

# Решение задач линейной алгебры и аналитической геометрии

Лекция 4

A decorative graphic element consisting of several horizontal lines of varying lengths and colors (teal, white, and light blue) extending from the right side of the slide.

# Вектор

Вектор – направленный отрезок  
 $\mathbf{AB} = \{0, 1, 2\}$  – координаты вектора  
A – начало вектора, B – конец.

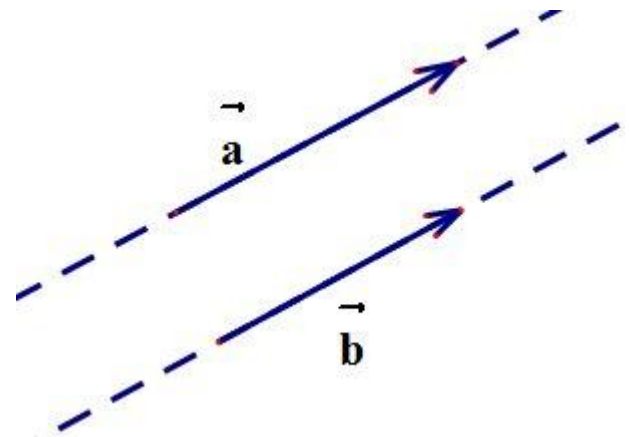


$\left| \overrightarrow{AB} \right|$  – длина вектора

$$\left| \overrightarrow{AB} \right| = \sqrt{(X_B - X_A)^2 + (Y_B - Y_A)^2 + (Z_B - Z_A)^2}$$

**Два вектора называются равными**, если они имеют одинаковую длину и сонаправлены.

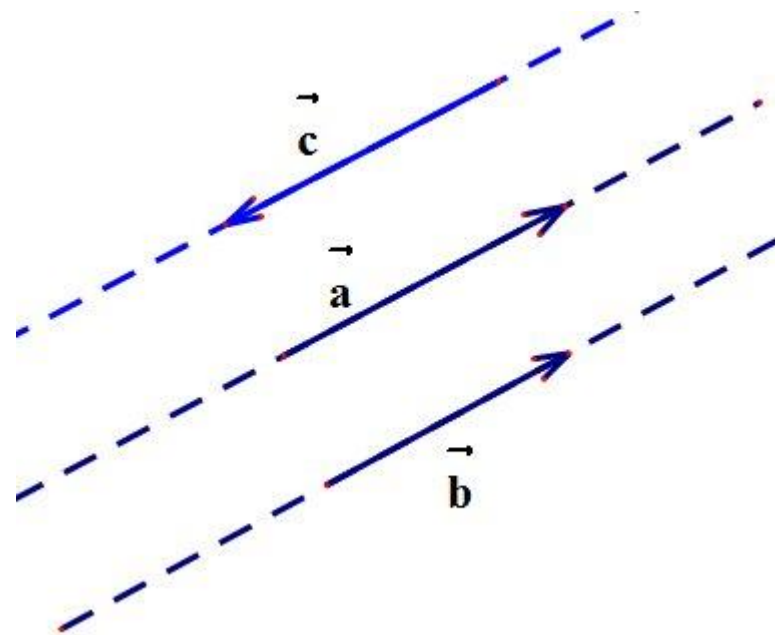
Два вектора называются **сонаправленными**, если они лежат на параллельных прямых и направлены в одну сторону:  
вектора и сонаправлены:



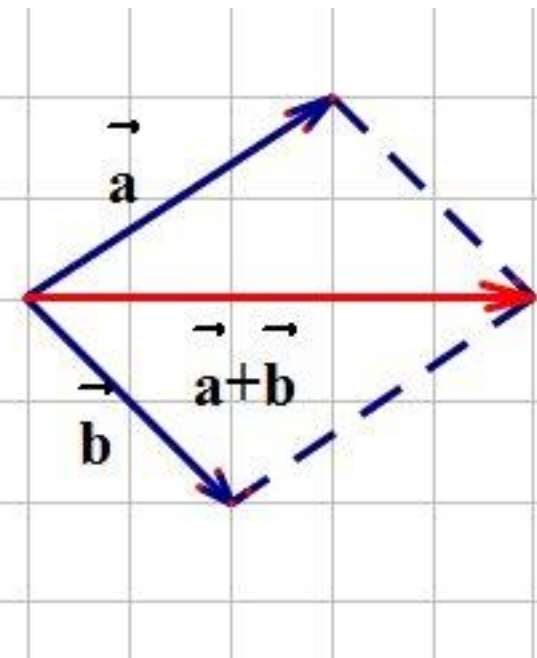
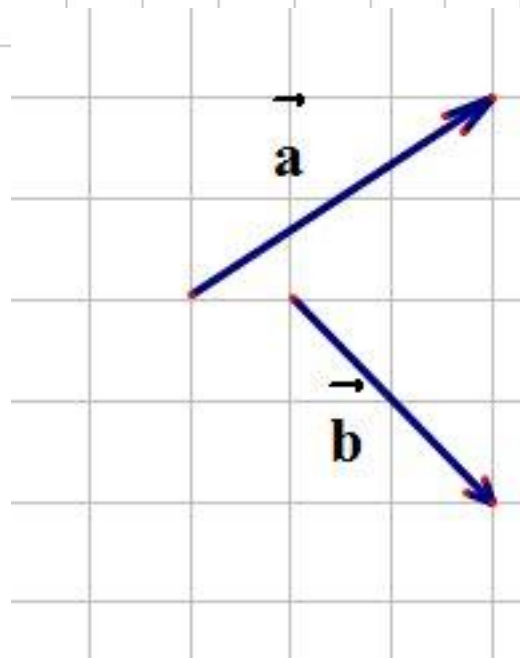
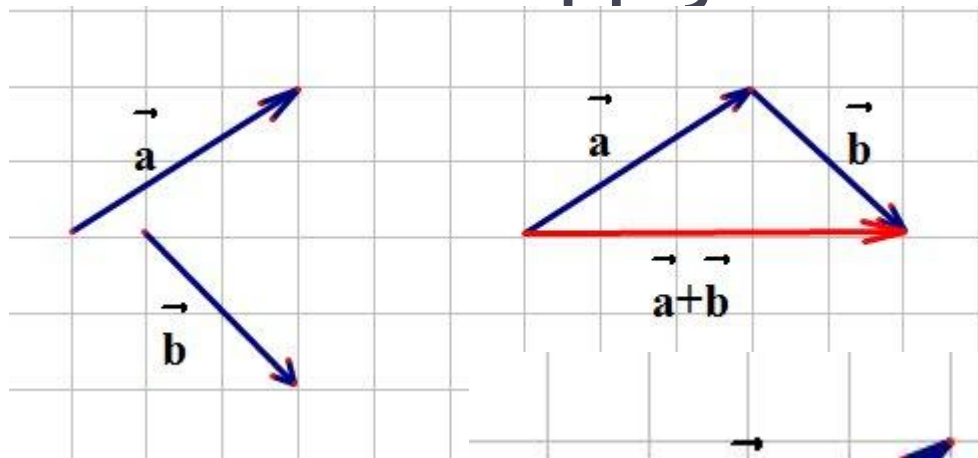
$\vec{AB}$ 

Вектора, лежащие на параллельных прямых называются **коллинеарными**: вектора **a**, **b**, **c** – коллинеарны. **Произведением вектора  $\vec{AB}$  на число  $k$**  называется вектор, сонаправленный вектору  **$\vec{AB}$** , если  $k > 0$ , и направленный в противоположную сторону, если  $k < 0$ .

