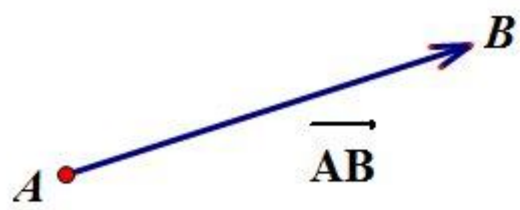
Решение задач линейной алгебры и аналитической геометрии

Лекция 4

Вектор

Вектор – направленный отрезок
AB={0,1,2} – координаты вектора
А – начало вектора, В – конец.



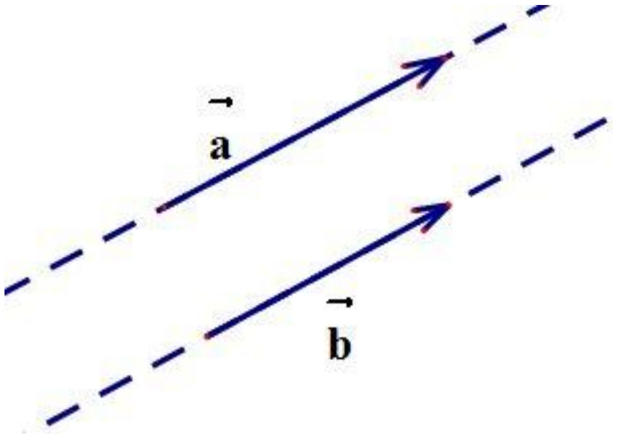
$\left|\overrightarrow{AB}\right|$ - длина вектора

$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{}(X_B - X_A)^2 + (Y_B - Y_A)^{2+} (Z_B - Z_A)^2$

Два вектора называются равными, если они имеют одинаковую длину и сонаправлены.

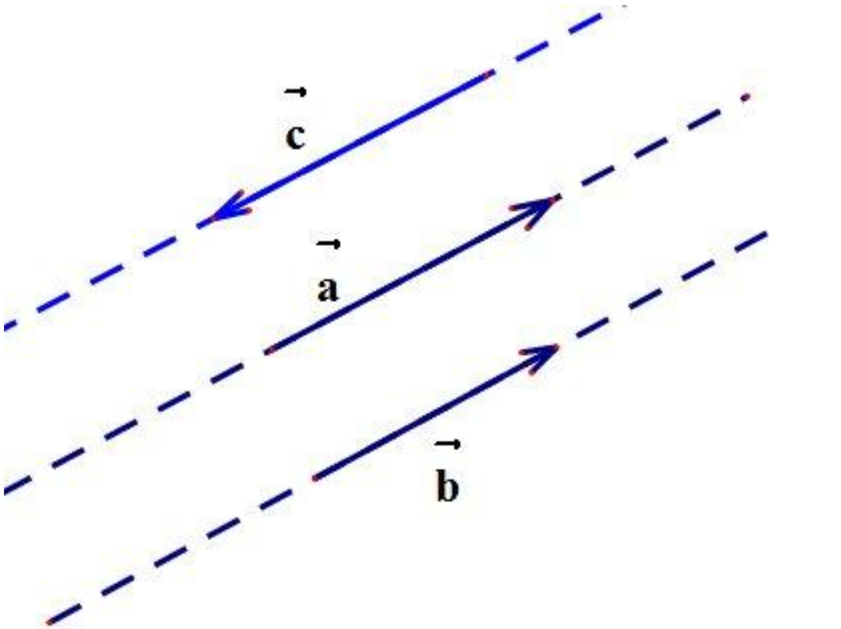
Два вектора называются **сонаправленными**, если они лежат на параллельных прямых и направлены в одну сторону:

вектора и сонаправлены:

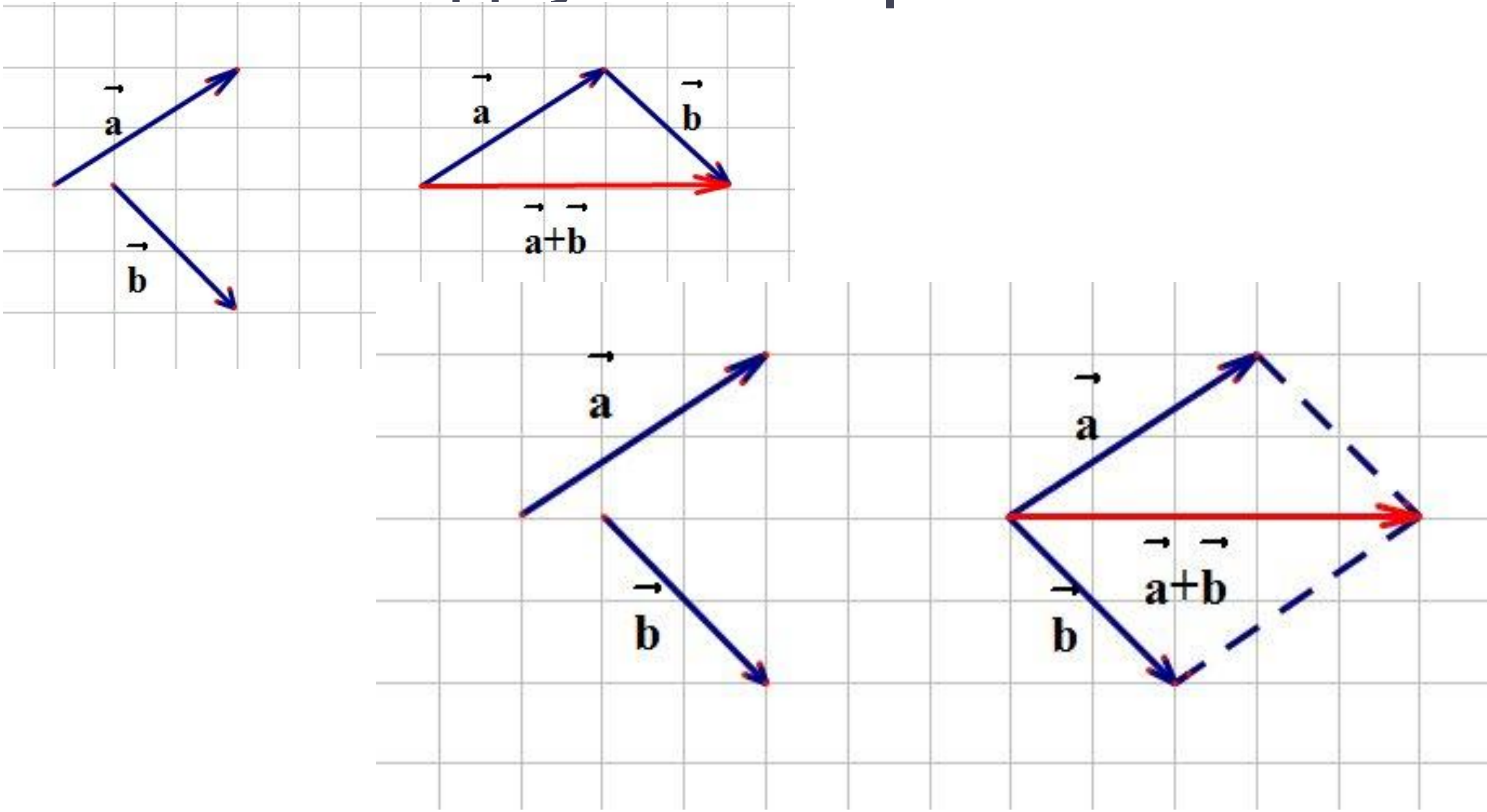


$|\overrightarrow{AB}|$ Вектора, лежащие на параллельных прямых называются **коллинеарными**: вектора **a**, **b**, **c** – коллинеарны. **Произведением вектора AB на число** k называется вектор, сонаправленный вектору **AB**, если k>0, и направленный в противоположную сторону, если k<0 .

