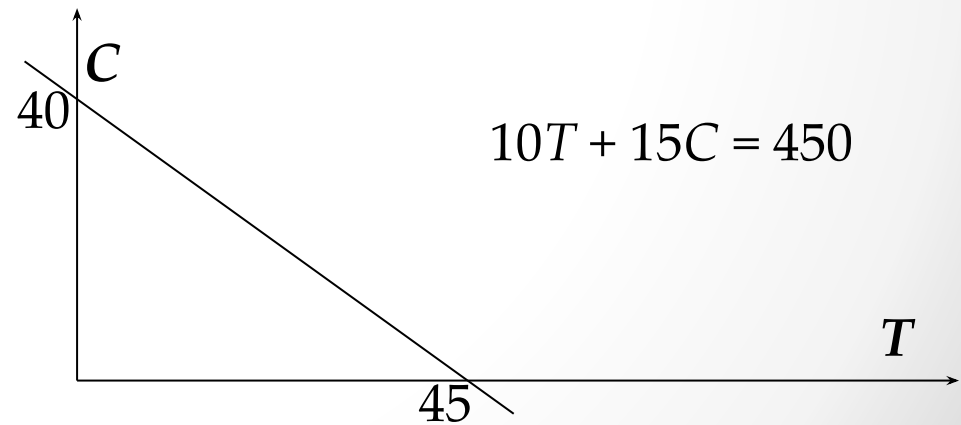
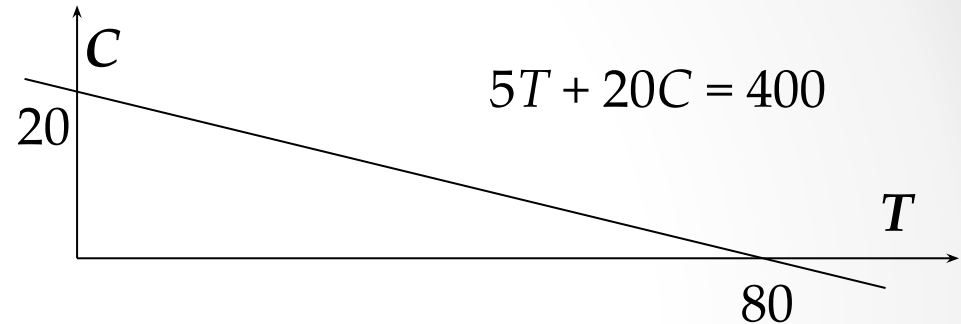


Решение задач ОПТИМИЗАЦИИ

Линейное программирование

(Целевая функция и функция ограничений – линейные)

Производственная задача	Стол (С)	Табурет (Т)	Ограничение (R)
Материал	20	5	400
Работа	15	10	450
Прибыль	80	45	Max



Линейное программирование (Графическое решение)

$$45T + 80C \rightarrow \text{MAX}$$

$$5T + 20C \leq 400$$

$$10T + 15C \leq 450$$

$$C > 0;$$

$$T > 0$$

Находим точку A:

$$5T + 20C = 400 \quad (1)$$

$$10T + 15C = 450 \quad (2)$$

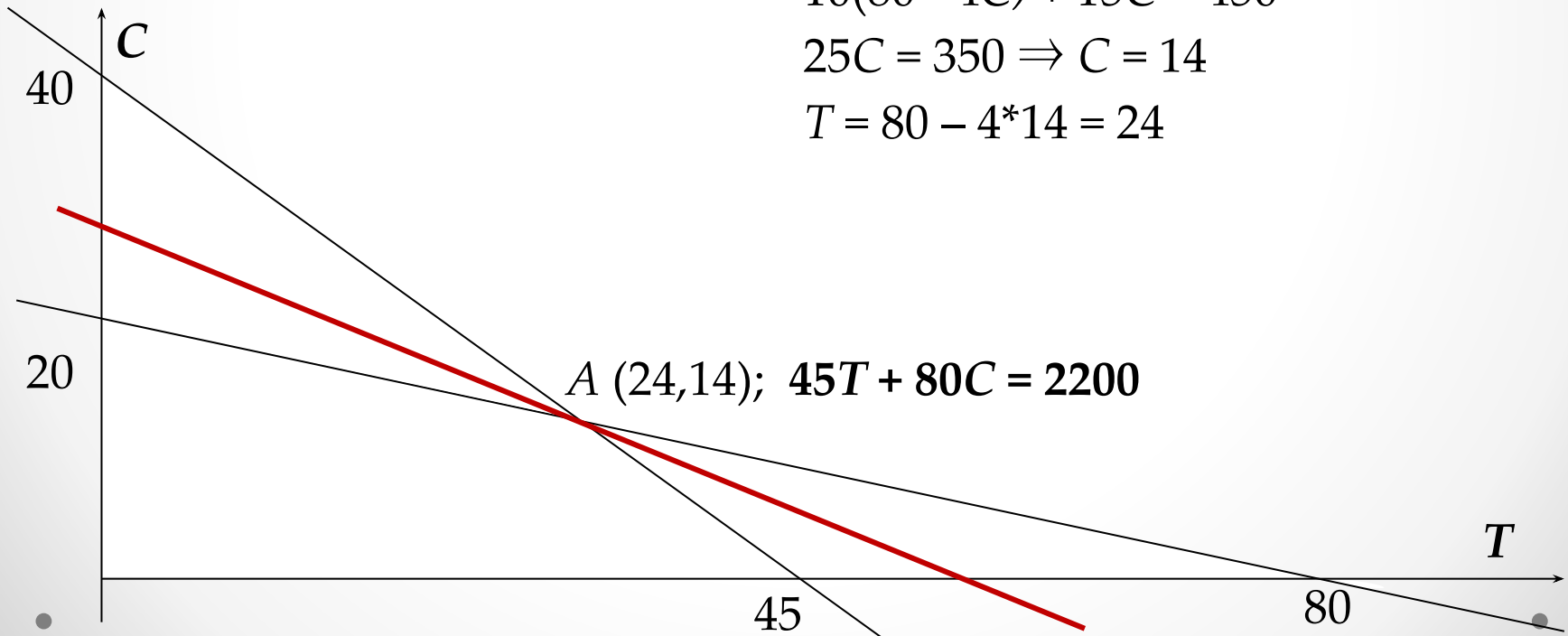
$$\text{Из (1) } T = 80 - 4C$$

Тогда (2) принимает вид:

$$10(80 - 4C) + 15C = 450$$

$$25C = 350 \Rightarrow C = 14$$

$$T = 80 - 4 \cdot 14 = 24$$



Линейное программирование

(Двойственная задача)