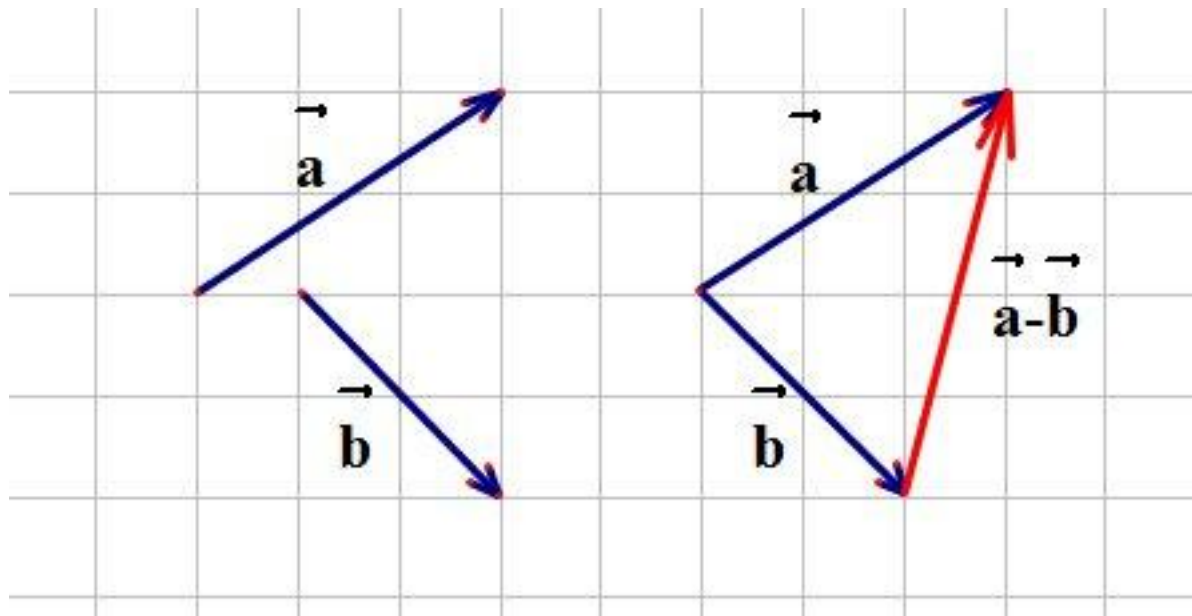
$$\left| k \vec{AB} \right| = k \left| \vec{AB} \right|$$



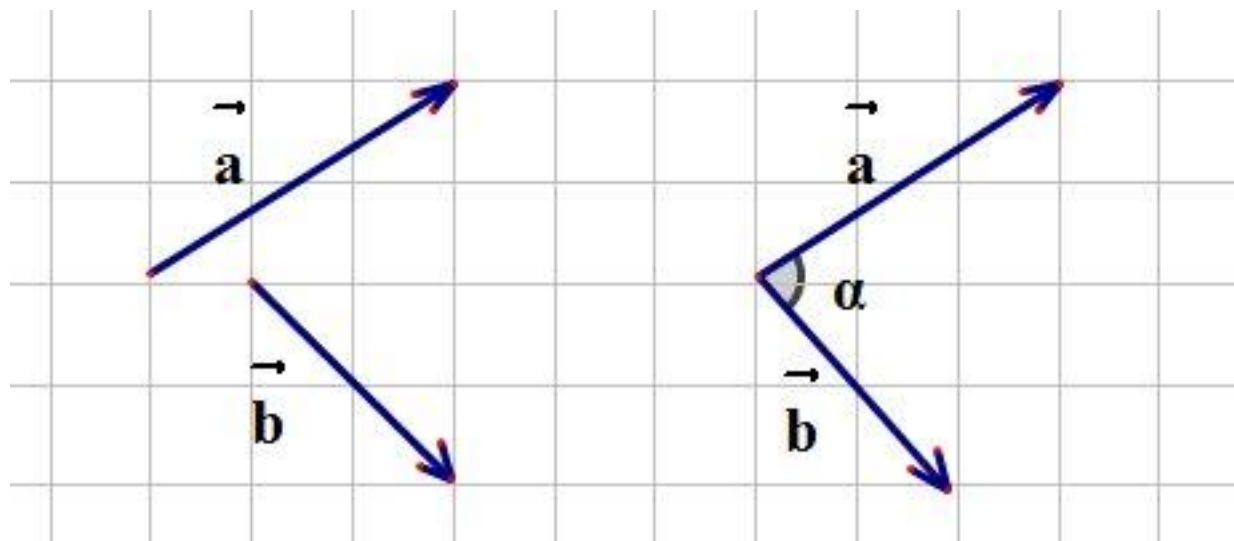
# Сложение двух векторов



# Вычитание двух векторов



# Угол между векторами



# Скалярное произведение двух векторов

- **Скалярным произведением** двух векторов называется число, равное произведению длин этих векторов на косинус угла между ними:

$$\vec{a} \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \left( \widehat{\vec{a} \vec{b}} \right)$$



