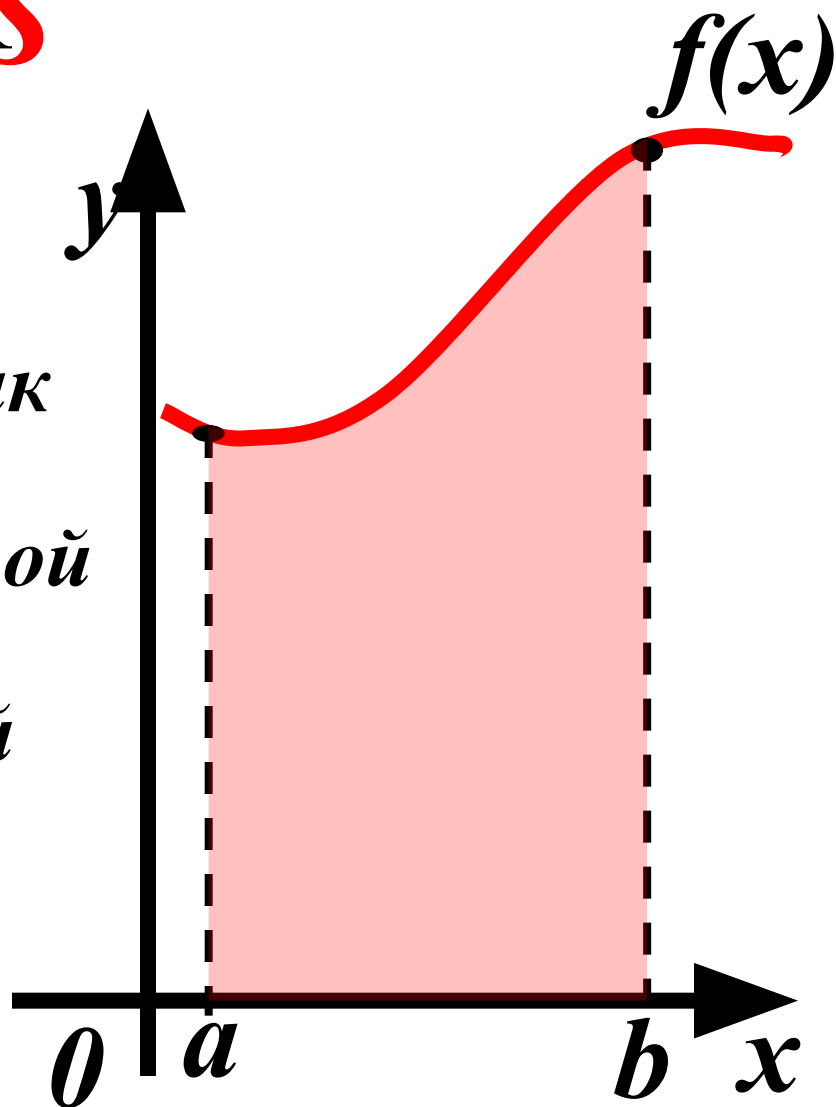
ПРИБЛИЖЕННОЕ ВЫЧИСЛЕНИЕ ИНТЕГРАЛА



ОПРЕДЕЛЁННЫЙ ИНТЕГРАЛ

$$\int_a^b f(x) dx = S$$

*Можно
трактовать как
площадь
подынтегральной
функции
(криволинейной
трапеции) на
отрезке [a;b]*



В простейшем случае, когда известна первообразная $F(x)$, интеграл вычисляется по формуле Ньютона – Лейбница:

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

Для большинства функций нахождение первообразной сложно или невозможно. Тогда применяется приближённое (численное) интегрирование.

Пусть функция $f(x)$ определена на отрезке $[a;b]$.

Требуется: приближенно вычислить определённый интеграл

$$\int_a^b f(x) dx$$

Суть метода: разобьём отрезок $[a,b]$ на n равных отрезков длины $h=(b-a)/n$, разрезая фигуру под функцией $f(x)$ на n полосок, считая их прямоугольниками.

