

Семинар для учителей математики

Решение задач на банковские проценты

Подготовка к ЕГЭ. Профильный уровень

**Учитель математики
ГБОУ СОШ № 2088**

**Меркулова Татьяна
Игоревна**

15 декабря 2014 г.
г. Москва

Задача 1А

Вкладчик внес в банк 12000 р. Банк выплачивает 3% годовых. Через 2 года 3 месяца и 7 дней вкладчик закрыл счет. Какую сумму выплатил банк?

Выплата банка составит:

- 12000 (собственно вклад)
- + (процент за два года)
- + (процент за 3 месяца)
- + (процент за 7 дней).
- Т.е: $12000 + 720 + 90 + 6,90 = 12816,9$ рублей

Ответ 1: 12816,9 рублей

Задача 1Б

Вкладчик внес в банк 12000 р. Банк *ежегодно* начисляет 3% годовых. Через 2 года 3 месяца и 7 дней вкладчик закрыл счет. Какую сумму выплатил банк?

Коэффициент увеличения ставки $\epsilon = 1 + \frac{3}{100} = 1,03$

За первые 2 года будет начислено

$$12000 \cdot 1,03^2 = 12730,8$$

За оставшийся период:

$$12730,8 \cdot 0,03 \cdot \left(\frac{3}{12} + \frac{7}{365} \right) = 102,81$$

Ответ 2: 12833,61 руб

Задача 2.

31 декабря 2014 года Дмитрий **взял в банке 4 290 000** рублей в кредит **под 14,5%** годовых. Схема выплаты кредита следующая: 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся часть долга (т.е. увеличивает долг на 14,5%), Затем Дмитрий переводит в банк X рублей. **Какой должна быть сумма X** , чтобы Дмитрий **выплатил** платеж **двумя равными** платежами (т.е. за два года)?

Задача 2.

долг через год $S_1 = Sb - X$, где $b = 1 + \frac{a}{100}$.

$$S_2 = (Sb - X)b - X = Sb^2 - X(b + 1) = 0,$$

$$X = \frac{Sb^2}{b + 1}$$

$$X = \frac{4290000 \cdot 1,145 \cdot 1,145}{1 + 1,145} = \frac{4290 \cdot 1145 \cdot 1145}{2145} = 2290 \cdot 1145 = 2622050$$

Ответ: две выплаты по 2 622 050 рублей

Задача 3.

31 декабря 2014 года Владимир взял в банке **некоторую сумму** в кредит **под 14%** годовых. Схема выплаты кредита следующая: 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся часть долга (т.е. увеличивает долг на 14%), Затем Владимир переводит в банк **4 548 600** рублей. **Какую сумму взял Владимир в банке**, если он выплатил долг **двумя равными платежами?**

Задача 3.

$$S_2 = Sb^2 - X(b+1) = 0$$

$$S = \frac{X(b+1)}{b^2} = \frac{4548600 \cdot 2,14}{1,14 \cdot 1,14} = \frac{454860000 \cdot 214}{114 \cdot 114}$$

$$S = \frac{227430000 \cdot 107}{57 \cdot 57} = \frac{75810000 \cdot 107}{19 \cdot 57} = \frac{25270000 \cdot 107}{19 \cdot 19} = \frac{1330000 \cdot 107}{19} = 70000 \cdot 107$$

**Ответ: 7 490 000
рублей**

Задача 4.

31 декабря 2014 года Евгений взял в банке **1 млн. рублей в кредит**. Схема выплаты кредита следующая: 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся часть долга (т.е. увеличивает долг на $a\%$), Затем Евгений переводит в банк очередной транш. Евгений выплатил кредит за **два транша**, переведя в **первый раз 540 тыс.** рублей, а во **второй 649,6 тыс.** рублей. **Под какой процент** банк выдал кредит Евгению?

Задача 4

$$S_2 = (Sb - X_1)b - X_2 = 0$$

$$(1000000b - 540000)b - 649600 = 0$$

$$10000b^2 - 5400b - 6496 = 0$$

$$1250b^2 - 675b - 812 = 0$$

$$D = 675^2 + 4 \cdot 1250 \cdot 812 = 25^2 (729 + 6496) = 25^2 \cdot 7225$$

$$b = \frac{25(27 + 85)}{2500} = \frac{112}{100} = 1,12$$

Ответ: 12 %

Задача 5.

