

**Решение задач
оптимизации
управления**

**Оптимизация
производственных
моделей**

Структура производственных моделей

Чтобы создать математическую модель производственной фирмы, надо определить следующие параметры:

- константы нормативных затрат материалов, труда и финансов;
- переменные решения;
- целевую функцию;
- запас ресурсов или продукции;
- параметры спроса на продукцию.

Оптимизация модели производственного плана состоит в поиске максимума (для прибыли) или минимума (для затрат) целевой функции при ограничении на спрос и ресурсы.

При оптимизации раскроя листовых материалов возникают важные для технологов вопросы минимизации отходов.

При составлении смесей часто требуется выполнить ограничение сверху и снизу концентрации составляющих компонент.

Задача 1. Составление производственного плана

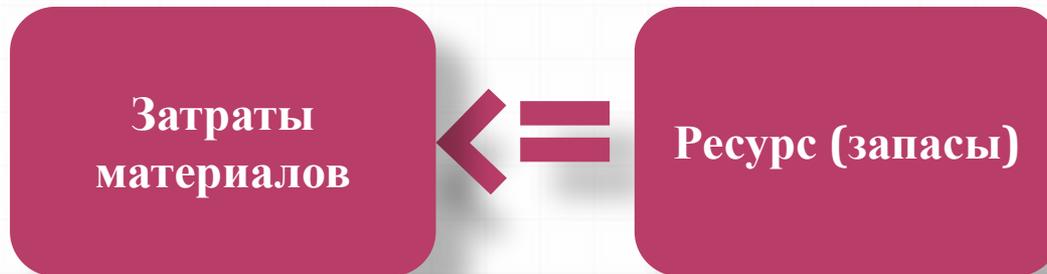
Материалы	Нормы расхода				Месячный запас материалов
	Сумка женская	Сумка мужская	Сумка дорожная	Сумка спортивная	
Кожа (м ²)	0,5				75
Кожзаменитель (м ²)		0,3	1,5	1,0	150
Подкладочная ткань (м ²)	0,6	0,4	1,7	1,5	300
Нитки (м)	20	10	30	25	8000
Фурнитура-молния (шт.)	4	5	3	6	1500
Фурнитура-пряжки (шт.)	2	2	2	2	800
Фурнитура разная (шт.)	2	2	4	6	1000

По информации, полученной при изучении рынка продаж, ежемесячный спрос на продукцию фабрики составляет

- 0 сумка женская - 150 шт. при оптовой цене 3000 руб.;
- 0 сумка мужская - 70 шт. при оптовой цене 700 руб.;
- 0 сумка дорожная - 50 шт. при оптовой цене 2000 руб.;
- 0 сумка спортивная - 30 шт. при оптовой цене 1200 руб.

Найти оптимальный план производства сумок каждого типа, обеспечивающий максимальную выручку при реализации продукции и обеспечивающий удовлетворение рыночного спроса.

Основная формула математической модели



Ментальная карта

Подставляя в общие выражения исходные численные значения задачи, получим выражение для целевой функции:

$$F(x) = \sum c_i * x_i = 3000x_1 + 700x_2 + 2000x_3 + 1200x_4 \Rightarrow \max$$

Выражение	Знак отношения	Ресурс	Примечание	
x_1	\geq	150	Выполнение договорных поставок	сумки женские
x_2	\geq	70		сумки мужские
x_3	\geq	50		сумки дорожные
x_4	\geq	30		сумки спортивные
x_1, x_2, x_3, x_4	Целые		Доли сумок не выпускаются	
$0,5x_1$	\leq	75	Ограничение на расход материалов	кожа
$0,3x_2 + 1,5x_3 + x_4$	\leq	150		кожзаменитель
$0,6x_1 + 0,4x_2 + 1,7x_3 + 1,5x_4$	\leq	300		подкладочная ткань
$20x_1 + 10x_2 + 30x_3 + 25x_4$	\leq	8000		нитки
$4x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 6x_4$	\leq	1500		фурнитура-молнии
$2x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4$	\leq	800		фурнитура-пряжки
$2x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 6x_4$	\leq	1000		фурнитура-разная