# Свойства скалярного произведения:

1. КОММУТАТИВНОСТЬ:  $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = (\mathbf{b}, \mathbf{a})$
2.  $(\mathbf{a}, \mathbf{a}) = |\mathbf{a}|^2$
3.  $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = 0 \Leftrightarrow \mathbf{a} \perp \mathbf{b}$
4. Дистрибутивность:  $(\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2, \mathbf{b}) = (\mathbf{a}_1, \mathbf{b}) + (\mathbf{a}_2, \mathbf{b})$
5.  $(\mathbf{a}, \lambda \cdot \mathbf{b}) = \lambda \cdot (\mathbf{a}, \mathbf{b})$

## Пример 1.

Найти угол между векторами

Пусть в декартовой системе

координат  $\mathbf{a}=\{2,1,0\}$ ,  $\mathbf{b}=\{3,-2,0\}$ ,  $\mathbf{c}=\{-4,-2,0\}$ .

Найти угол между векторами

а)  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$ ;

б)  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{c}$ .

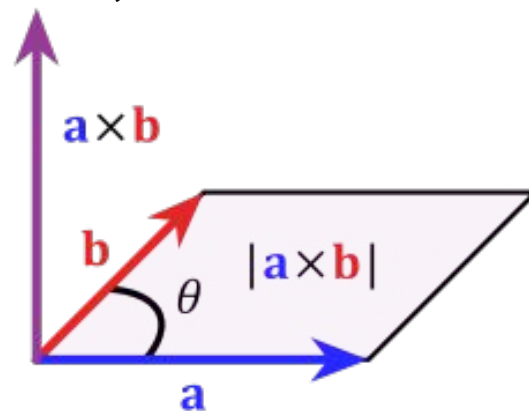
# Векторное произведение векторов

*Векторным произведением* упорядоченной пары векторов **a** и **b** называется вектор  $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ , такой что

$|\mathbf{a}, \mathbf{b}| = S_{\mathbf{a}, \mathbf{b}}$ , где  $S_{\mathbf{a}, \mathbf{b}}$  – площадь параллелограмма, построенного на векторах **a** и **b**. (Если  $\mathbf{a} \parallel \mathbf{b}$ , то  $S_{\mathbf{a}, \mathbf{b}} = 0$ .)

$\mathbf{a} \perp [\mathbf{a}, \mathbf{b}] \perp \mathbf{b}$ .

**a**, **b**,  $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$  – правая тройка.



# Свойства векторного произведения:

1.  $[\mathbf{a}, \mathbf{b}] = -[\mathbf{b}, \mathbf{a}]$
2.  $[\mathbf{a}, \mathbf{b}] = \mathbf{0}, \mathbf{a} \parallel \mathbf{b}$
3.  $[\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2, \mathbf{b}] = [\mathbf{a}_1, \mathbf{b}] + [\mathbf{a}_2, \mathbf{b}]$
4.  $\lambda \cdot [\mathbf{a}, \mathbf{b}] = [\lambda \cdot \mathbf{a}, \mathbf{b}] = [\mathbf{a}, \lambda \cdot \mathbf{b}]$

$$|[\mathbf{a}, \mathbf{b}]| = \begin{vmatrix} i & j & k \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} \cdot i - \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} \cdot j + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \cdot k =$$
$$\left\{ \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \right\}$$

## Пример 2.

Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$ .

Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$ , если  $\mathbf{a}=\mathbf{p}+2\mathbf{q}$ ,  $\mathbf{b}=3\mathbf{p}-2\mathbf{q}$ ,  $|\mathbf{p}|=1$ ,  $|\mathbf{q}|=1/2$ ,  $\varphi_{\mathbf{p},\mathbf{q}}=\pi/6$ .

