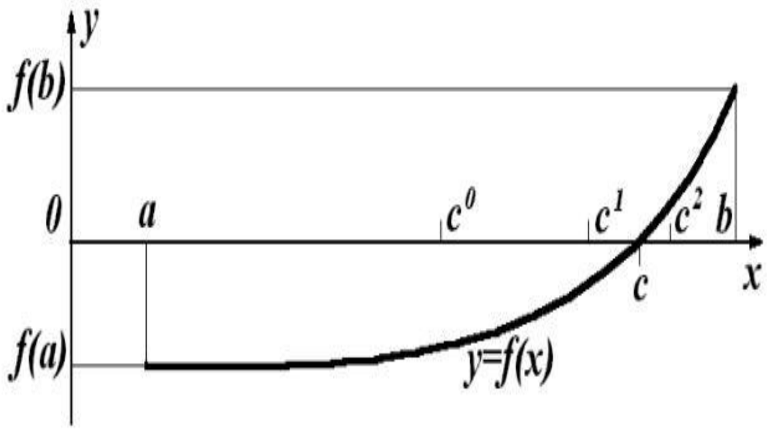
Решение уравнений с помощью численных методов

Метод половинного деления (дихотомии)

ПРЕДНАЗНАЧЕННЫЙ ДЛЯ НАХОЖДЕНИЯ КОРНЕЙ УРАВНЕНИЙ, ПРЕДСТАВЛЕННЫХ В ВИДЕ $F(X)=0$.

Пусть непрерывная функция $f(x)$ на концах отрезка $[a,b]$ имеет значения разных знаков, т. е. $f(a)\times f(b)< 0$, тогда на отрезке имеется хотя бы один корень.

Возьмем середину отрезка $c=(a+b)/2$. Если $f(a)\times f(c) <=0$, то корень явно принадлежит отрезку от a до $(a+b)/2$ и в противном случае от $(a+b)/2$ до b.



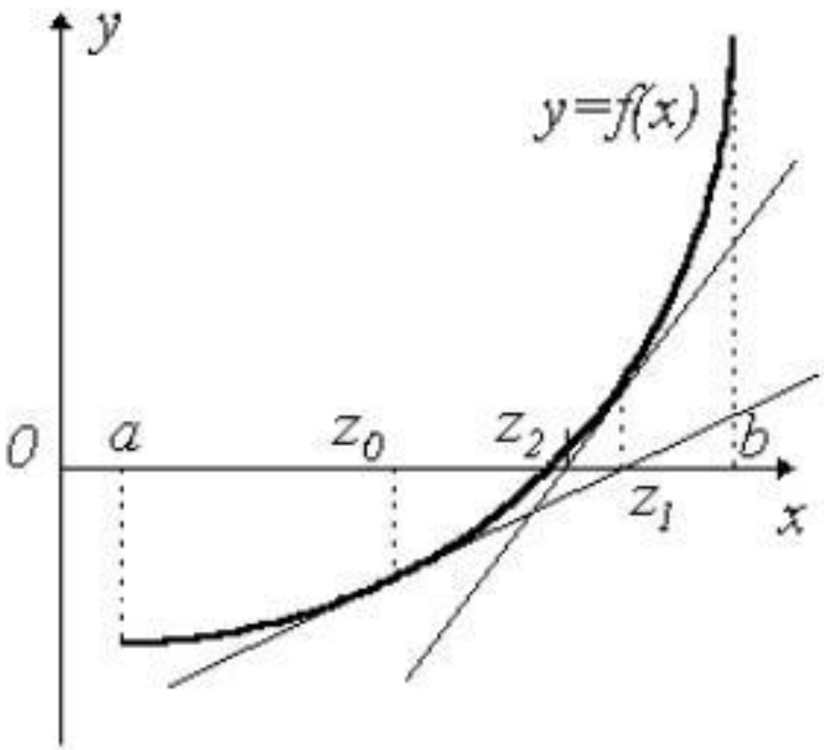
Поэтому берем подходящий из этих отрезков, вычисляем значение функции в его середине и т.д. до тех пор, пока длина очередного отрезка не окажется меньше заданной предельной абсолютной $(b-a)< \varepsilon$

МЕТОД ПОЛОВИННОГО ДЕЛЕНИЯ

Так как каждое очередное вычисление $f(c)$ сужает интервал поиска вдвое, то при исходном отрезке $[a,b]$ и предельной погрешности ε количество вычислений n определяется условием $(b-a)/2^n<$, или $n \sim log_2((b-a)/\varepsilon)$.