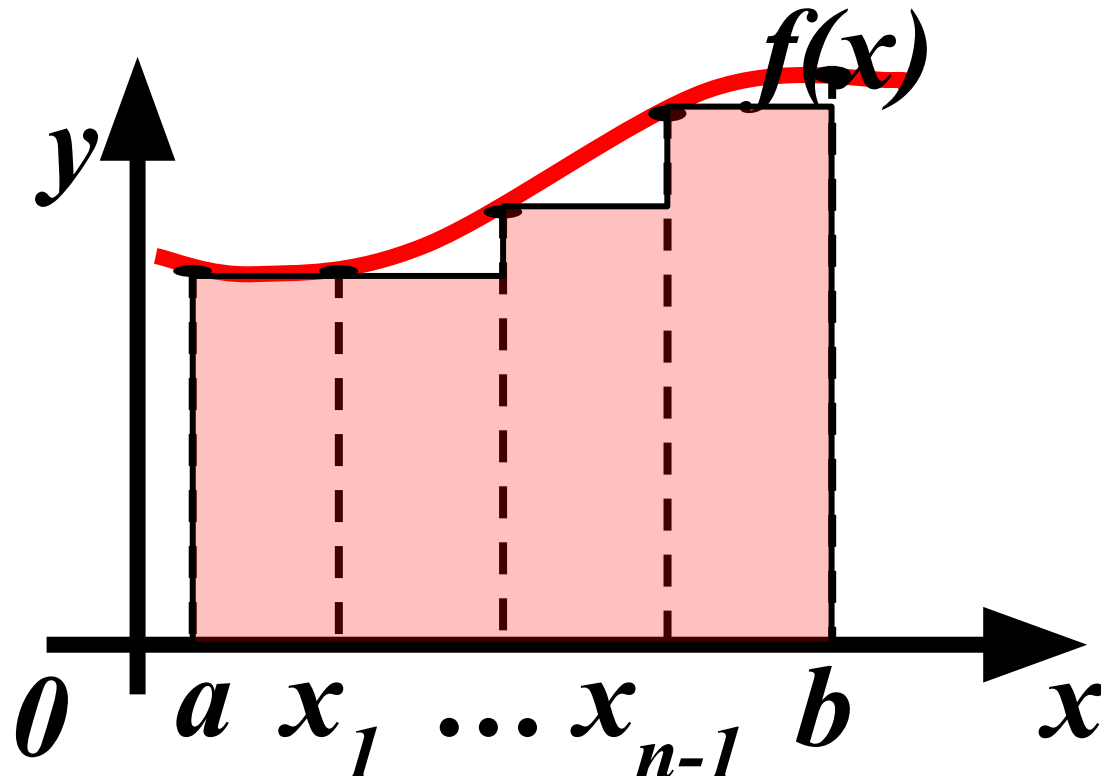
Тогда

$$S \approx \sum_{i=1}^n S_i, \text{ при } n \rightarrow \infty \quad \sum_{i=1}^n S_i \rightarrow S$$

МЕТОД ЛЕВЫХ ПРЯМОУГОЛЬНИКОВ

*Если для вычисления площади одного прямоугольника выбрать его левую сторону, то $S_i = f(x_{i-1}) * h$*

$$S = (f(a) + f(x_1) + \dots + f(x_{n-1})) * h$$



1. Вычислить по методу левых
прямоугольников:

$$\int_1^2 \frac{1}{x} \cdot \sin\left(\pi \cdot \frac{x}{2}\right)$$

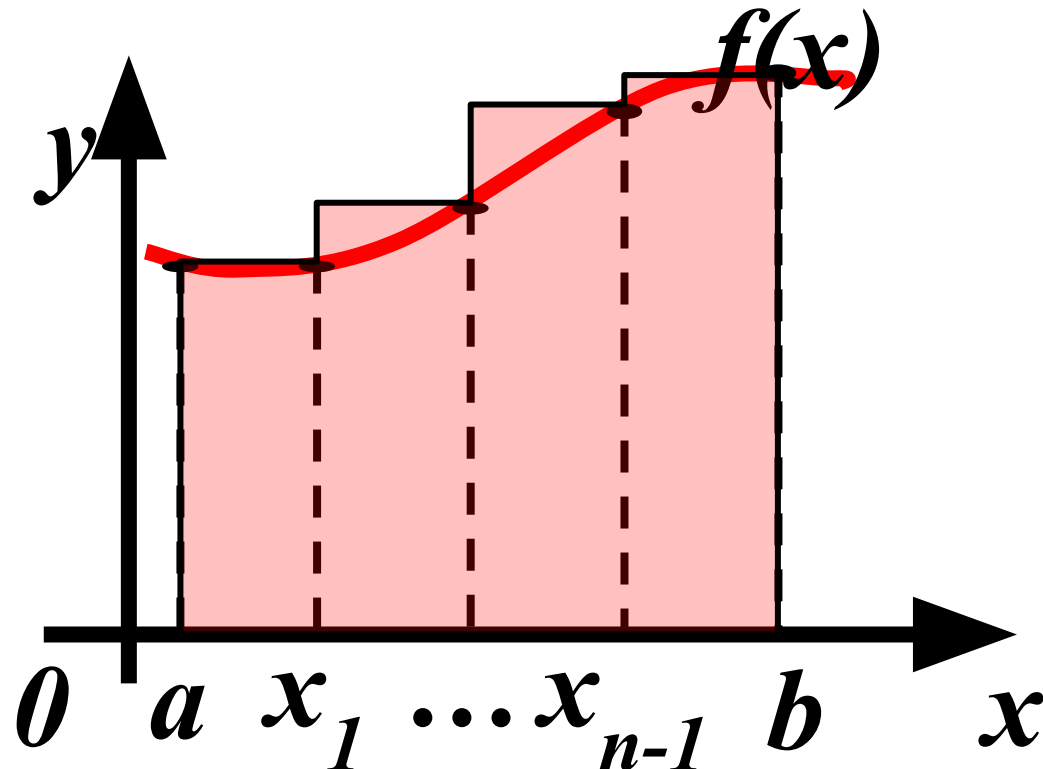
```
program integral;
var i,n:integer; a,b,h,x,xb,s:real;
function f(x:real):real;
begin f:=(1/x)*sin(3.14*x/2); end;
begin
write('Введите нижний предел интегрирования '); readln(a);
write('Введите верхний предел интегрирования '); readln(b);
write('Введите количество отрезков '); readln(n);
h:=(b-a)/n; s:=0; x0:=a;
for i:=0 to n-1 do
begin x:=x0+i*h; s:=s+f(x)*h; end;
writeln('Интеграл равен ',s:12:10);
end.
```



