

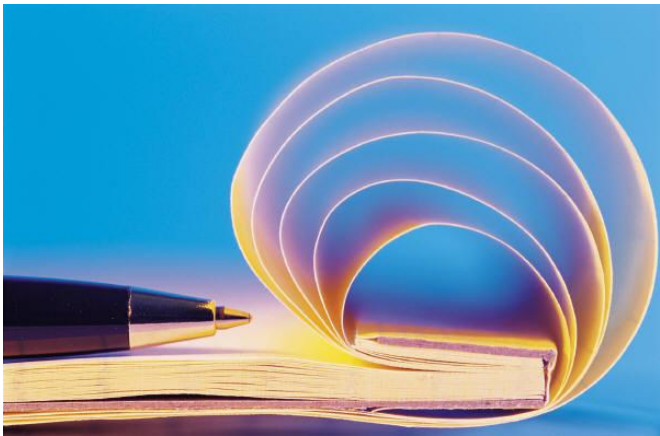
Решение возвратных уравнений

Способы решения уравнений высших степеней

- Разложение многочлена на множители

- Метод замены переменной

- Функционально-графический метод



Возвратные уравнения

Возвратное уравнение –

алгебраическое уравнение

$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n = 0$, в
котором $a_k = a_{n-k}$,

где $k = 0, 1, 2 \dots n$, причем, $a \neq 0$.

Задачу нахождения корней

возвратного уравнения сводят к

задаче нахождения решений

алгебраического уравнения

меньшей степени. Термин

возвратные уравнения был

введён **Л. Эйлером.**



Леонард Эйлер (Leonhard Euler)

Уравнения, у которых коэффициенты членов, равноудаленных от «начала» и «конца» уравнения, равны между собой, называются симметричными.

$$6x^4 - 35x^3 + 62x^2 - 35x + 6 = 0$$

Симметричные уравнения четвертой степени.

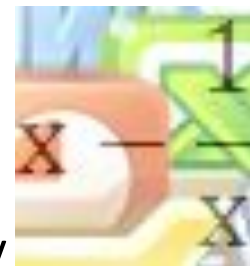
- 1) Если $m = 1$, то это симметричное уравнение первого рода, имеющее вид

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + bx + a = 0 \text{ и решается новой подстановкой } y =$$



- 2) Если $m = -1$, то это симметричное уравнение второго рода, имеющее вид

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 - bx + a = 0 \text{ и решается новой подстановкой } y =$$



Алгоритм решения уравнений

- разделить левую и правую части уравнения на x^2 . При этом не происходит потери решения, так как $x = 0$ не является корнем исходного уравнения при $a \neq 0$,
- группировкой привести полученное уравнение к виду

$$a \left(x^2 + \frac{1}{x^2} \right) + b \left(x + \frac{1}{x} \right) + c = 0$$

- ввести новую переменную $t = x + \frac{1}{x}$, тогда выполнено $t^2 = x^2 + 2 + \frac{1}{x^2}$,

то есть $x^2 + \frac{1}{x^2} = t^2 - 2$;



- в новых переменных рассматриваемое уравнение является квадратным: $at^2 + bt + c = 0$;
- решить его относительно t , вернуться к исходной переменной.

Если уравнение является разрешимым, то для возвратного уравнения четвертой степени после преобразований получаем:

$$x_{1,2} = \frac{2a}{-b \pm D - 2a}, \quad D = \sqrt{b^2 - 4ac}.$$

$$6x^4 - 35x^3 + 62x^2 - 35x + 6 = 0$$

Т.к, конечно, $x \neq 0$, то разделим на x^2 :

$$6x^2 - 35x + 62 - 35/x + 6/x^2 = 0.$$

Сгруппируем члены с одинаковыми коэффициентами:

$$6(x^2 + 1/x^2) - 35(x + 1/x) + 62 = 0.$$

Если $x + 1/x = y$, то $(x + 1/x)^2 = y^2$; $x^2 + 1/x^2 = y^2 - 2$;