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	Материалы	Нормы расхода материалов				Расход материалов	Месячный запас материалов	Остатки на складе	Остатки на складе, %
2		Сумка женская	Сумка мужская	Сумка дорожная	Сумка спортивная				
3	Кожа (м ²)	0,5	0	0	0	=СУММПРОИЗВ(\$B\$12:\$E\$12;B3:E3)	75	=G3-F3	=H3/G3
4	Кожзаменитель (м ²)	0	0,3	1,5	1	=СУММПРОИЗВ(\$B\$12:\$E\$12;B4:E4)	150	=G4-F4	=H4/G4
5	Подкладочная ткань (м ²)	0,6	0,4	1,7	1,5	=СУММПРОИЗВ(\$B\$12:\$E\$12;B5:E5)	300	=G5-F5	=H5/G5
6	Нитки (м)	20	10	30	25	=СУММПРОИЗВ(\$B\$12:\$E\$12;B6:E6)	8000	=G6-F6	=H6/G6
7	Фурнитура-молния (шт.)	4	5	3	6	=СУММПРОИЗВ(\$B\$12:\$E\$12;B7:E7)	1500	=G7-F7	=H7/G7
8	Фурнитура-пряжки (шт.)	2	2	2	2	=СУММПРОИЗВ(\$B\$12:\$E\$12;B8:E8)	800	=G8-F8	=H8/G8
9	Фурнитура разная (шт.)	2	2	4	6	=СУММПРОИЗВ(\$B\$12:\$E\$12;B9:E9)	1000	=G9-F9	=H9/G9
10	Цена, руб.	3000	700	2000	1200	=СУММПРОИЗВ(\$B\$12:\$E\$12;B10:E10)			
11	Потребность, шт.	150	70	50	30				
12	Количество, шт.	0	0	0	0				

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	Материалы	Нормы расхода материалов				Расход материалов	Месячный запас материалов	Остатки на складе	Остатки на складе, %
2		Сумка женская	Сумка мужская	Сумка дорожная	Сумка спортивная				
3	Кожа (м ²)	0,5	0	0	0	0,00	75	75,00	100,00%
4	Кожзаменитель (м ²)	0	0,3	1,5	1	0,00	150	150,00	100,00%
5	Подкладочная ткань (м ²)	0,6	0,4	1,7	1,5	0,00	300	300,00	100,00%
6	Нитки (м)	20	10	30	25	0,00	8000	8000,00	100,00%
7	Фурнитура-молния (шт.)	4	5	3	6	0,00	1500	1500,00	100,00%
8	Фурнитура-пряжки (шт.)	2	2	2	2	0,00	800	800,00	100,00%
9	Фурнитура разная (шт.)	2	2	4	6	0,00	1000	1000,00	100,00%
10	Цена, руб.	3 000,00р.	700,00р.	2 000,00р.	1 200,00р.	0,00р.			
11	Потребность, шт.	150	70	50	30				
12	Количество, шт.	0	0	0	0				

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	
	Материалы	Нормы расхода				Расход материалов	Месячный запас материалов	Параметры поиска решения									
Сумма женская		Сумма мужская	Сумма дорожная	Сумма спортивная	Оптимизировать целевую функцию:			Диапазон:			Имена ячеек переменных:			В соответствии с ограничениями:			
3	Кожа (м ²)	0,5	0	0	0	0,50	75	<input type="text" value="SUM"/>	<input type="text" value=""/>			<input type="text" value=""/>			<input type="text" value=""/>		
4	Кожзаменитель (м ²)	0	0,3	1,5	1	2,80	150	Диапазон: <input type="text" value=""/>									
5	Подкладочная ткань (м ²)	0,6	0,4	1,7	1,5	4,20	300	Имена ячеек переменных: <input type="text" value="\$B\$12:\$E\$12"/>									
6	Нитки (м)	20	10	30	25	85,00	8000	В соответствии с ограничениями:									
7	Фурнитура-молния (шт.)	4	5	3	6	18,00	1500	<input type="text" value="\$B\$12:\$E\$12 = целое"/>									
8	Фурнитура-пряжки (шт.)	2	2	2	2	8,00	800	<input type="text" value="\$B\$12:\$E\$12 >= \$G\$11:\$G\$11"/>									
9	Фурнитура разная (шт.)	2	2	4	6	14,00	1000	<input type="text" value="\$F\$3:\$F\$9 <= \$G\$3:\$G\$9"/>									
10	Цена, руб.	3 000,00р.	700,00р.	2 000,00р.	1 200,00р.	6900,00		<input type="button" value="Добавить"/>									
11	Потребность, шт.	150	70	50	30			<input type="button" value="Изменить"/>									
12	Количество, шт.	1	1	1	1												