1 января 2015 года Александр Сергеевич **взял** в банке **1,1 млн. рублей** в кредит. Схема выплаты кредита следующая – 1 числа каждого следующего месяца банк начисляет **1%** на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на 1%), затем Александр Сергеевич переводит в банк платеж. **На какое минимальное количество месяцев** Александр Сергеевич может взять кредит, чтобы ежемесячные выплаты были **не более 275 тыс. рублей?**

Задача 5

После погашения части долга X , остаток кредите составит:

$$S_1 = Sb - X$$

Через два месяца:

$$S_2 = (Sb - X)b - X = Sb^2 - X(b + 1) = Sb^2 - X \frac{b^2 - 1}{b - 1}$$

Через 3 месяца:

$$S_3 = (Sb^2 - X(b + 1)) - X = Sb^3 - X(b^2 + b + 1) = Sb^3 - X \frac{b^3 - 1}{b - 1}$$

Через 4: $S_4 = (Sb^3 - X(b^2 + b + 1))b - X = Sb^4 - X(b^3 + b^2 + b + 1) = Sb^4 - X \frac{b^4 - 1}{b - 1}$

Т.о. через n месяцев:

$$S_n = Sb^n - X \frac{b^n - 1}{b - 1}$$

$$1100000 \cdot 1,01^n - 275000 \cdot \frac{1,01^n - 1}{0,01} \leq 0 \quad 275 \cdot (1,01^n - 1) \geq 11 \cdot 1,01^n$$

$$1,01^n \geq 1,0416$$

$$(1 + \alpha)^n \approx 1 + \alpha n \quad 1,01^n \approx 1 + 0,01 \cdot n \geq 1,0416$$

$$n \geq 4,16$$

Ответ:

5

Задача 6.

В банк помещена сумма **3 900 000** рублей под **50 % годовых**. В конце каждого из **первых четырех** лет, после начисления процентов, вкладчик вносит **одну и ту же фиксированную сумму**. **К концу пятого** года после начисления процентов оказалось, что размер вклада увеличился **на 725%**. **Какую сумму** вкладчик вносил в банк ежегодно?

Задача 6

Сумма вклада через год после внесения дополнительного взноса X :

$$S_1 = Sb + X$$

Через два года: $S_2 = (Sb + X)b + X = Sb^2 + X(b + 1)$

Через 3 года: $S_3 = (Sb^2 + X(b + 1)) + X = Sb^3 + X(b^2 + b + 1)$

Через 4 года: $S_4 = (Sb^3 + X(b^2 + b + 1))b + X = Sb^4 + X(b^3 + b^2 + b + 1)$

Через 5 лет: $S_5 = (Sb^4 + X(b^3 + b^2 + b + 1))b = Sb^5 + X(b^4 + b^3 + b^2 + b) = 8,25S$

$$X = \frac{8,25S - Sb^5}{b^4 + b^3 + b^2 + b} = \frac{S \cdot 1,5(5,5 - 1,5^4)}{1,5(1,5^3 + 1,5^2 + 1,5 + 1)} \quad X = \frac{3,9 \cdot (5,5 - 5,0625)}{3,375 + 2,25 + 2,5}$$

$$X = \frac{3,9 \cdot 0,4375}{8,125} = \frac{3,9 \cdot 8750}{16250} = \frac{3,9 \cdot 17500}{32500} = \frac{3,9 \cdot 35}{65}$$

$X = 0,21 \text{ млн.руб}$

$$X = \frac{8,25S - Sb^5}{b(b^3 + b^2 + b + 1)} = \frac{S \left(8\frac{1}{4} - \frac{3^5}{2^5} \right)}{\frac{3}{2} \cdot (b+1)(b^2+1)} = \frac{3,9 \cdot \left(\frac{33}{4} - \frac{243}{32} \right)}{\frac{3}{2} \left(\frac{3}{2} + 1 \right) \left(\frac{9}{4} + 1 \right)} = \frac{3,9 \cdot (264 - 243)}{3 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 13}$$

$$X = 210000 \text{ рублей}$$

Задача 7.

За время хранения вклада в банке процент по нему начислялся **ежемесячно** в размере 5%, затем 8% и, наконец, $11\frac{1}{9}\%$.

Известно, что под действием каждой процентной ставки вклад находился **целое число** месяцев. По истечению срока хранения первоначальной суммы вклад **увеличился на 96%**. Определите **срок хранения вклада**.

Задача 7

$$Sn = S \left(1 + \frac{5}{100}\right)^{n_1} \cdot \left(1 + \frac{8}{100}\right)^{n_2} \cdot \left(1 + \frac{11 \frac{1}{9}}{100}\right)^{n_3} = 1,96S$$

$$\left(\frac{105}{100}\right)^{n_1} \cdot \left(\frac{108}{100}\right)^{n_2} \cdot \left(\frac{1000}{900}\right)^{n_3} = \frac{196}{100}$$

$$\left(\frac{3 \cdot 7}{4 \cdot 5}\right)^{n_1} \cdot \left(\frac{3^3}{5^2}\right)^{n_2} \cdot \left(\frac{2 \cdot 5}{3^2}\right)^{n_3} = \frac{7^2}{5^2} \quad n_1 = 2.$$

$$\left(\frac{3^3}{5^2}\right)^{n_2} \cdot \left(\frac{2 \cdot 5}{3^2}\right)^{n_3} = \frac{2^4}{3^2}$$

$$n_3 = 4 \quad n_2 = 2$$

Ответ: $2 + 4 + 2 = 8$ месяцев

Задача 8.