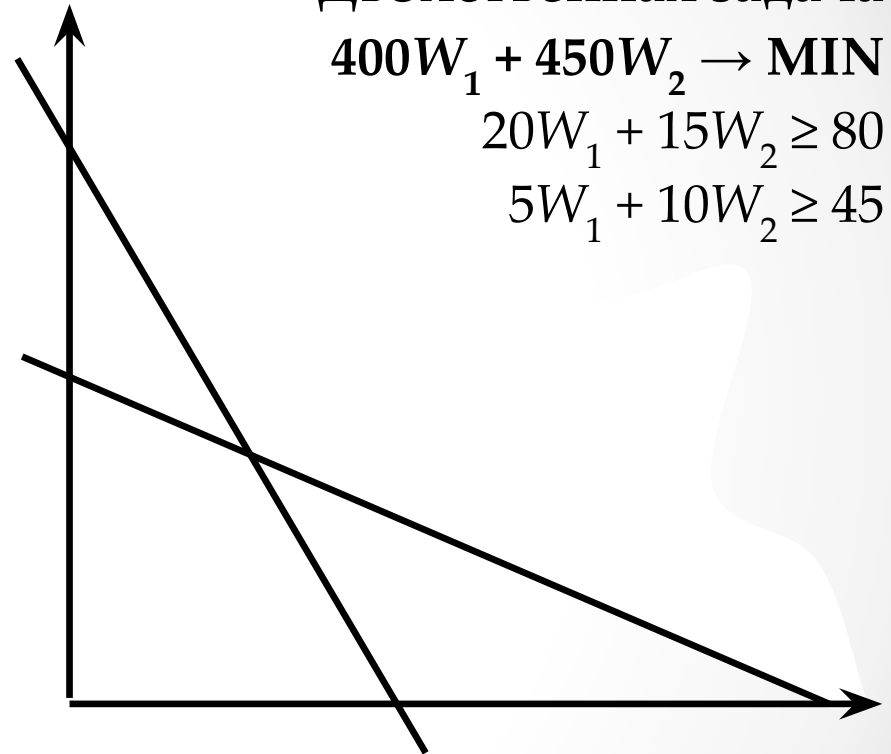
Производственная задача	Стол (С)	Табурет (Т)	Ограничение (R)	Двойственная задача
Материал	20	5	400	W_1
Работа	15	10	450	W_2
Прибыль	80	45	Max	Огр. Min

Двойственная задача

$$400W_1 + 450W_2 \rightarrow \text{MIN}$$

$$20W_1 + 15W_2 \geq 80$$

$$5W_1 + 10W_2 \geq 45$$



W_1 и W_2 – стоимость материала и работы (труда), оцененные по вкладу в целевую функцию

Линейное программирование

(Еще одна задача)

Задача о рационе	Корм М В 1 кг.	Корм N В 1 кг.	Надо
Вит. А	0,1	0,25	1
Вит. В	1	0,25	5
Калории	110	120	400
Цена 1 кг	3,8	4,2	MIN

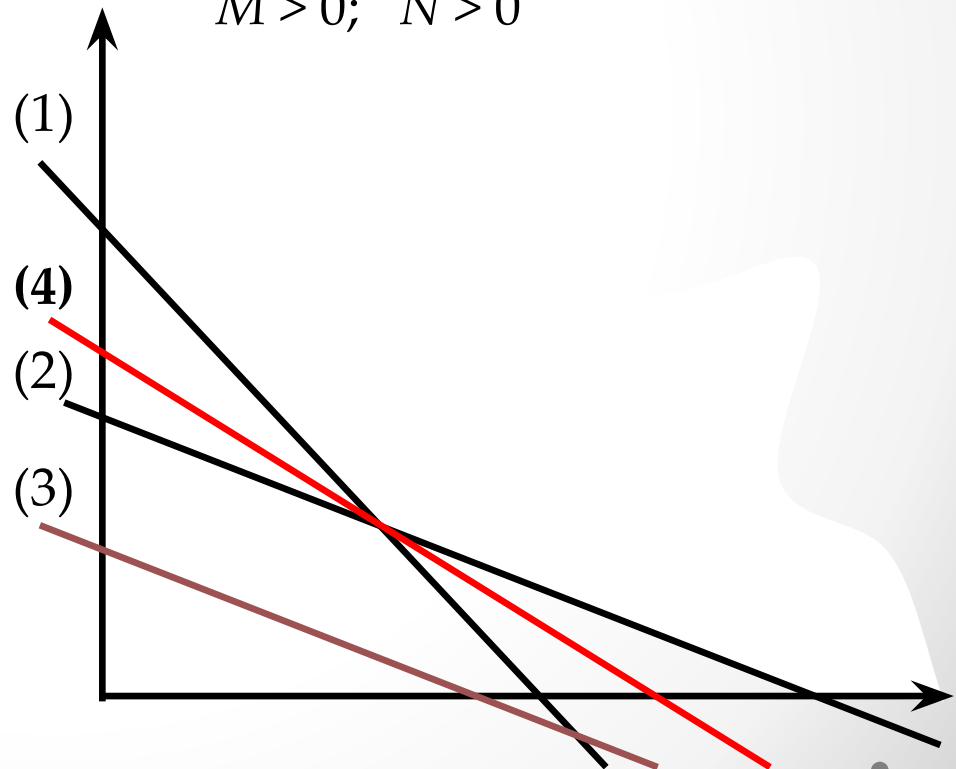
$$3,8M + 4,2N \rightarrow \text{MIN} \quad (4)$$