$$6(y^2 - 2) - 35y + 62 = 0; \quad 6y^2 - 35y + 50 = 0;$$

$$\underline{y_1 = 5/2}; \quad \underline{y_2 = 10/3};$$

$$x + 1/x = 5/2 \quad \text{и} \quad x + 1/x = 10/3$$

Решая эти уравнения, получим: $\underline{x_1 = 1/2}$;

$$\underline{x_2 = 2}; \quad \underline{x_3 = 1/3}; \quad \underline{x_4 = 3}.$$

$$2x^4 + 9x^3 - x^2 + 9x + 2 = 0$$

$$2x^4 + 9x^3 - x^2 + 9x + 2 = 0$$

т.к. $x = 0$ - не является корнем уравнения, то разделим обе части уравнения на $x^2 \neq 0$.


$$2x^2 + 9x - 1 + \frac{9}{x} + \frac{2}{x^2} = 0$$

$$2\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + 9\left(x + \frac{1}{x}\right) - 1 = 0$$

Введем замену.

Пусть $x + \frac{1}{x} = y$, $x^2 + \frac{1}{x^2} = y^2 - 2$, получим

$$2y^2 + 9y - 5 = 0$$

$$y_1 = -5; \quad y_2 = \frac{1}{2}$$


Вернемся к замене.

$$x + \frac{1}{x} = -5$$

или

$$x + \frac{1}{x} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{x^2 + 5x + 1}{x} = 0$$

$$\frac{2x^2 - x + 2}{2x} = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{21}}{2}$$

корней нет

Ответ: $x_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{21}}{2}$

$$x^4 - 5x^3 + 8x^2 - 5x + 1 = 0$$

$$x^4 - 5x^3 + 8x^2 - 5x + 1 = 0$$

$$x^4 - 5x^3 + 6x^2 - 5x + 1 = 0$$

$$x^4 - 5x^3 + 6x^2 - 5x + 1 = 0$$

Разделим на $x^2 \neq 0$ $x^2 - 5x + 6 - \frac{5}{x} + \frac{1}{x^2} = 0$

$(x^2 + \frac{1}{x^2}) - 5(x + \frac{1}{x}) + 6 = 0$ делаем замену $x + \frac{1}{x} = y$, тогда $x^2 + \frac{1}{x^2} = y^2 - 2$

Получим $(y^2 - 2) - 5y + 6 = 0$

$$y^2 - 5y + 4 = 0 ; y = 1, y = 4$$

Переходим к замене: $x + \frac{1}{x} = 4$ или $x + \frac{1}{x} = 1$

$x^2 - 4x + 1 = 0$ или $x^2 - x + 1 = 0$

$D = 12$

$D = -3$

$x_1 = 2 - \sqrt{3}$

корней нет

$x_2 = 2 + \sqrt{3}$

Ответ: $x_1 = 2 - \sqrt{3}$

$x_2 = 2 + \sqrt{3}$

$$x^4 - 5x^3 + 8x^2 - 5x + 1 = 0$$

Данное уравнение является симметрическим уравнением четвертой степени. Так как $x = 0$ не является его корнем, то, разделив уравнение на x^2 , получим равносильное ему уравнение

$$x^2 - 5x + 8 - \frac{5}{x} + \frac{1}{x^2} = 0.$$

Сгруппировав слагаемые, перепишем уравнение в виде

$$x^2 + \frac{1}{x^2} - 5\left(x + \frac{1}{x}\right) + 8 = 0$$

Положив $x + \frac{1}{x} = y$, получим уравнение

$$y^2 - 5y + 6 = 0.$$

имеющее два корня $y_1 = 2$ и $y_2 = 3$. Следовательно, исходное уравнение равносильно совокупности уравнений

$$x + \frac{1}{x} = 2$$

$$x_1 = 1.$$

и

$$x + \frac{1}{x} = 3.$$

$$x_2 = \frac{3 + \sqrt{5}}{2} \text{ и } x_3 = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}.$$