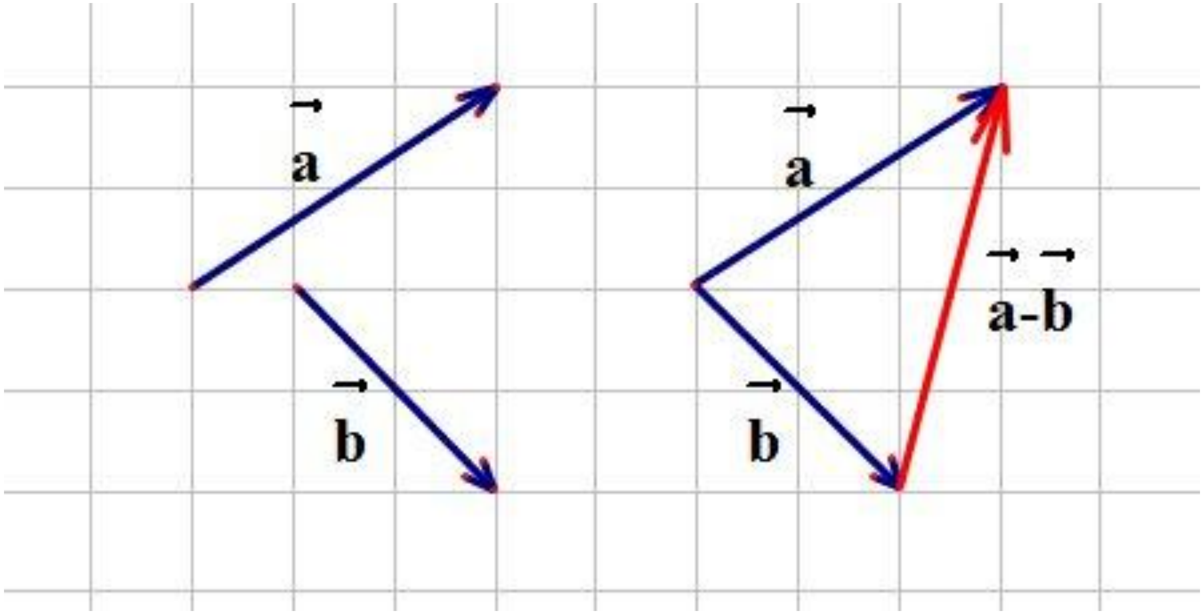
$$\left|k\overrightarrow{AB}\right| = k\left|\overrightarrow{AB}\right|$$



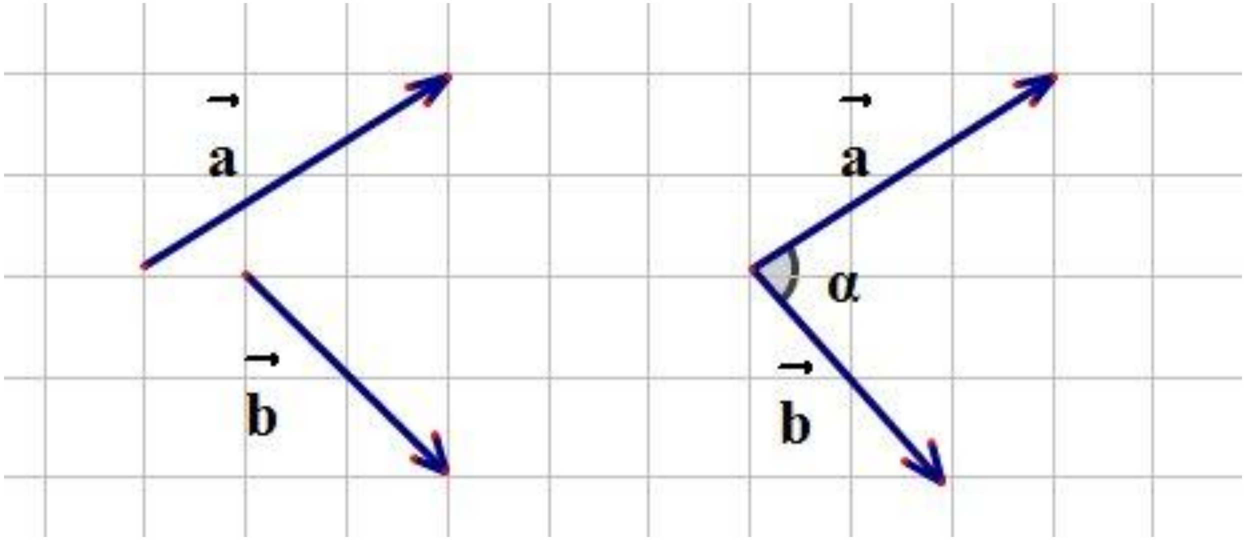
Сложение двух векторов



Вычитание двух векторов



Угол между векторами



Скалярное произведение двух векторов

- **Скалярным произведением** двух векторов называется число, равное произведению длин этих векторов на косинус угла между ними:

$$\vec{a}\vec{b} = \left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|\cos\left(\widehat{\vec{a}\vec{b}}\right)$$