$$0,1M + 0,25N \geq 1 \quad (1)$$

$$1M + 0,25N \geq 5 \quad (2)$$

$$110M + 120N \geq 400 \quad (3)$$

$$M > 0; N > 0$$



Линейное программирование

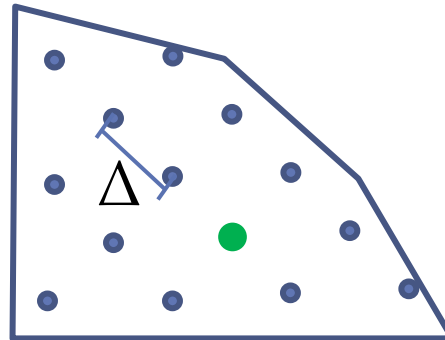
(Методы решения задач – на примере двумерных (с 2 переменными))

Нахождение
квадратного
корня
из 3 методом
перебора

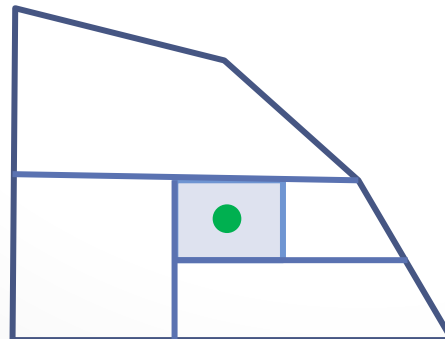
$x(i)$	$F(x(i))$
1	2
1,1	1,79
1,2	1,56
1,3	1,31
1,4	1,04
1,5	0,75
1,6	0,44
1,7	0,11
1,8	-0,24
1,9	-0,61
2	-1

$$f(x) = 3 - x_i^2$$

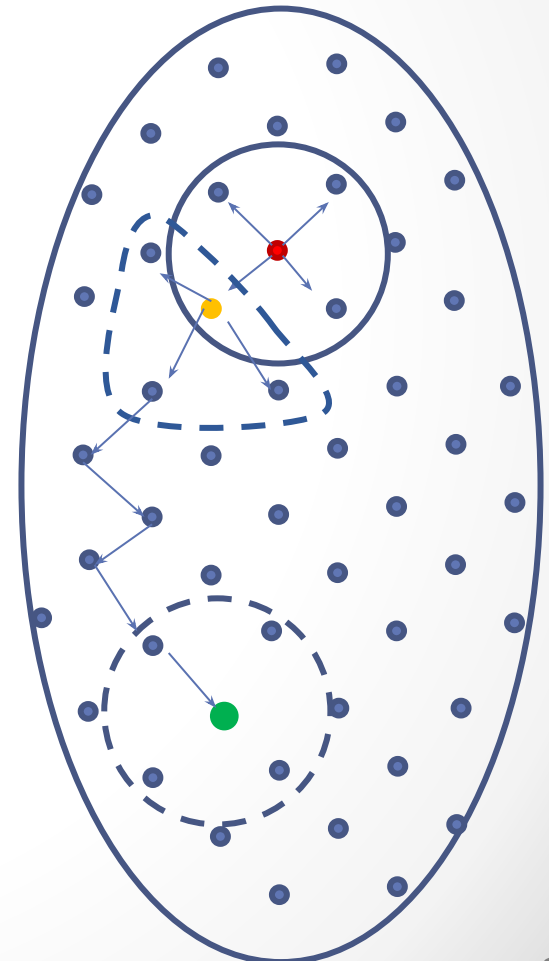
Простой перебор



Направленный перебор



Симплекс-метод



Линейное программирование (ТРАНСПОРТНАЯ ЗАДАЧА)

	Потреб. 1	Потреб. 2	Потреб. 3	Потреб. 4	Запас на складах
Склад 1	2	5	5	5	60
Склад 2	1	2	1	4	80
Склад 3	3	1	5	2	60
Потребн.	50	40	70	40	200

Целевая функция:

$$F = 2X_{11} + 5X_{12} + 4X_{13} + 5X_{14} + X_{21} + 2X_{22} + X_{23} + 4X_{24} + 3X_{31} + X_{32} + 5X_{33} + 2X_{34} \rightarrow \text{MIN}$$

Ограничения:

$$X_{11} + X_{12} + X_{13} + X_{14} = 60$$

$$X_{21} + X_{22} + X_{23} + X_{24} = 80$$

$$X_{31} + X_{32} + X_{33} + X_{34} = 60$$

$$X_{11} + X_{21} + X_{31} = 50$$

$$X_{12} + X_{22} + X_{32} = 40$$

$$X_{13} + X_{23} + X_{33} = 70$$

$$X_{14} + X_{24} + X_{34} = 40$$

- Существует программная реализация решения подобных задач •

Целочисленное программирование

(Дискретная задача. Решения – целые числа)

Выбор оборудования	Станок А (X)	Станок В (Y)	Огранич. (C)
Площадь м. кв.	8	4	38
Цена тыс. долл.	5	2	20
Производит тыс. шт.	7	3	Max

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

$$7X + 3Y \rightarrow \text{MAX}$$

$$8X + 4Y \leq 38$$

$$X \geq 0; Y \geq 0; X, Y - \text{целые}$$

$$5X + 2Y \leq 20$$

Возможно решение
МЕТОДОМ ПЕРЕБОРА

Из ограничений $\Rightarrow X \leq 4$.