Например, при исходном единичном интервале и точности порядка 6 знаков (~ 10^{-6}) после десятичной точки достаточно провести 20 вычислений (итераций) значений функции.

Итерационные методы - методы последовательных приближений. Здесь задается не начальный интервал местонахождения корня, а его начальное приближение.



Пусть известно некоторое приближенное значение X_n корня X. Нужно найти следующее приближение корня X_{n+1}. <u>Формула метода касательных</u>:

$$X^* \approx Z_{n+1} = Z_n - \frac{f(Z_n)}{f'(Z_n)}.$$

В качестве исходной точки x выбирается тот конец интервала [a,b], которому ордината того же знака, что и знак второй производной, т.е. $f(a)\cdot f''(a)>0$ — <u>x = a</u> или

$f(b)\cdot f''(b)>0$ — <u>x = b</u>. Корень можно найти с любой степенью точности е. это означает, что $x_{n+1}-x_n<e$.

Если производная функции мало изменяется в окрестности корня, то можно использовать видоизменение метода

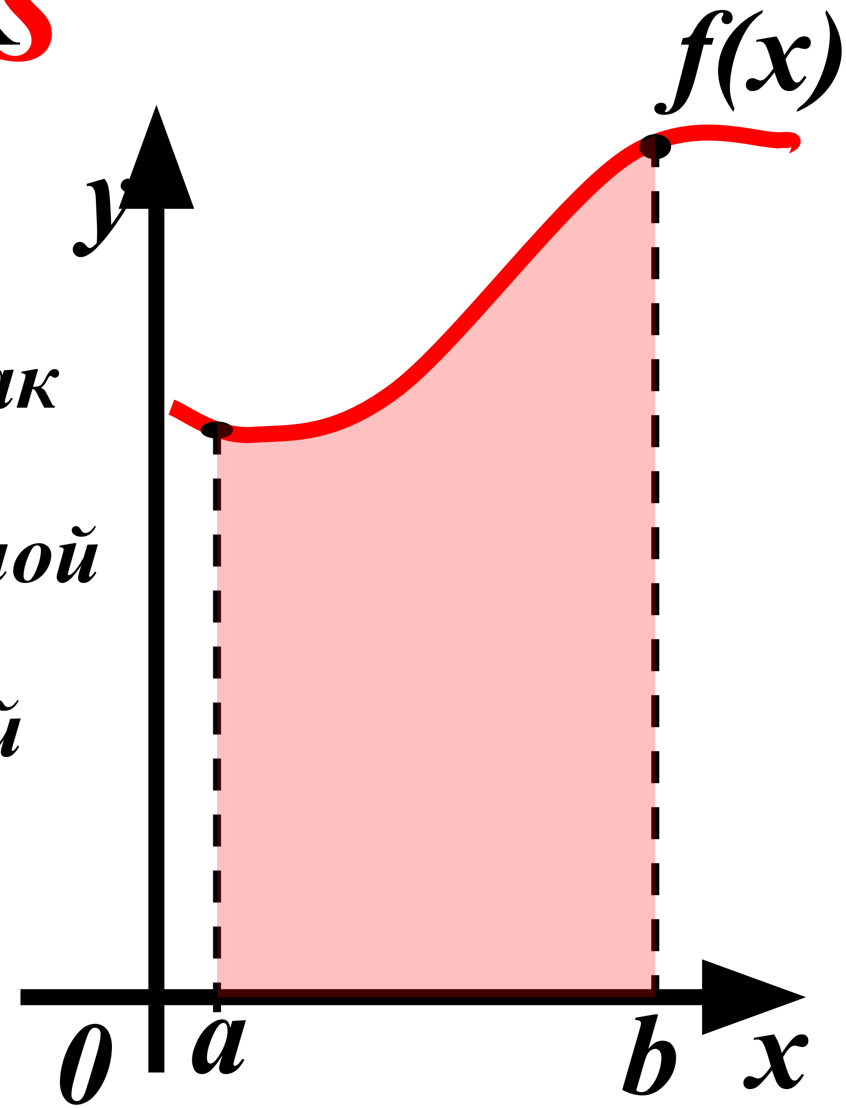
$$Z_{n+1}=Z_n-\frac{f(Z_n)}{f'(Z_0)}\ ,\ n=0,1,2,\ldots\quad .$$

Приближенное вычисление интеграла

Определённый интеграл

$$\int_a^b f(x)\,dx = S$$

Можно трактовать как площадь подынтегральной функции (криволинейной трапеции) на отрезке **[a;b]**



В простейшем случае, когда известна первообразная F(x), интеграл вычисляется по формуле Ньютона – Лейбница:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b)-F(a)$$

Для большинства функций нахождение первообразной сложно или невозможно. Тогда применяется приближённое (численное) интегрирование.