Некоторая сумма, **больше 1000** рублей, была помещена в банк, и после **первого года** хранения проценты, начисленные на вклад, **составили 400** рублей. Владелец вклада **добавил на счет 600** рублей.

После второго года хранения и начисления процентов сумма на вкладе стала **равна 5500** рублей. Какова была **первоначальная сумма** вклада, если процентная ставка банка для первого и второго года хранения была одинакова?

Задача 8

Доход по вкладу через год хранения:

$$S \cdot \frac{a}{100} = 400$$

К началу второго года, после внесения дополнительной суммы:

$$S + 400 + 600 = S + 1000$$

Через два года процент за хранение вклада

$$(S + 1000) \frac{a}{100}$$

Собственно сумма вклада

$$S + 1000 + (S + 1000) \frac{a}{100} = 5500$$

$$S + S \cdot \frac{a}{100} + 1000 + 10a = 5500 \quad S = \frac{40000}{a}$$

$$\frac{40000}{a} + 400 + 1000 + 10a - 5500 = 0 \quad a^2 - 410a + 4000 = 0$$

Ответ: 4000 рублей

Задача 9.

Цена некоторого товара **была** **повышена** сначала на 10%, затем еще на 120 рублей и, наконец, еще на 5%. Какова была **первоначальная цена** товара, если **в результате** повышение составило **31,25%**?

Задача 9

После первого повышения цена товара: $S_1 = S + \frac{10}{100}S$

После второго повышения цена составила: $S_2 = S_1 + 120 = S + \frac{1}{10}S + 120$

После третьего: $S_3 = S_2 + \frac{5}{100}S_2 = \frac{105}{100} \left(\frac{11}{10}S + 120 \right)$

$$\frac{26}{25} \left(\frac{11}{10}S + 120 \right) = \frac{13125}{10000}S \quad \frac{11}{10}S + 120 = \frac{125}{100}S$$

$$0,15S = 120 \quad S = \frac{120}{0,15} = \frac{12000}{15} = \frac{4000}{5} = 800$$

Ответ: 800 рублей

Задача 10.

Фермер получил кредит в банке **под определенный процент**. **Через год** фермер **вернул** в банк в счет погашения кредита **$\frac{3}{4}$ от всей суммы**, которую он должен был банку к этому времени, а еще через год в счет полного погашения кредита он **внес в банк сумму на 21% превышающую величину полученного кредита**. **Каков процент** годовых по кредиту?

Задача 10

Пусть сумма кредита S , тогда через год сумма к возврату Sb .

Сумма долга после выплаты $\frac{3}{4}$ кредита составила $\frac{1}{4}Sb$.

Через два года оставшаяся часть по кредиту увеличилась в b раз: $\frac{1}{4}Sb^2$

И составила 121% первоначальной суммы:

$$\frac{1}{4}Sb^2 = 1,21S \quad b^2 = 4 \cdot 1,21 \quad b = 2,2$$

$$b = 1 + \frac{a}{100} = 2,2$$

Ответ: 120%

Задача 11.

Два брокера купили акции **одного достоинства** на сумму 3640 р. Когда цена на эти акции возросла, они **продали часть акций** на сумму 3927 р. **Первый** брокер **продал 75%** своих акций, а **второй 80%** своих. При этом сумма от продажи акций, полученная вторым брокером, на **140% превысила сумму**, полученную первым брокером. **На сколько процентов возросла цена одной акции?**

Задача 11

Пусть у первого брокера было A акций, а у второго B акций

$$A + B = 3640$$

После подорожания акции на k %, стоимость акции увеличилась в v раз, где

$$v = 1 + \frac{k}{100}$$

Тогда выручка от продажи акций первым брокером составила $0,75Av$, а вторым брокером $0,8Bv$.

Выручка второго брокера составила 240 % выручки первого брокера

$$\begin{cases} A + B = 3640 \\ 0,75Av + 0,8Bv = 3927 \\ 0,8Bv = 2,4 \cdot 0,75Av \end{cases} \quad \begin{aligned} Bv &= 3465 \\ Av &= 1540 \\ Bv &= \frac{9}{4} Av \end{aligned}$$

$$v = \frac{Av + Bv}{A + B} = \frac{1540 + 3465}{3640} = 1,375$$

Ответ: 37,5 %.