1. $X = 4 \Rightarrow Y = 0 \Rightarrow C = 28$
(выбирается min Y, при котором выполняются оба ограничения).

2. $X = 3 \Rightarrow Y = 2 \Rightarrow C = 27$.

3. $X = 2 \Rightarrow Y \leq 5 \Rightarrow C = 29$.

4. $X = 1 \Rightarrow Y \leq 7 \Rightarrow C = 28$.

5. $X = 0 \Rightarrow Y \leq 9 \Rightarrow C = 27$.

Для обеспечения MAX производительности покупаем 2 станка типа А и 5 станков типа В

Целочисленное программирование (ЗАДАЧА О РАНЦЕ)

Суть задачи сводится к тому, чтобы поместить в ранец ограниченного объема набор предметов максимальной полезности.

Каждый предмет имеет свой объем (c_i) и полезность (a_i).

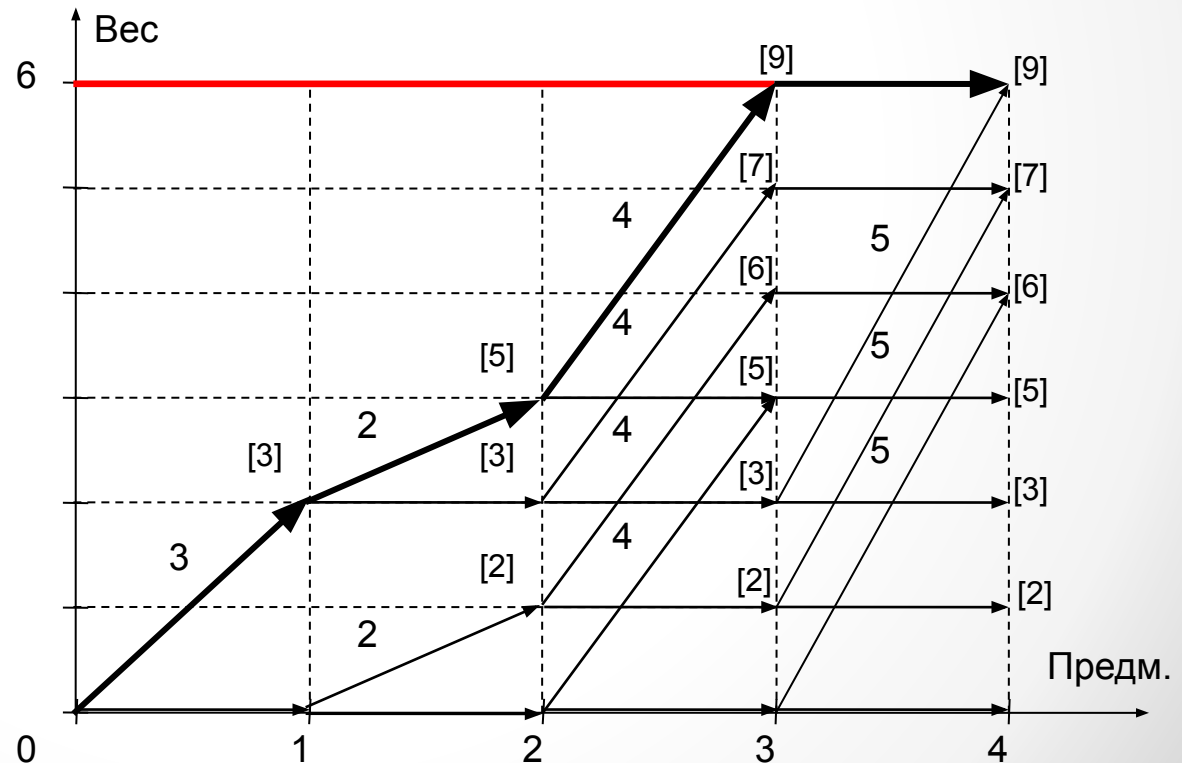
Переменные x_i равны 1 если i -й предмет входит в конечный набор, и $x_i = 0$, если не входит.

Приведем математическую постановку задачи:

$$\sum_{i \in Q} \alpha_i x_i \rightarrow \max$$

$$\sum_{i \in q} c_i x_i \leq R$$

i	1	2	3	4	R =	
a_i	3	2	4	5		6
c_i	2	1	3	4		



Комбинаторное программирование

NP-трудные задачи – не полиномиальные (экспонента – 2^n) – перебором решить невозможно.

Примеры NP-трудных задач:

Задача о ранце. – последовательность из n элементов, каждый из которых может принимать 2 значения ($x_i = [0;1]$) Число комбинаций 2^n

Задача коммивояжера – перестановка из n элементов $\pi=(i^1, i^2, \dots, i^n)$ ($n!$).

Подбор команды численностью m человек из n претендентов. (Число сочетаний).

Примеры комбинаций

Перестановка (P_n) из n элементов (например чисел $1,2,\dots,n$) – любой упорядоченный набор из элементов. Размещение из n элементов по n – $n!$.

Размещение (A_n^k) из n элементов по k – упорядоченный набор из k различных элементов некоторого n -элементного множества – $n!/(n-k)!$.

Сочетание из n по k (C_n^k) – набор k элементов, выбранных из данных n элементов. Наборы, отличающиеся только порядком следования элементов (но не составом), считаются одинаковыми (отличие от размещений) – $n!/(n-k)!/k!$.