Пусть функция f(x) определена на отрезке [a;b].

Требуется: *приближенно вычислить определённый интеграл*

$$\int_a^b f(x)dx$$

Суть метода: *разобьём отрезок [a,b] на n равных отрезков длины h=(b-a)/n, разрезая фигуру под функцией f(x) на n полосок, считая их прямоугольниками.*

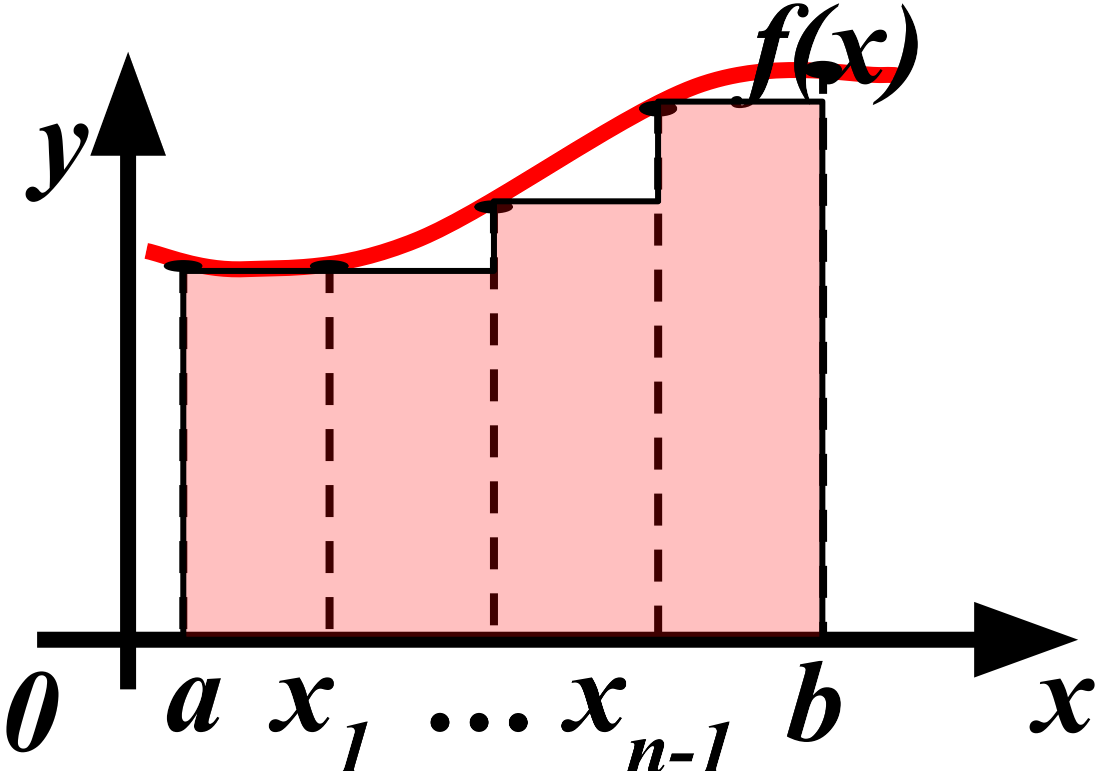
Тогда

$$S \approx \sum_{i=1}^{n} Si\text{ , при } n\to\infty \quad \sum_{i=1}^{n} Si \to S$$

Метод левых прямоугольников

Если для вычисления площади одного прямоугольника выбрать его левую сторону, то Si = f(xi-1)*h