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	
	Материалы	Нормы расхода				Расход материалов	Месячный запас материалов	Результаты поиска решения								
Сумма женская		Сумма мужская	Сумма дорожная	Сумма спортивная	Целочисленное решение найдено в пределах допустимого отклонения. Все ограничения			Отчеты			Отчеты до					
3	Кожа (м ²)	0,5	0	0	0	75,00	75	<input checked="" type="radio"/> Сохранить найденное решение								
4	Кожзаменитель (м ²)	0	0,3	1,5	1	150,00	150	<input type="radio"/> Восстановить исходные значения								
5	Подкладочная ткань (м ²)	0,6	0,4	1,7	1,5	277,30	300	<input type="checkbox"/> Вернуться в диалоговое окно параметров								
6	Нитки (м)	20	10	30	25	6570,00	8000	<input type="checkbox"/> Отчеты до								
7	Фурнитура-молния (шт.)	4	5	3	6	1482,00	1500	<input type="button" value="OK"/>								
8	Фурнитура-пряжки (шт.)	2	2	2	2	688,00	800	<input type="button" value="Отмена"/>								
9	Фурнитура разная (шт.)	2	2	4	6	926,00	1000	<input type="button" value="Сохранить сценарий..."/>								
10	Цена, руб.	3 000,00р.	700,00р.	2 000,00р.	1 200,00р.	677500,00		Целочисленное решение найдено в пределах допустимого отклонения. Все ограничения выполнены.								
11	Потребность, шт.	150	70	50	30											
12	Количество, шт.	150	105	59	30											
13																
14																

1	A	B C D E				F	G
		Нормы расхода					
2	Материалы	Сумма женская	Сумма мужская	Сумма дорожная	Сумма спортивная	Расход материалов	Местный запас материалов
3	Кожа (м ²)	0,5	0	0	0	75,00	75
4	Кожзаменитель (м ²)	0	0,3	1,5	1	136,00	150
5	Подкладочная ткань (м ²)	0,6	0,4	1,7	1,5	248,00	300
6	Нитки (м)	20	30	30	25	5950,00	8000
7	Фурнитура-молния (шт.)	4	5	3	6	1280,00	1500
8	Фурнитура-пряжки (шт.)	2	2	2	2	600,00	800
9	Фурнитура разная (шт.)	2	2	4	6	820,00	1000
10	Цена, руб.	3 000,00р.	700,00р.	2 000,00р.	1 200,00р.	635000,00	
11	Потребность, шт.	150	70	50	30		
12	Количество, шт.	150	70	50	30		

Параметры поиска решения

Оптимизировать целевую функцию:

До: Максимум Минимум Значение:

Изменяемые переменные:

В соответствии с ограничениями:

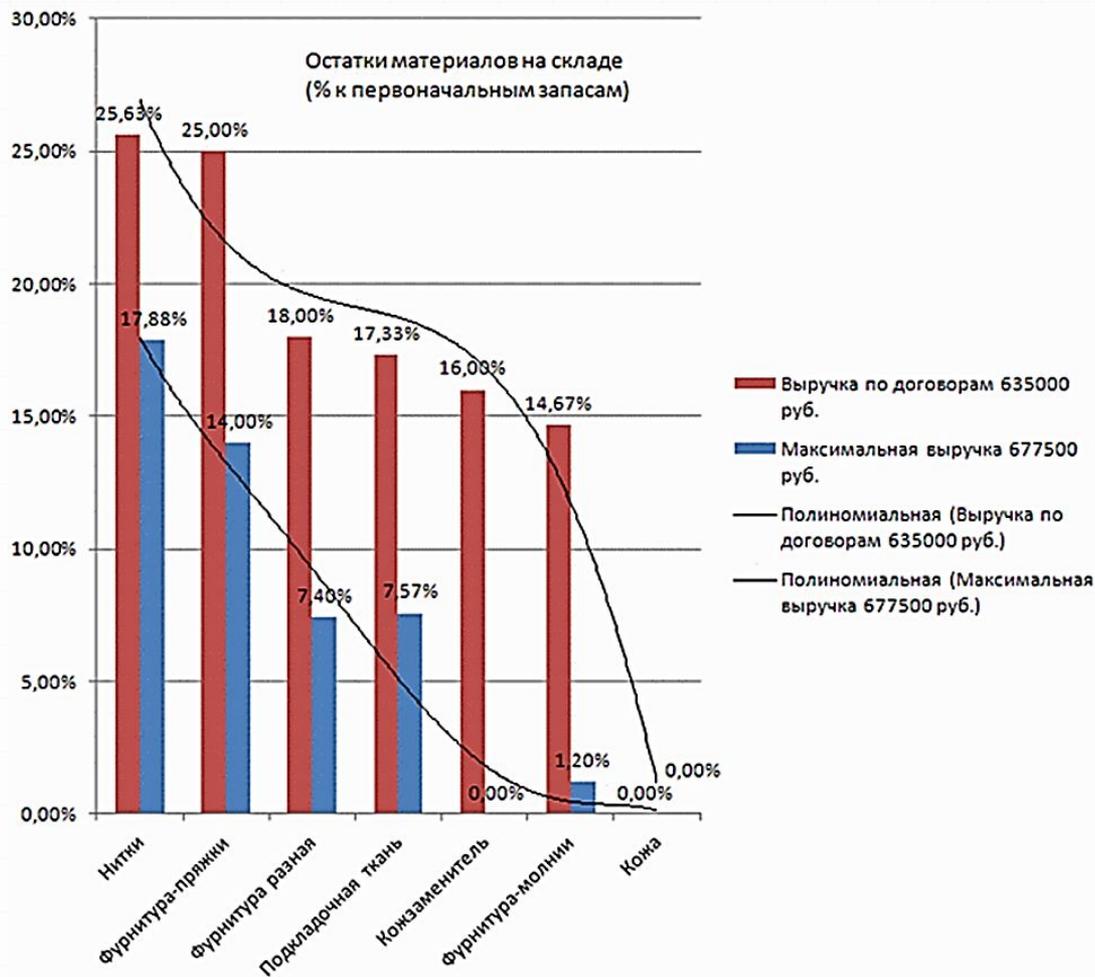
Полученное решение оптимально — оно отвечает максимуму целевой функции и удовлетворяет заданным ограничениям. Сохраним второй сценарий под именем "Сумки_2".

По команде на ленте "Данные" — Анализ "что если" — Диспетчер сценариев — Отчет получим отчет по сценариям.