Последовательность – набор из n элементов, каждый из которых может принимать одно из m значений – m^n .

$$20! = 2,432902 \times 10^{18}$$

(Проверяя по 100 комбинаций в 1 сек. мы потратим около 770 млн. лет)

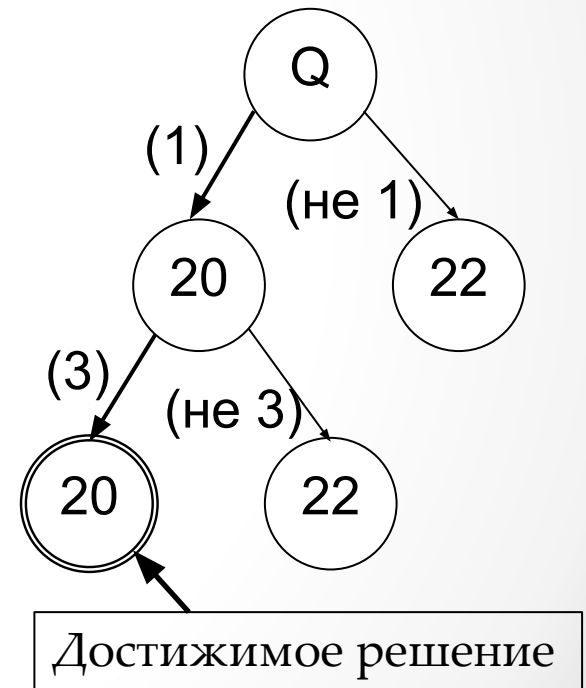
Целочисленное программирование

(Некоторые методы решения задач)

Метод приближения непрерывными задачами – сначала решается задача линейного программирования без учета целочисленности, а затем в окрестности оптимального решения ищутся целочисленные точки.

Метод ветвей и границ (один из наиболее известных видов *метода направленного перебора*) – множество возможных решений делится на непересекающиеся подмножества, для каждого вычисляется верхняя (задача на MAX) или нижняя (задача на MIN) граница. Выбирается подмножество с максимальной верхней или минимальной нижней границей и процедура повторяется для него, пока не получим оптимальное решение или решение с необходимой точностью.

Эффективность метода ветвей и границ в существенной степени зависит от «качества» оценок. При плохих оценках это фактически полный перебор, при достижимой нижней оценке – это получение оптимального решения за один проход по дереву ветвлений.



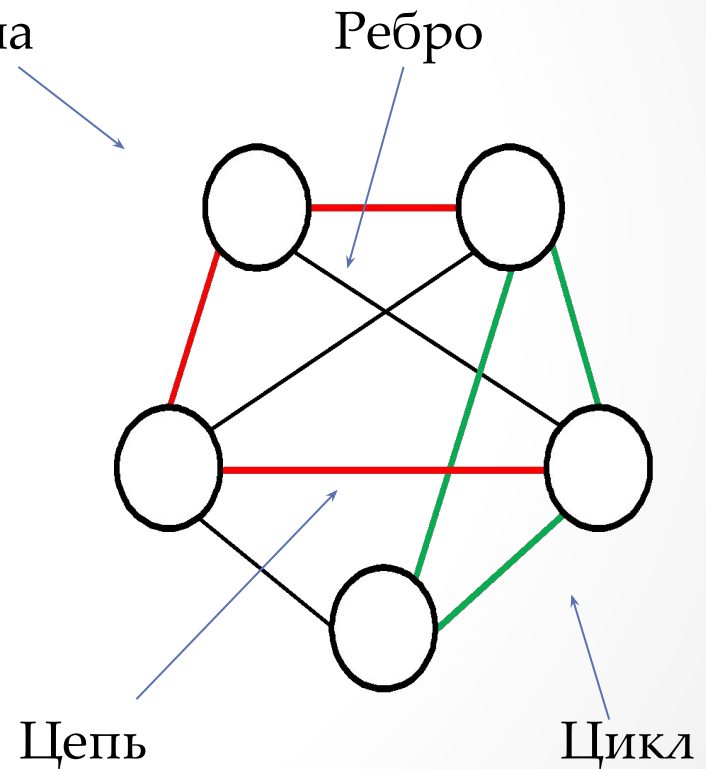
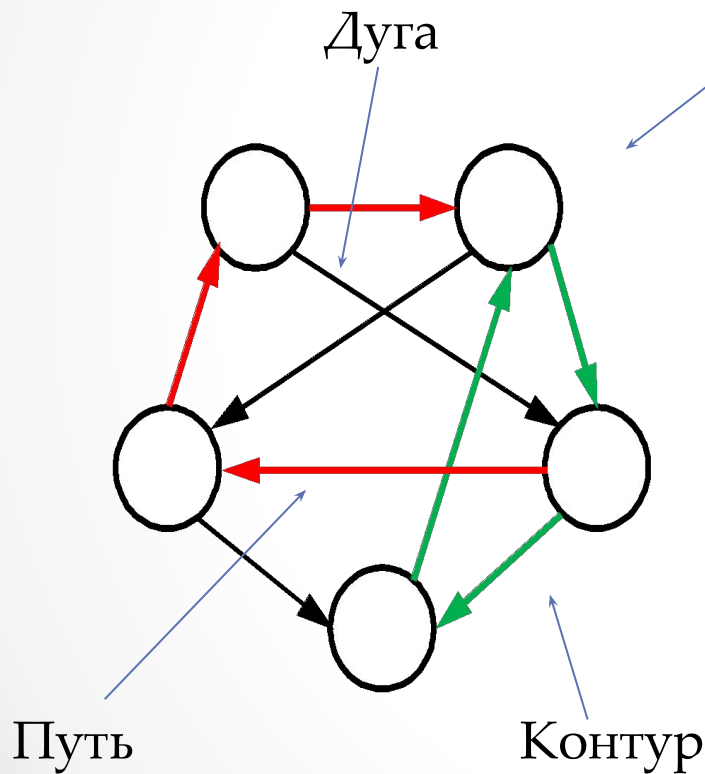
Задача об очередности обработки 3 деталей на станках