$S=(f(a)+f(x_1)+\ldots+f(x_{n-1}))*h$



1. **Вычислить по методу левых прямоугольников:**

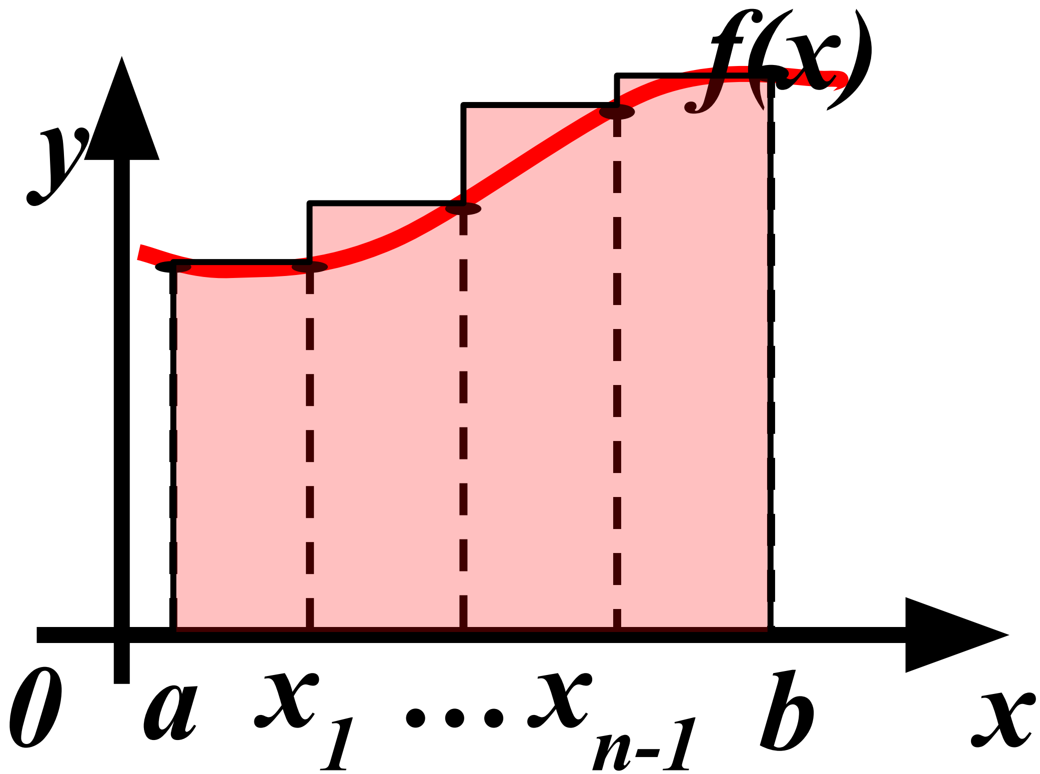
$$\int_1^2 \frac{1}{x} \cdot \sin(\pi \cdot \frac{x}{2})$$

```
program integral;
var i,n:integer; a,b,h,x,xb,s:real;
 function f(x:real):real;
  begin f:=(1/x)*sin(3.14*x/2); end;
begin
 write('Введите нижний предел интегрирования '); readln(a);
 write('Введите верхний предел интегрирования '); readln(b);
 write('Введите количество отрезков '); readln(n);
 h:=(b-a)/n; s:=0; x0:=a;
 for i:=0 to n-1 do
   begin x:=x0+i*h; s:=s+f(x)*h; end;
 writeln('Интеграл равен ',s:12:10);
end.
```

Метод правых прямоугольников

Если для вычисления площади одного прямоугольника выбрать его правую сторону, то Si = f(xi)*h