Свойства скалярного произведения:

1. коммутативность: $(\mathbf{a},\mathbf{b})=(\mathbf{b},\mathbf{a})$
2. $(\mathbf{a},\mathbf{a})=|\mathbf{a}|^2$
3. $(\mathbf{a},\mathbf{b})=0 \Leftrightarrow \mathbf{a}\perp\mathbf{b}$
4. Дистрибутивность: $(\mathbf{a}_1+\mathbf{a}_2,\mathbf{b})= (\mathbf{a}_1,\mathbf{b})+ (\mathbf{a}_2,\mathbf{b})$
5. $(\mathbf{a}, \lambda\cdot\mathbf{b})= \lambda\cdot(\mathbf{a},\mathbf{b})$

Пример 1.

Найти угол между векторами

Пусть в декартовой системе координат **a**={2,1,0}, **b**={3,-2,0}, **c**={-4,-2,0}. Найти угол между векторами

а) **a** и **b**;

б) **a** и **c**.

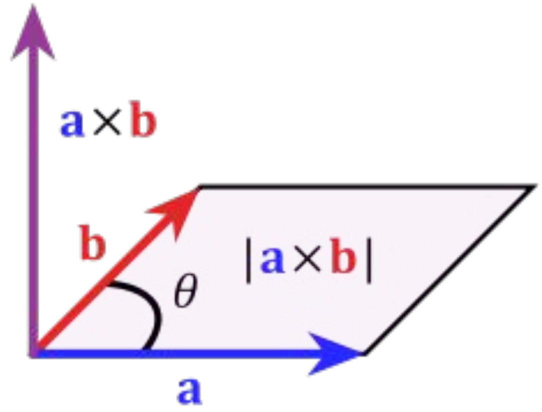
Векторное произведение векторов

Векторным произведением упорядоченной пары векторов **a** и **b** называется вектор [**a**,**b**], такой что

| [**a**,**b**] |=$S_{\mathbf{a},\mathbf{b}}$, где $S_{\mathbf{a},\mathbf{b}}$ – площадь параллелограмма, построенного на векторах **a** и **b**. (Если **a** || **b**, то $S_{\mathbf{a},\mathbf{b}}$=0.)

a ⊥[**a**,**b**] ⊥ **b**.

a, **b**, [**a**,**b**] – правая тройка.



Свойства векторного произведения:

1. $[\mathbf{a},\mathbf{b}] = -[\mathbf{b},\mathbf{a}]$
2. $[\mathbf{a},\mathbf{b}] = \boldsymbol{\theta}$, $\mathbf{a} \mid\mid \mathbf{b}$
3. $[\mathbf{a}_1+\mathbf{a}_2,\mathbf{b}] = [\mathbf{a}_1,\mathbf{b}]+[\mathbf{a}_2,\mathbf{b}]$
4. $\lambda\cdot[\mathbf{a},\mathbf{b}] = [\lambda\cdot\mathbf{a},\mathbf{b}] = [\mathbf{a},\lambda\cdot\mathbf{b}]$

$$|[\mathbf{a},\mathbf{b}]| = \begin{vmatrix} i & j & k \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} \cdot i - \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} \cdot j + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \cdot k =$$

$$\left\{ \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \right\}$$

Пример 2.

Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах **a** и **b.**

Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах **a** и **b**, если $\mathbf{a}=\mathbf{p}+2\mathbf{q}$, $\mathbf{b}=3\mathbf{p}-2\mathbf{q}$, $|\mathbf{p}|=1$, $|\mathbf{q}|=1/2$, $\varphi_{\mathbf{p}},\mathbf{q}=p/6$.