Теория графов и оптимизация

(Основные понятия)

ОРИЕНТИРОВАННЫЙ ГРАФ

НЕОРИЕНТИРОВАННЫЙ ГРАФ



Теория графов и оптимизация (ЗАДАЧА О КРАТЧАЙШЕМ (наидлиннейшем) ПУТИ)

НАЙТИ КРАТЧАЙШИЙ ПУТЬ В ГРАФЕ

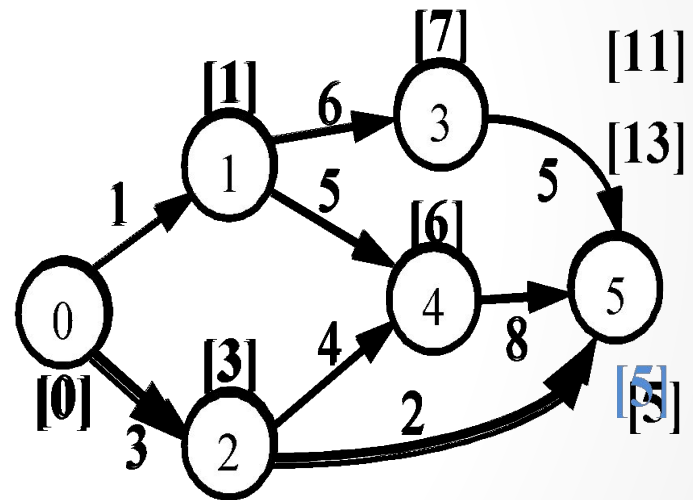
На ребрах указаны их длины.

В квадратных скобках рядом с вершинами – MIN длина пути в эту вершину.

Путь MIN длины ищется методом обратного хода.

У задачи о кратчайшем пути есть массу интерпретаций:

- календарное планир.,
- последовательность работ,
- собственно поиск кратчайшего пути
- и многие другие.



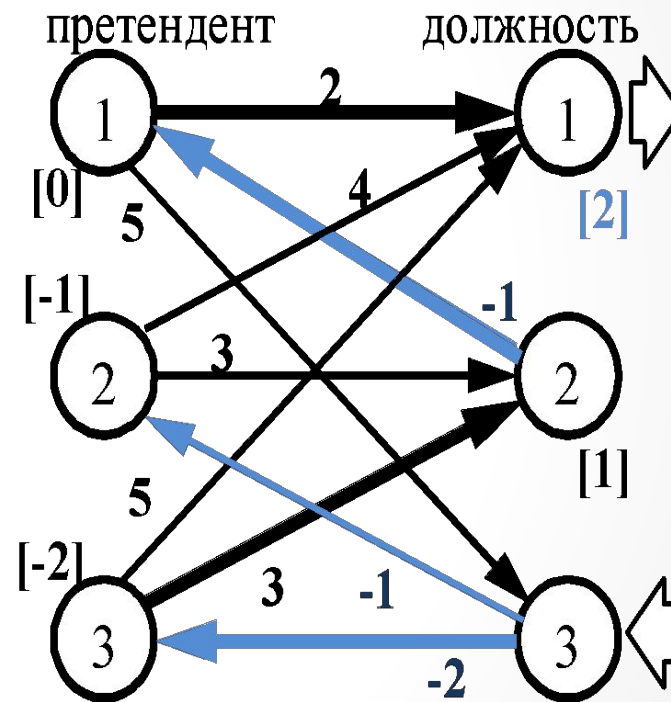
Теория графов и оптимизация (ЗАДАЧА О НАЗНАЧЕНИИ)

НАЙТИ ОПТИМАЛЬНОЕ НАЗНАЧЕНИЕ НА ДОЛЖНОСТИ

Должн. Прет.	1	2	3
1	2	<u>1</u>	5
2	4	3	<u>1</u>
3	5	3	<u>2</u>

В таблице – «зарплата», которую запрашивает претендент.

Эта задача может решаться с помощью алгоритма поиска кратчайшего пути, рассмотренного выше.



РЕШЕНИЕ: П1 – Д1 Min затр. – 4
 П2 – Д3 Возр. на 2
 П3 – Д2 Стало – 6

Двудольный граф

Теория графов и оптимизация (ЗАДАЧА О МАКСИМАЛЬНОМ ПОТОКЕ)

НАЙТИ ПОТОК МАХ ВЕЛИЧИНЫ

Алгоритм (теорема) Форда-Фалкерсона

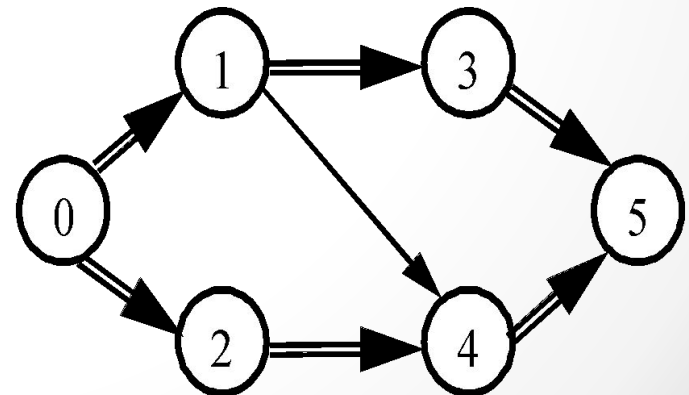
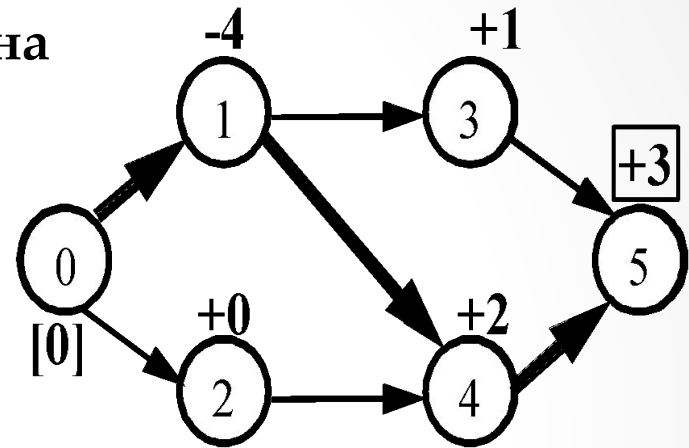
Пусть пропускные способности всех дуг равны 1.