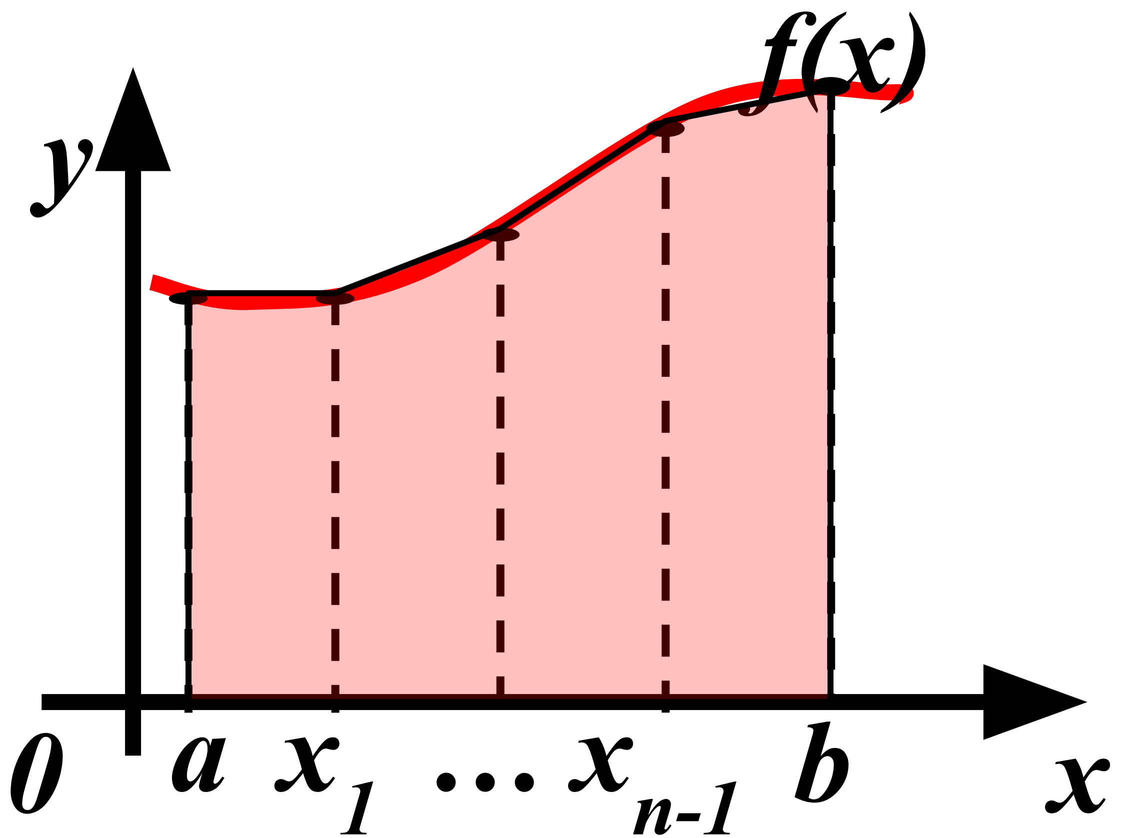
S=(f(x_1)+…+f(x_{n-1})+ f(b))*h



Метод трапеций

Если построить не прямоугольники, а трапеции, то $S_i=(f(x_i)+f(x_{i-1}))/2*h$

$S = (f(a)/2 + f(x_1) + \ldots + f(x_{n-1}) + f(b)/2)*h$



Метод Монте-Карло

Остроумный метод приближенного вычисления площадей сложных фигур – метод Монте-Карло – назван в честь города в княжестве Монако, где находятся всемирно известные казино (рулетка).

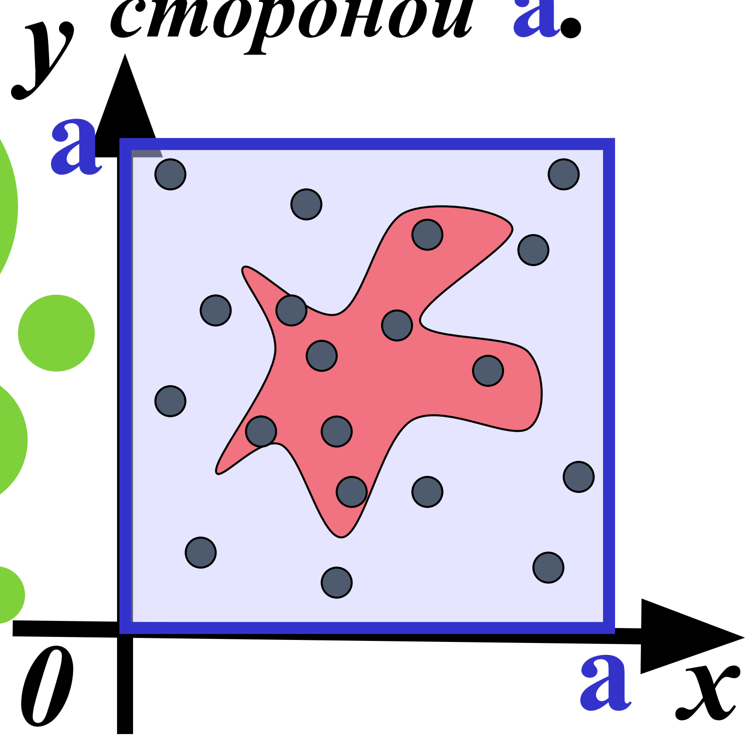
И как это ни парадоксально, но совершенно случайное помогает в вычислении строго определённого.

Дана фигура сложной формы.

Требуется:
вычислить площадь этой фигуры.

Суть метода:

поместим фигуру в квадрат со стороной **a**.



Будем наугад, т. е. случайным образом бросать точки в этот квадрат.

Таким образом, при большом числе точек доля точек, содержащихся в фигуре, приближённо равна отношению площади этой фигуры к площади квадрата:

$$\frac{M}{N} = \frac{S}{a^2} \Rightarrow S = M \cdot a^2 / N$$

M – *кол-во точек в фигуре,*

N – *кол-во точек в квадрате*