Решение: Пусть $S_{\mathbf{a}},\mathbf{b}$ – искомая площадь.

$[\mathbf{a},\mathbf{b}] = [\mathbf{p}+2\mathbf{q},3\mathbf{p}-2\mathbf{q}] = [\mathbf{p}, 3\mathbf{p}-2\mathbf{q}]+2[\mathbf{q}, 3\mathbf{p}-2\mathbf{q}] = 3[\mathbf{p},\mathbf{p}]-2[\mathbf{p},\mathbf{q}]+2\cdot3[\mathbf{q},\mathbf{p}]-2\cdot2[\mathbf{q},\mathbf{q}] = = \boldsymbol{\theta}-2[\mathbf{p},\mathbf{q}]+6[\mathbf{q},\mathbf{p}]-\boldsymbol{\theta} = 2[\mathbf{q},\mathbf{p}]+ 6[\mathbf{q},\mathbf{p}] = 8[\mathbf{q},\mathbf{p}]$.

$S_{\mathbf{a}},\mathbf{b} = |\,[\mathbf{a},\mathbf{b}]\,| = |\,8[\mathbf{q},\mathbf{p}]\,| = 8\cdot|\mathbf{q}|\cdot|\mathbf{p}|\cdot \sin\varphi_{\mathbf{p}},\mathbf{q} = 8\cdot1\cdot = 2.$

Ответ: $S_{\mathbf{a}},\mathbf{b} = 2$.

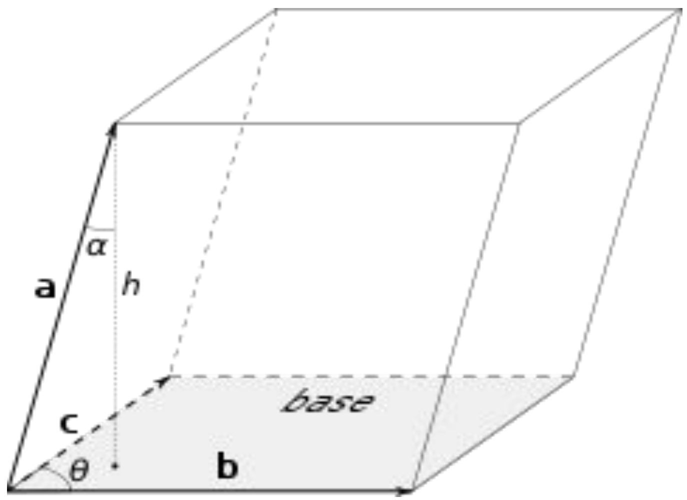
Смешанное произведение векторов.

Смешанным произведением упорядоченной тройки векторов **a**, **b** и **c** называется число **<a**, **b**, **c>**, т.ч. <**a**,**b**,**c**>=([**a**,**b**],**c**).

<**a**,**b**,**c**>=$V_{\mathbf{a,b,c}}$, если **a**,**b**,**c** – правая тройка, или <**a**,**b**,**c**>= -$V_{\mathbf{a,b,c}}$, если **a**,**b**,**c** – левая тройка. Здесь $V_{\mathbf{a,b,c}}$ – объём параллелепипеда, построенного на векторах **a**, **b**и **c**. (Если **a**, **b** и **c** компланарны, то $V_{\mathbf{a,b,c}}$=0.)

В декартовой системе координат, если **a**=$\{x_1, y_1, z_1\}$, **b**=$\{x_2, y_2, z_2\}$, **c**=$\{x_3, y_3, z_3\}$,

$$\langle \mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}\rangle = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$$



Примеры

Пример 3. Проверка компланарности векторов
Компланарны ли векторы **a**={1,0,1}, **b**={0,2,1}, **c**={3,1,0}?

Пример 4. Принадлежность 4 точек одной плоскости
Доказать, что точки A (1,2,-5), B(2,-1,-10), C(-1,3,0) и D(-4,-2,1) лежат в одной плоскости

Пример 5. Вычислить объем тетраэдра и его высоту
Вычислить объём тетраэдра с вершинами в точках A_1, A_2, A_3, A_4 и его высоту, опущенную из вершины A_4 на грань $A_1A_2A_3$, если $A_1(1,2,0)$, $A_2(-1,2,1)$, $A_3(-1,-1,-1)$, $A_4(0,1,3)$.