Пропускаем произвольный поток.

Помечаем вершины, начиная с входа «0»

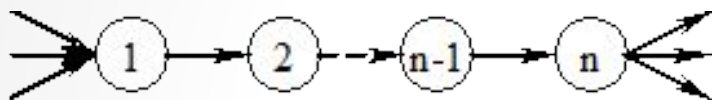
- если можно увеличить поток в к.-л. вершину, помечаем ее (поток увеличивается на 1).
- Если в помеченную вершину входит поток из непомеченной, его можно вычесть (уменьшить).

Если в конце помечена вершина-выход, поток м.б. увеличен, если нет – поток максимален.



(ЗАДАЧА О МАКСИМАЛЬНОМ ПОТОКЕ. ОПРЕДЕЛЕНИЯ)

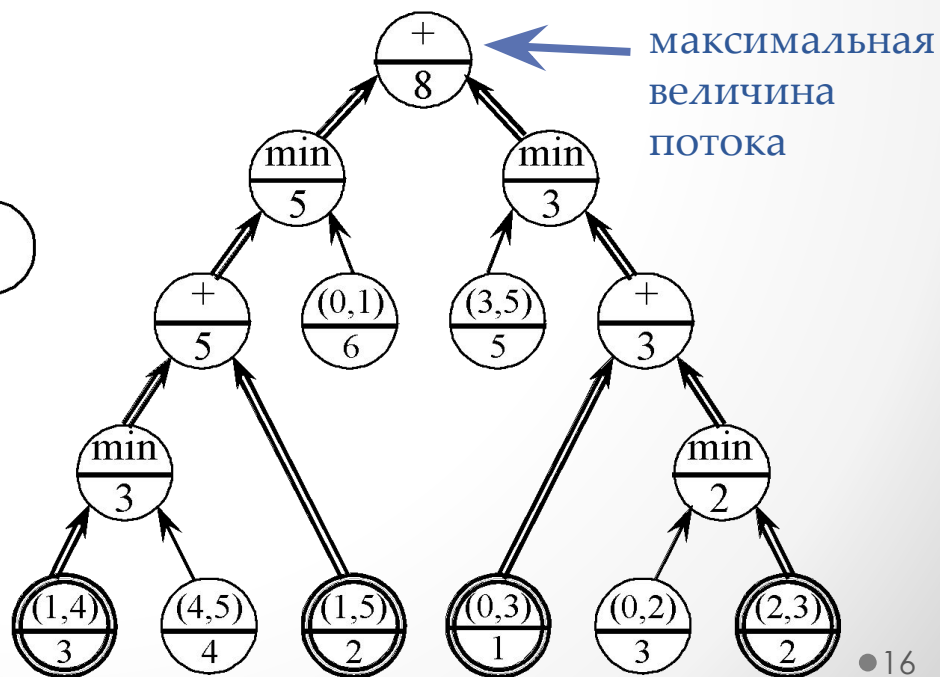
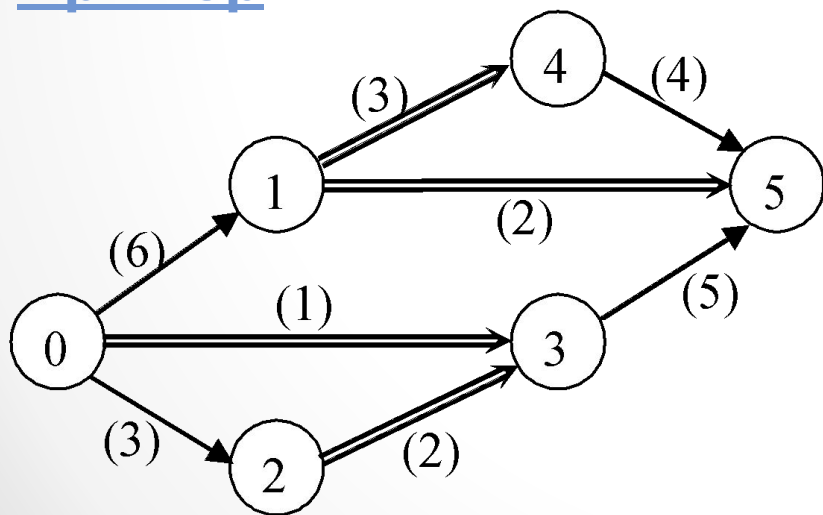
Последовательным множеством называется подмножество дуг графа, образующих путь такой, что любая вершина, кроме начальной, имеет степень захода 1, и любая вершина, кроме конечной имеет степень исхода 1.