		1																																																																							
		2																																																																							
1	2		A	B	C	D	E	F	G																																																																
	1	<table border="1"> <thead> <tr> <th colspan="4">Структура сценария</th> </tr> <tr> <th colspan="2">Текущие значения:</th> <th>Сумки_1</th> <th>Сумки_2</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td colspan="4">Изменяемые:</td> </tr> <tr> <td>\$B\$12</td> <td>Сумки женские</td> <td>150</td> <td>150</td> </tr> <tr> <td>\$C\$12</td> <td>Сумки мужские</td> <td>105</td> <td>70</td> </tr> <tr> <td>\$D\$12</td> <td>Сумки дорожные</td> <td>59</td> <td>50</td> </tr> <tr> <td>\$E\$12</td> <td>Сумки спортивные</td> <td>30</td> <td>30</td> </tr> <tr> <td colspan="4">Результат:</td> </tr> <tr> <td></td> <td>Выручка</td> <td>677500</td> <td>635000</td> </tr> <tr> <td>\$I\$3</td> <td>Нитки</td> <td>17,88%</td> <td>25,63%</td> </tr> <tr> <td>\$I\$4</td> <td>Фурнитура-пряжки</td> <td>14,00%</td> <td>25,00%</td> </tr> <tr> <td>\$I\$5</td> <td>Фурнитура разная</td> <td>7,40%</td> <td>18,00%</td> </tr> <tr> <td>\$I\$6</td> <td>Подкладочная ткань</td> <td>7,57%</td> <td>17,33%</td> </tr> <tr> <td>\$I\$7</td> <td>Кожзаменитель</td> <td>0,00%</td> <td>16,00%</td> </tr> <tr> <td>\$I\$8</td> <td>Фурнитура-молнии</td> <td>1,20%</td> <td>14,67%</td> </tr> <tr> <td>\$I\$9</td> <td>Кожа</td> <td>0,00%</td> <td>0,00%</td> </tr> </tbody> </table>								Структура сценария				Текущие значения:		Сумки_1	Сумки_2	Изменяемые:				\$B\$12	Сумки женские	150	150	\$C\$12	Сумки мужские	105	70	\$D\$12	Сумки дорожные	59	50	\$E\$12	Сумки спортивные	30	30	Результат:					Выручка	677500	635000	\$I\$3	Нитки	17,88%	25,63%	\$I\$4	Фурнитура-пряжки	14,00%	25,00%	\$I\$5	Фурнитура разная	7,40%	18,00%	\$I\$6	Подкладочная ткань	7,57%	17,33%	\$I\$7	Кожзаменитель	0,00%	16,00%	\$I\$8	Фурнитура-молнии	1,20%	14,67%	\$I\$9	Кожа	0,00%	0,00%
Структура сценария																																																																									
Текущие значения:										Сумки_1	Сумки_2																																																														
Изменяемые:																																																																									
\$B\$12	Сумки женские									150	150																																																														
\$C\$12	Сумки мужские									105	70																																																														
\$D\$12	Сумки дорожные									59	50																																																														
\$E\$12	Сумки спортивные									30	30																																																														
Результат:																																																																									
	Выручка									677500	635000																																																														
\$I\$3	Нитки									17,88%	25,63%																																																														
\$I\$4	Фурнитура-пряжки									14,00%	25,00%																																																														
\$I\$5	Фурнитура разная									7,40%	18,00%																																																														
\$I\$6	Подкладочная ткань									7,57%	17,33%																																																														
\$I\$7	Кожзаменитель									0,00%	16,00%																																																														
\$I\$8	Фурнитура-молнии									1,20%	14,67%																																																														
\$I\$9	Кожа									0,00%	0,00%																																																														
	2																																																																								
	3																																																																								
	5																																																																								
	6																																																																								
	7																																																																								
	8																																																																								
	9																																																																								
	10																																																																								
	11																																																																								
	12																																																																								
	13																																																																								
	14																																																																								
	15																																																																								
	16																																																																								
	17																																																																								
	18																																																																								

Для построения гистограмм остатков на складе проведем сортировку данных по убыванию и построим гистограммы по команде **Вставка —**

Гистограмма



Задача 2. Раскрой листовых материалов

Механическому цеху требуется из куска листового металла выкроить развертку для изготовления короба.

Короб можно изготовить так: сделать по углам квадратные вырезы, отогнуть боковины и соединить боковые швы сваркой.

Можно ли из имеющихся в цехе стандартных листов размером 1,0 м х 2,0 м изготовить коробы объемом 200 л?

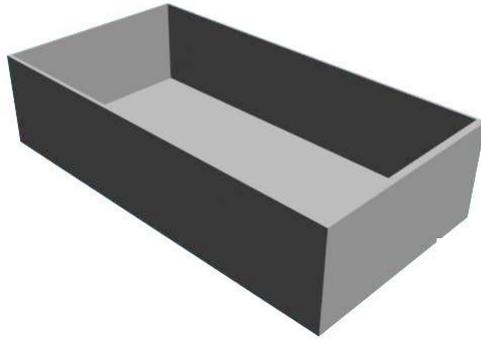
Составить математическую модель.

Формализовать задачу в MS Excel для других размеров листов при условии максимальной вместимости короба.