$$\text{ОТВЕТ: } x_1 = 1, x_2 = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}, x_3 = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}.$$

$$X^4 + X^3 - 4X^2 + X + 1 = 0$$

Разделим на $x^2 \neq 0$ $x^2 + x - 4 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} = 0$

$$(x^2 + \frac{1}{x^2}) + (x + \frac{1}{x}) - 4 = 0$$

Делаем замену: $y = x + \frac{1}{x}$

Тогда: $x^2 + \frac{1}{x^2} = y^2 - 2$ Значит: $x + \frac{1}{x} = 2$ или $x + \frac{1}{x} = -3$

$$y^2 - 2 + y - 4 = 0$$

$$y^2 + y - 6 = 0$$

$$D = 25$$

$$y_1 = 2$$

$$y_2 = -3$$

Ответ: $x_1 = 1$; $x_2 = \frac{-3 + \sqrt{5}}{2}$; $x_3 = \frac{-3 - \sqrt{5}}{2}$



$$D = 5$$

$$x_2 = \frac{-3 + \sqrt{5}}{2}$$

$$x_3 = \frac{-3 - \sqrt{5}}{2}$$

$$3x^4 + 5x^3 - 14x^2 - 10x + 12 = 0$$

Разделим на $x^2 \neq 0$ $3x^2 + 5x - 14 - \frac{10}{x} + \frac{12}{x^2} = 0$

$3(x^2 + \frac{4}{x^2}) + 5(x - \frac{2}{x}) - 14 = 0$ Делаем замену $x - \frac{2}{x} = y$,
тогда $x^2 + \frac{4}{x^2} = y^2 - 4$

Получим: $3(y^2 - 4) + 5y - 14 = 0$

$3y^2 + 5y - 26 = 0$

$y_1 = \frac{1}{3}; y_2 = -2$;



Переходим к замене: $x - \frac{2}{x} = \frac{1}{3}$ или $x - \frac{2}{x} = -2$

$$x_1 = \frac{1+\sqrt{3}}{6} \quad x_2 = \frac{1-\sqrt{3}}{6} ; \quad x_3 = -1+\sqrt{3} \quad x_4 = -1-\sqrt{3}$$

Ответ: $x_1 = \frac{1+\sqrt{3}}{6} \quad x_2 = \frac{1-\sqrt{3}}{6} ; \quad x_3 = -1+\sqrt{3} \quad x_4 = -1-\sqrt{3}$

$$5x^3 + 21x^2 + 21x + 5 = 0$$

симметрическое уравнение

$$5(x^3 + 1) + 21x(x + 1) = 0$$

$$5(x + 1)(x^2 + x + 1) + 21x(x + 1) = 0$$

$$(x + 1)(5(x^2 + x + 1) + 21x) = 0$$

$$(x + 1)(5x^2 + 26x + 5) = 0$$

$$x_1 = -1 \quad D = \frac{676 - 4 \cdot 5 \cdot 25}{10} = 576$$

$$x_2 = \frac{-26 + 24}{10} = -\frac{1}{5}$$

$$x_3 = \frac{-26 - 24}{10} = -5$$



Ответ: $x_1 = -1$; $x_2 = -\frac{1}{5}$; $x_3 = -5$

$$6x^4 - 3x^3 + 12x^2 - 6x = 0$$

$$6x^2(x^2 + 2) - 3x(x^2 + 2) = 0$$

$$(x^2 + 2)(6x^2 - 3x) = 0$$

$$3x(x^2 + 2)(2x - 1) = 0$$

$$3x = 0 \quad \text{или} \quad x^2 + 2 = 0 \quad \text{или} \quad 2x - 1 = 0$$

$$x_1 = 0 \quad \text{нет корней} \quad x_2 = \frac{1}{2}$$

$$\text{Ответ: } x_1 = 0 \quad x_2 = \frac{1}{2}$$