**Решение:** Пусть  $S_{\mathbf{a},\mathbf{b}}$  – искомая площадь.

$$\begin{aligned} [\mathbf{a},\mathbf{b}] &= [\mathbf{p}+2\mathbf{q},3\mathbf{p}-2\mathbf{q}] = [\mathbf{p},3\mathbf{p}-2\mathbf{q}] + 2[\mathbf{q},3\mathbf{p}-2\mathbf{q}] = \\ &= 3[\mathbf{p},\mathbf{p}] - 2[\mathbf{p},\mathbf{q}] + 2 \cdot 3[\mathbf{q},\mathbf{p}] - 2 \cdot 2[\mathbf{q},\mathbf{q}] = = \theta - 2[\mathbf{p},\mathbf{q}] + 6[\mathbf{q},\mathbf{p}] - \\ &= \theta = 2[\mathbf{q},\mathbf{p}] + 6[\mathbf{q},\mathbf{p}] = 8[\mathbf{q},\mathbf{p}]. \end{aligned}$$

$$S_{\mathbf{a},\mathbf{b}} = |[\mathbf{a},\mathbf{b}]| = |8[\mathbf{q},\mathbf{p}]| = 8 \cdot |\mathbf{q}| \cdot |\mathbf{p}| \cdot \sin\varphi_{\mathbf{p},\mathbf{q}} = 8 \cdot 1/2 \cdot 1 \cdot \sin\pi/6 = 2.$$

**Ответ:**  $S_{\mathbf{a},\mathbf{b}} = 2$ .

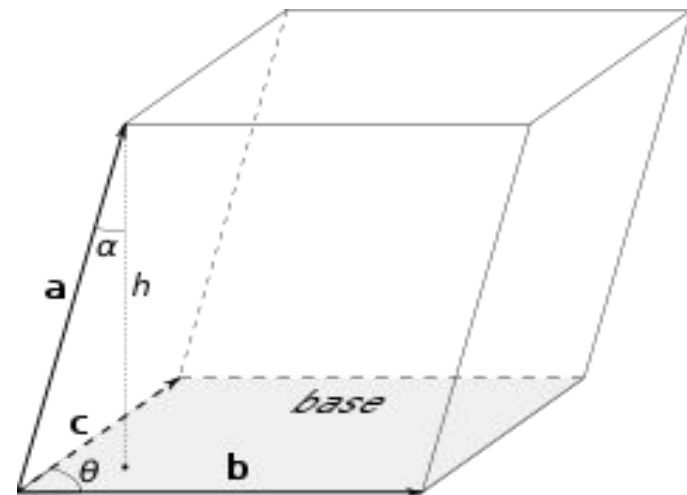
# Смешанное произведение векторов.

Смешанным произведением упорядоченной тройки векторов  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  и  $\mathbf{c}$  называется число  $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \rangle$ , т.ч.  
 $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \rangle = ([\mathbf{a}, \mathbf{b}], \mathbf{c})$ .

$\langle \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \rangle = V_{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}}$ , если  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$  – правая тройка, или  $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \rangle = -V_{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}}$ , если  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$  – левая тройка. Здесь  $V_{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}}$  – объём параллелепипеда, построенного на векторах  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  и  $\mathbf{c}$ .  
(Если  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  и  $\mathbf{c}$  компланарны, то  $V_{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}} = 0$ .)

В декартовой системе координат, если  $\mathbf{a} = \{x_1, y_1, z_1\}$ ,  $\mathbf{b} = \{x_2, y_2, z_2\}$ ,  
 $\mathbf{c} = \{x_3, y_3, z_3\}$ ,

$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \rangle = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$$



# Примеры

**Пример 3.** Проверка компланарности векторов  
Компланарны ли векторы  $\mathbf{a}=\{1,0,1\}$ ,  $\mathbf{b}=\{0,2,1\}$ ,  $\mathbf{c}=\{3,1,0\}$ ?

**Пример 4.** Принадлежность 4 точек одной плоскости  
Доказать, что точки  $A(1,2,-5)$ ,  $B(2,-1,-10)$ ,  $C(-1,3,0)$  и  $D(-4,-2,1)$  лежат в одной плоскости

**Пример 5.** Вычислить объем тетраэдра и его высоту  
Вычислить объём тетраэдра с вершинами в точках  $A_1, A_2, A_3, A_4$  и его высоту, опущенную из вершины  $A_4$  на грань  $A_1A_2A_3$ , если  $A_1(1,2,0)$ ,  $A_2(-1,2,1)$ ,  $A_3(-1,-1,-1)$ ,  $A_4(0,1,3)$ .

# Каноническое уравнение плоскости в пространстве

Пусть в декартовой системе координат дан вектор  $\mathbf{n}=\{A,B,C\}$  и точка  $M_0=(x_0,y_0,z_0)$ .