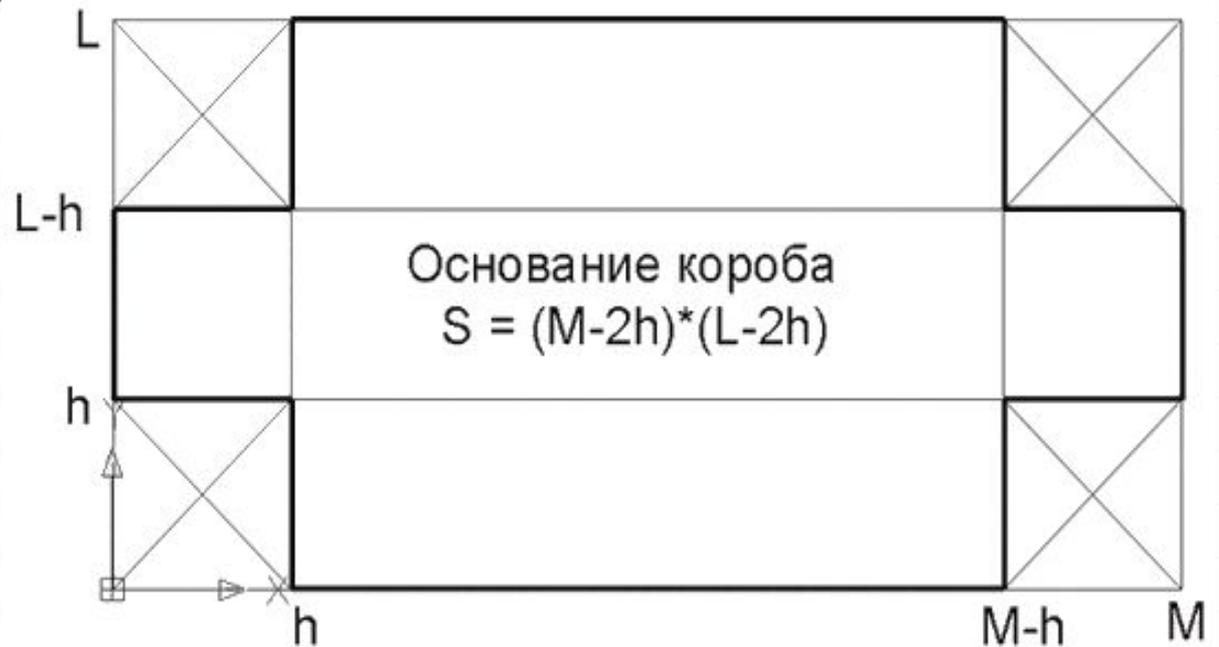
Поставщики выпускают стальной лист следующего сортамента (м): 1х2, 1х3, 2х2, 2х2,5, 2х3.

Построить графики зависимости максимальной вместимости (куб. м) и остатков материала (кв. м) от площади квадратных листов (кв. м).

Решение задачи



1. Составим ментальной карту в виде выкройки и эскиза готовой конструкции



2. Составим математическую модель в виде формулы для объема короба.

Площадь листа:

$$S = M * L$$

Объем короба равен произведению площади основания на высоту:

$$V = (L - 2h) * (M - 2h) * h$$

Остатки материала:

$$Q = 4h^2$$

3. Сформируем таблицу в MS Excel

	A	B	C	D
1	Задача 2.2			
2	Длина листа, м		M = 2,00	
3	Ширина листа, м		L = 1,00	
4	Площадь листа, кв. м		S = 2,00	=D2*D3
5	Длина основания короба		m = 1,80	=D2-2*D8
6	Ширина основания короба		l = 0,80	=D3-2*D8
7	Площадь основания короба		S = 1,44	=D5*D6
8	Высота короба, м		h = 0,10	
9	Объем короба, куб. м		V = 0,14	=D7*D8
10	Остаток материала, кв. м		Q = 0,04	=4*D8^2

4. В параметрах поиска решения устанавливаем требуемое значение целевой функции **$V=0,2$ куб.м.**

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1	Задача 2.2										
2	Длина листа, м			M = 2,00							
3	Ширина листа, м			L = 1,00							
4	Площадь листа, кв. м			S = 2,00							
5	Длина основания короба			m = 1,58							
6	Ширина основания короба			l = 0,58							
7	Площадь основания короба			S = 0,91							
8	Высота короба, м			h = 0,21							
9	Объем короба, куб. м			V = 0,19							
10	Остаток материала, кв. м			Q = 0,18							

Параметры поиска решения

Оптимизировать целевую функцию:

До: Максимум Минимум Значения:

Изменяя ячейки переменных:

В соответствии с ограничениями:

Сделать переменные без ограничений неотрицательными

Выберите метод решения: Поиск решения нелинейных задач методом ОПГ

Результаты поиска решения

В ходе поиска не удалось найти допустимого решения.