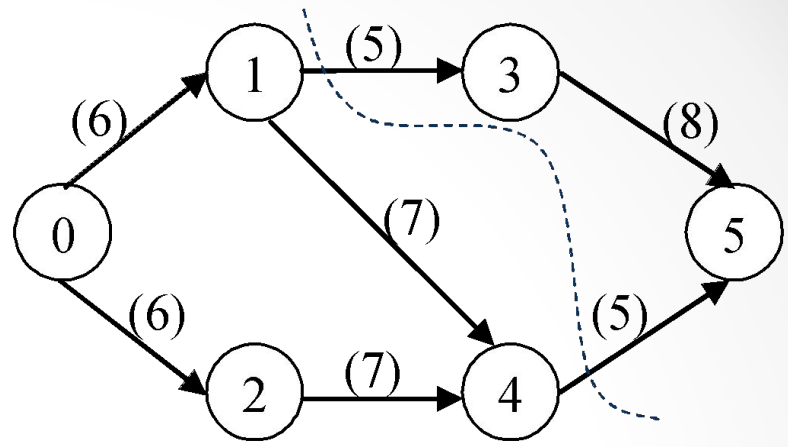
Параллельным множеством дуг называется подмножество дуг сети, у которых начальная и конечная вершины совпадают.

Сеть агрегируемая, если путем агрегирования последовательных и (или) параллельных множеств дуг ее можно свести к одной дуге.

Пример

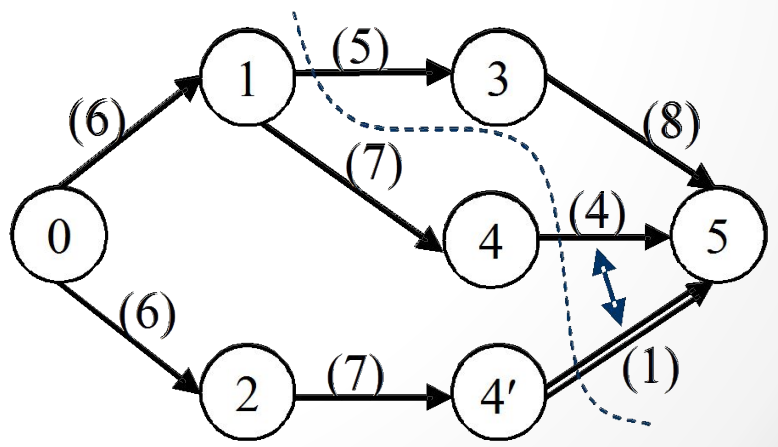


Теорема 1. Величина максимального потока в агрегируемой сети меньше или равна величине максимального потока в исходной сети. Доказательство следует из очевидного факта, что любому потоку в агрегируемой сети однозначно соответствует некоторый поток в исходной сети.



MAX поток = MIN разрез

Теорема 2 (двойственности). Существует разбиение пропускных способностей дуг, исходящих из разделенных вершин, такое что величина максимального потока в агрегируемой сети равна величине максимального потока в исходной сети (ОДЗ)

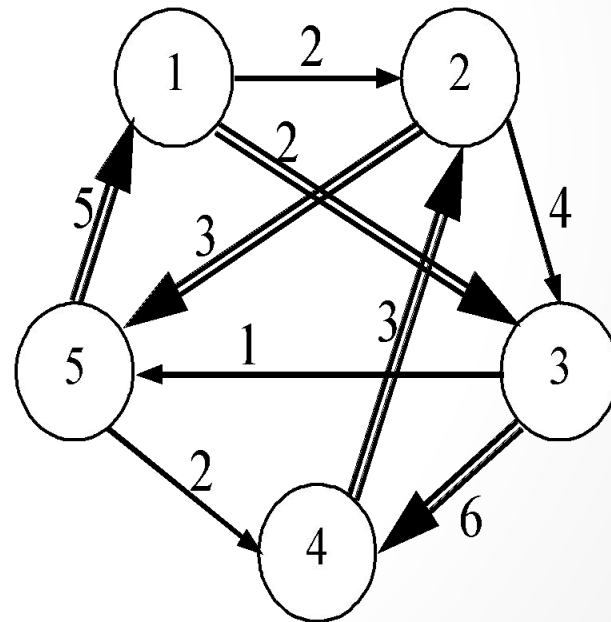


Теория графов и оптимизация (ЗАДАЧА КОММИВОЯЖЕРА)

Найти кратчайший путь, соединяющий все города с возвратом в исходный
или
Найти КОНТУР МИНИМАЛЬНОЙ ДЛИНЫ

Задача – NP-трудная. Для ее решения могут применяться:

- Эвристические методы (напр. Всегда идти в ближайший из не пройденных городов)
- Метод локальной оптимизации
- Метод ветвей и границ



Критерии принятия решений (МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ПОСТАНОВКИ)

Сценарии				
		B_2	$\dots B_j \dots$	B_m
A_1		U_{12}	\dots	U_{1m}
\dots		\dots	U_{ij} (полезность)	\dots
A_i		\dots	\dots	\dots
\dots		\dots	\dots	\dots
A_N		U_{N2}	\dots	U_{Nm}

1. Максимальный критерий Вальда
(наибольшей осторожности)

$$U^* = \max_i \min_j U_{ij}$$

2. Критерий минимаксного сожаления
(критерий Сэвиджа).

$$C_{ij} = \max_k U_{kj} - U_{ij} \quad \text{- сожаление}$$

$$U^* = \min_i \max_j C_{ij} \quad \text{- выбранная альтернатива}$$

3. Критерий максимакса (крайний оптимизм):

$$U^* = \max_i \max_j U_{ij}$$

4. Критерий Гурвица. Пусть для i -ой альтернативы $m_i = \min_j U_{ij}; M_i = \max_j U_{ij}$

$$U_i(\alpha) = \alpha m_i + (1 - \alpha) M_i, \quad 0 \leq \alpha \leq 1$$

При заданном α (степень оптимизма ЛПР) выбирается $U^* = \max_i U_i(\alpha)$.
При $\alpha = 1$ данный критерий переходит в критерий Вальда.

5. Критерий Лапласа. (Аналог вероятностной модели при равных вероятностях.)

Для каждой альтернативы A_i определяется показатель

$$U_{icp} = (1/m) \sum_{j=1}^m U_{ij}$$

Далее выбирается $U^* = \max_i U_{icp}$