Построим плоскость  $\Pi$ , проходящую через т.  $M_0$ , перпендикулярную вектору  $\mathbf{n}$  (этот вектор называют *нормальным вектором* или *нормалью плоскости*).

$M \in \Pi$ ,  $M_0M \perp \mathbf{n}$ .

$M_0M=\{x-x_0, y-y_0, z-z_0\} \perp \mathbf{n}$

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$$

**Каноническое уравнение плоскости в пространстве:**

$$Ax+By+Cz+D=0, \text{ где } D = -Ax_0 - By_0 - Cz_0.$$



# Примеры

- Пример 6. Написать каноническое уравнение плоскости, перпендикулярной вектору  $n = \{3, 1, 1\}$  и проходящей через точку  $M(2, -1, 1)$ .
- Пример 7. Написать каноническое уравнение плоскости, содержащей точки  $K(2, 1, -2)$ ,  $L(0, 0, -1)$ ,  $M(1, 8, 1)$ .

# Канонические и параметрические уравнения прямой в пространстве

- Пусть в декартовой системе координат дан вектор  $\mathbf{a}=\{p,q,r\}$  и точка  $M_0=(x_0,y_0,z_0)$ .
- Построим прямую  $l$ , проходящую через т.  $M_0$ , параллельную вектору  $\mathbf{a}$  (этот вектор называют *направляющим вектором прямой*).
- $M \in l, M_0M \parallel \mathbf{a}$ .
- $M_0M=\{x-x_0, y-y_0, z-z_0\} \parallel \mathbf{a}$ , т.ч.  $M_0M=t \cdot \mathbf{a} \Rightarrow$

$$\begin{cases} x - x_0 = t \cdot p \\ y - y_0 = t \cdot q \\ z - z_0 = t \cdot r \end{cases}$$

# Параметрические уравнения прямой в пространстве

$$\begin{cases} x = x_0 + t \cdot p \\ y = y_0 + t \cdot q \\ z = z_0 + t \cdot r \end{cases}$$

$$\begin{cases} t = \frac{x - x_0}{p} \\ t = \frac{y - y_0}{q} \\ t = \frac{z - z_0}{r} \end{cases}$$

$$\frac{x - x_0}{p} = \frac{y - y_0}{q} = \frac{z - z_0}{r}$$

# Примеры

## Пример 8.

Написать канонические и параметрические уравнения прямой, параллельной прямой  $a$ , проходящей через точку  $M(1,2,3)$ .

$$a = \frac{x-1}{2} = \frac{y+5}{7} = \frac{z-2}{3}$$

**Решение:** Необходимая для решения точка задана по условию, а направляющий вектор для искомой прямой возьмём тот же, что для заданной, т.к. они параллельны:  $\mathbf{n} = \{2, 7, 3\}$ . Осталось воспользоваться формулой.

**Ответ:**

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{7} = \frac{z-3}{3}$$

# Примеры

## Пример 9.

Написать канонические уравнения прямой, заданной пересечением двух плоскостей:

$$2x - y + 3z + 3 = 0 \text{ и } 3x + y + z - 6 = 0.$$

Пример 10. Найти точку А пересечения прямой  $m$  и плоскости  $2x - y + 3z + 3 = 0$ .

$$m = \frac{x+1}{-4} = \frac{y-7}{7} = \frac{z-1}{3}$$

# Расстояние от точки до плоскости в пространстве

Пусть в декартовых координатах плоскость  $\Pi$  задана уравнением:  $Ax + By + Cz + D = 0$ , а точка  $M_1 = (x_1, y_1, z_1)$ .

Расстояние от точки  $M_1$  до плоскости  $\Pi$  вычисляется по формуле:

$$\rho(M_1, \Pi) = \frac{|Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

## Пример 11

Найти расстояние от точки  $(1,3,2)$  до плоскости  
 $3x + y + z - 6 = 0$

# Координаты точки, делящей отрезок в заданном соотношении

Пусть в декартовой системе координат

$$M_1 = (x_1, y_1, z_1), M_2 = (x_2, y_2, z_2).$$

Координаты т. М, т.ч.  $M_1M = \lambda \cdot MM_2$ , находятся по следующим формулам:

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}, \quad z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1 + \lambda}$$