МЕТОД ПРАВЫХ ПРЯМОУГОЛЬНИКОВ

*Если для вычисления площади одного прямоугольника выбрать его правую сторону, то $S_i = f(x_i) * h$*

$$S = (f(x_1) + \dots + f(x_{n-1}) + f(b)) * h$$

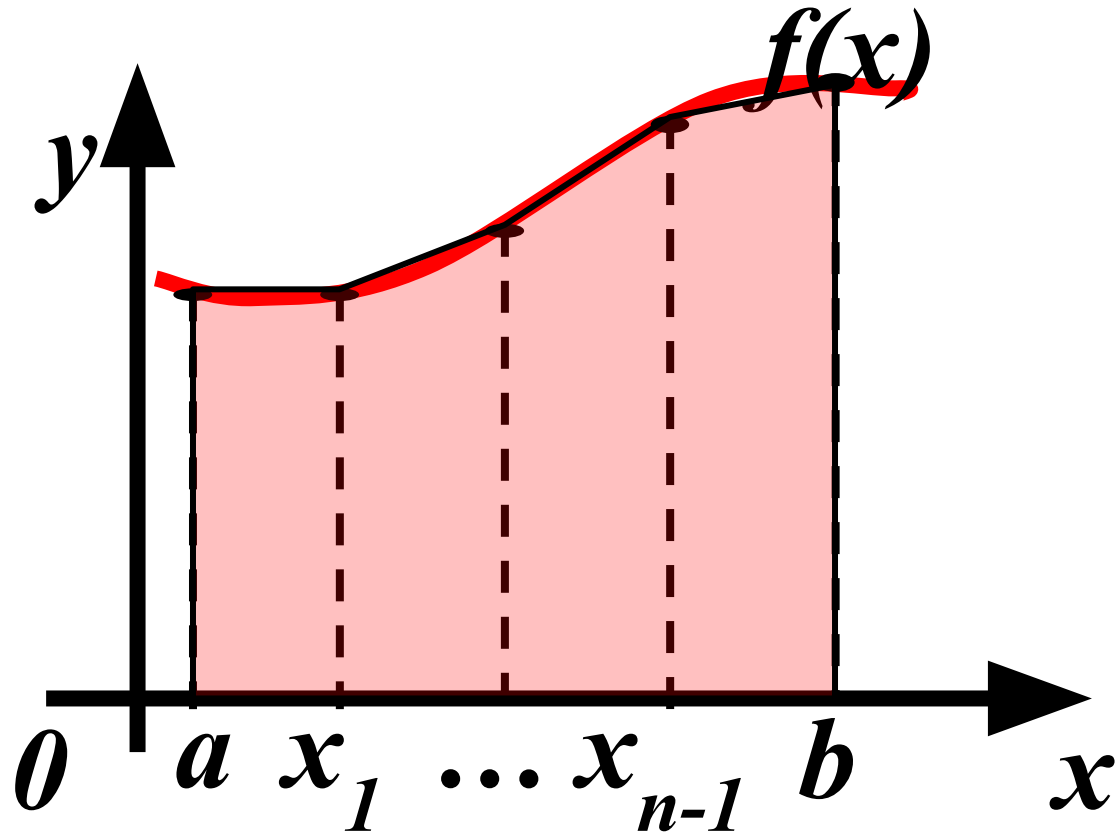


МЕТОД ТРАПЕЦИЙ

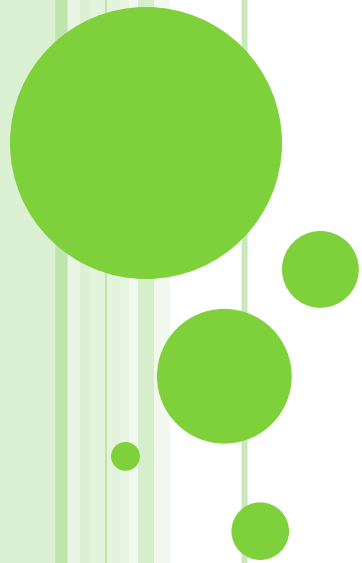
Если построить не прямоугольники, а трапеции, то

$$S_i = (f(x_i) + f(x_{i-1})) / 2 * h$$

$$S = (f(a)/2 + f(x_1) + \dots + f(x_{n-1}) + f(b)/2) * h$$

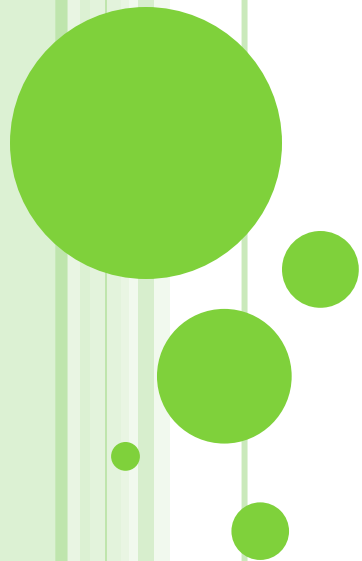


МЕТОД МОНТЕ-КАРЛО



Остроумный метод приближенного вычисления площадей сложных фигур – метод Монте-Карло – назван в честь города в княжестве Монако, где находятся всемирно известные казино (рулетка).