Каноническое уравнение плоскости в пространстве

Пусть в декартовой системе координат дан вектор **n**={A,B,C} и точка $M_o=(x_o,y_o,z_o)$.

Построим плоскость П, проходящую через т. M_o, перпендикулярную вектору **n** (этот вектор называют *нормальным вектором* или *нормалью плоскости*).

$M \in П$, $M_oM \perp \mathbf{n}$.

$M_oM=\{x-x_o,\ y-y_o,\ z-z_o\} \perp \mathbf{n}$

$A(x-x_o)+B(y-y_o)+C(z-z_o)=0$

Каноническое уравнение плоскости в пространстве:

$Ax+By+Cz+D=0$, где $D = -Ax_o-By_o-Cz_o$.

Примеры

- Пример 6. Написать каноническое уравнение плоскости, перпендикулярной вектору n={3,1,1} и проходящей через точку M(2,-1,1).
- Пример 7. Написать каноническое уравнение плоскости, содержащей точки K(2,1,-2), L(0,0,-1), M(1,8,1).

Канонические и параметрические уравнения прямой в пространстве

- Пусть в декартовой системе координат дан вектор **a**={p,q,r} и точка $M_o=(x_o,y_o,z_o)$.
- Построим прямую l, проходящую через т. M_o, параллельную вектору **a** (этот вектор называют *направляющим вектором прямой*).
- $M \in l$, $M_oM \parallel$ **a**.
- $M_oM=\{x-x_o,\ y-y_o,\ z-z_o\} \parallel$ **a** , т.ч. $M_oM=t\cdot$**a** =>

$$\begin{cases} x-x_0=t\cdot p \\ y-y_0=t\cdot q \\ z-z_0=t\cdot r \end{cases}$$

Параметрические уравнения прямой в пространстве

$$\begin{cases} x = x_0 + t \cdot p \\ y = y_0 + t \cdot q \\ z = z_0 + t \cdot r \end{cases}$$

$$\begin{cases} t = \dfrac{x - x_0}{p} \\ t = \dfrac{y - y_0}{q} \\ t = \dfrac{z - z_0}{r} \end{cases}$$

$$\frac{x - x_0}{p} = \frac{y - y_0}{q} = \frac{z - z_0}{r}$$

Примеры

Пример 8.

Написать канонические и параметрические уравнения прямой, параллельной прямой а, проходящей через точку М(1,2,3).

a= $\frac{x-1}{2}=\frac{y+5}{7}=\frac{z-2}{3}$

Решение: Необходимая для решения точка задана по условию, а направляющий вектор для искомой прямой возьмём тот же, что для заданной, т.к. они параллельны: **n**={2,7,3}. Осталось воспользоваться формулой.

Ответ: $\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{7}=\frac{z-3}{3}$

Примеры

Пример 9.

Написать канонические уравнения прямой, заданной пересечением двух плоскостей:

$2x - y + 3z + 3 = 0$ и $3x + y + z - 6 = 0$.

Пример 10. Найти точку А пересечения прямой m и плоскости $2x-y+3z+3 = 0$.

m= $\frac{x+1}{-4} = \frac{y-7}{7} = \frac{z-1}{3}$

Расстояние от точки до плоскости в пространстве

Пусть в декартовых координатах плоскость П задана уравнением: Ax+By+Cz+D=0, а точка $M_1=(x_1,y_1,z_1)$.

Расстояние от точки M_1 до плоскости П вычисляется по формуле:

$$\rho(M_1,\Pi)=\frac{|Ax_1+By_1+Cz_1+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

Пример 11

Найти расстояние от точки (1,3,2) до плоскости $3x + y + z - 6 = 0$

Координаты точки, делящей отрезок в заданном соотношении

Пусть в декартовой системе координат $M_1=(x_1,y_1,z_1)$, $M_2=(x_2,y_2,z_2)$.

Координаты т. M, т.ч. $M_1M=\lambda\cdot MM_2$, находятся по следующим формулам:

$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda},\quad y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda},\quad z=\frac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda}$$