Сохранить найденное решение
 Восстановить исходные значения

Вернуться в диалоговое окно параметров Отчеты со

Отчеты
Допустимость
Границы допустимости

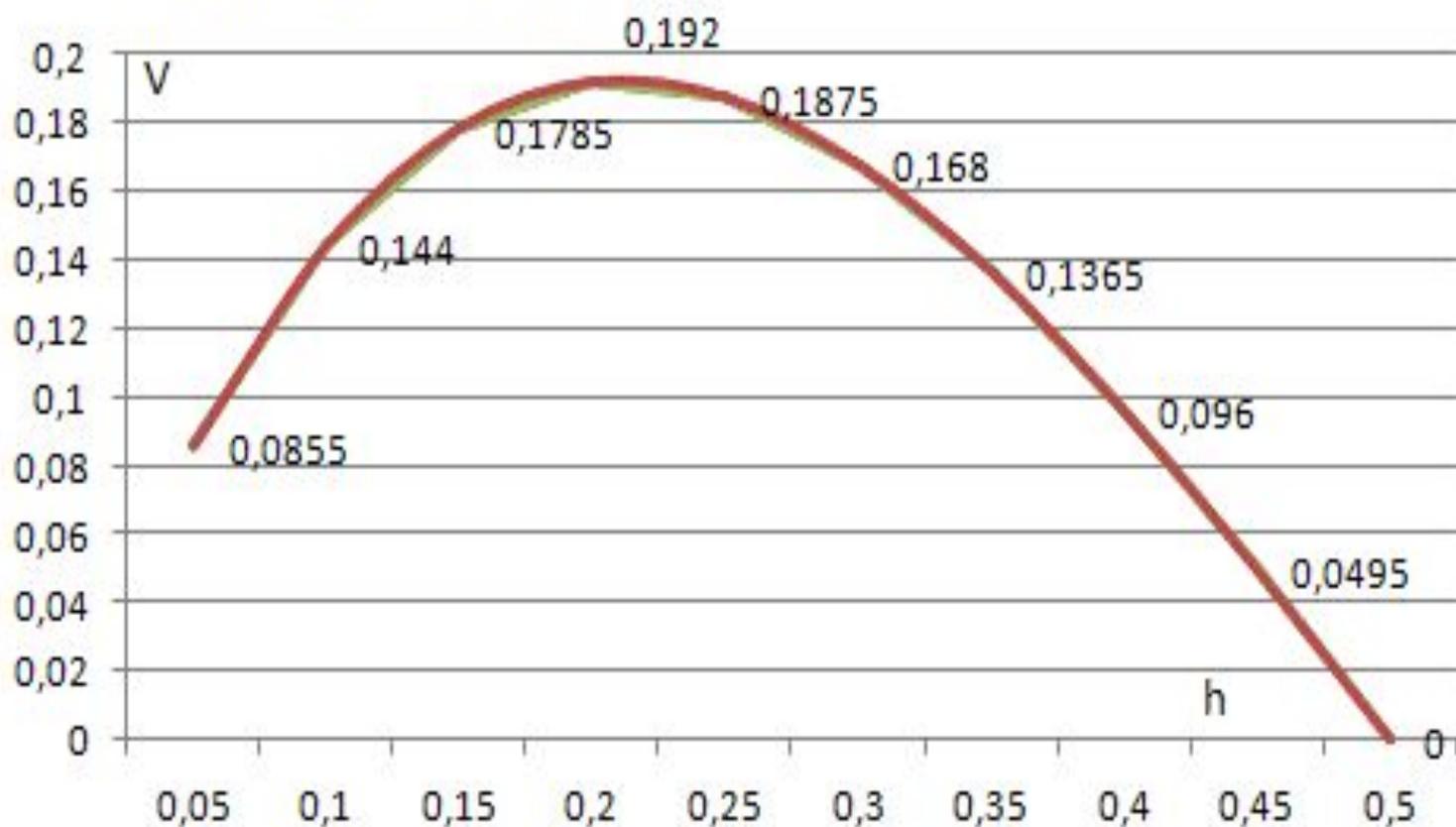
ОК Отмена Сохранить сценарий...