И как это ни парадоксально, но совершенно случайное помогает в вычислении строго определённого.



Дана фигура сложной формы.

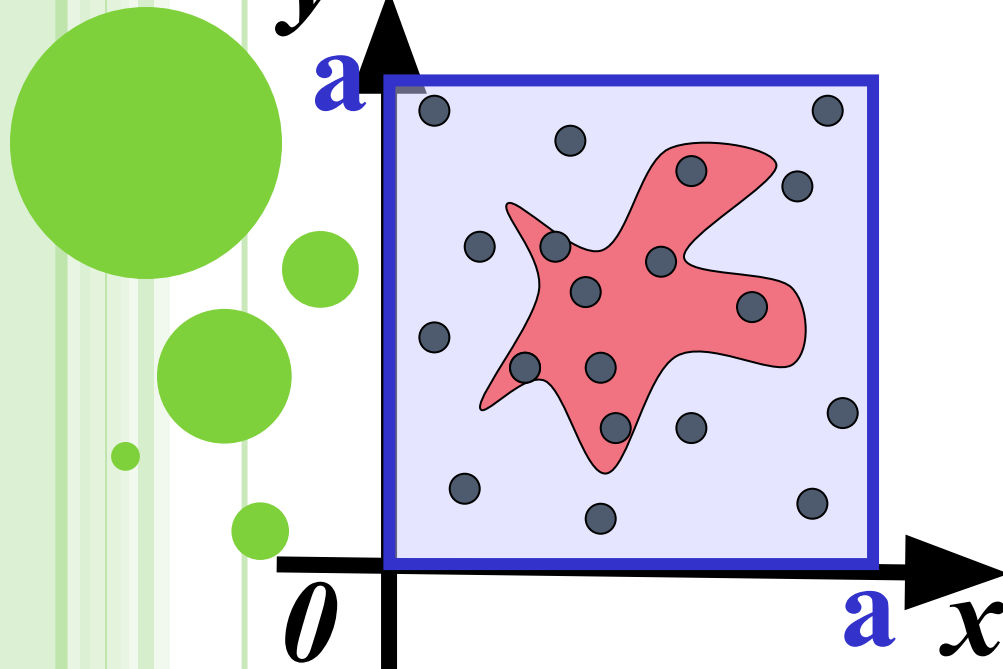
Требуется:

вычислить площадь этой фигуры.

Суть метода:

поместим фигуру в квадрат со

*у стороной **a**.*



Будем наугад, т. е. случайным образом бросать точки в этот квадрат.

Таким образом, при большом числе точек доля точек, содержащихся в фигуре, приближённо равна отношению площади этой фигуры к площади квадрата:

$$\frac{M}{N} = \frac{S}{a^2} \Rightarrow S = M \cdot a^2 / N$$

M — кол-во точек в фигуре,

N — кол-во точек в квадрате