В ходе поиска не удалось найти допустимого решения.

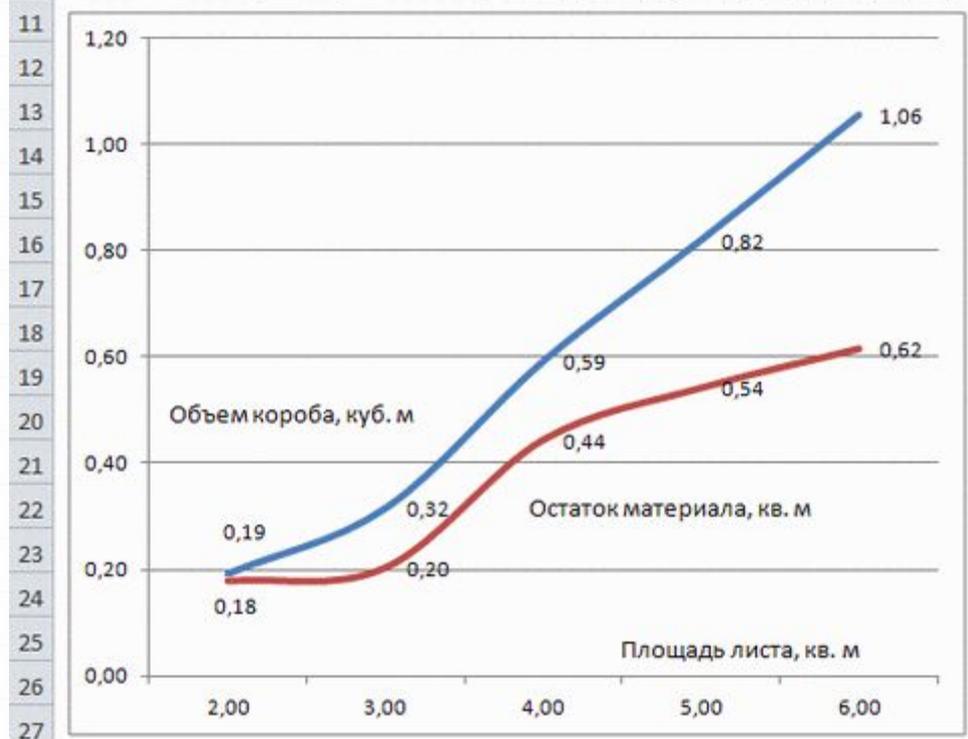
! В ходе поиска решения не удается найти точку, для которой выполняются все ограничения.

$$V = 4h^3 - 2h^2(M + L) + (M + L)h$$

Зависимость объема короба V
от его высоты h для листа 1×2



	A	B	C	D	E	F	G
1	Задача 2.2						
2	Длина листа, м	M =	2,00	3,00	2,00	2,50	3,00
3	Ширина листа, м	L =	1,00	1,00	2,00	2,00	2,00
4	Площадь листа, кв. м	S =	2,00	3,00	4,00	5,00	6,00
5	Длина основания короба	m =	1,58	2,55	1,33	1,76	2,22
6	Ширина основания короба	l =	0,58	0,55	1,33	1,26	1,22
7	Площадь основания короба	S =	0,91	1,40	1,78	2,23	2,69
8	Высота короба, м	h =	0,21	0,23	0,33	0,37	0,39
9	Объем короба, куб. м	V =	0,19	0,32	0,59	0,82	1,06
10	Остаток материала, кв. м	Q =	0,18	0,20	0,44	0,54	0,62



Задача 3. Учет стоимости материалов

Трикотажная фабрика использует для производства свитеров и кофточек чистую шерсть, силон и нитрон, запасы которых составляют, соответственно, 800, 400 и 300 кг. Составить план производства изделий, обеспечивающий получение максимального дохода (разницы между выручкой и затратами на сырье)

Вид сырья	Затраты пряжи на 1 шт.		Цена сырья, руб./кг
	свитер	кофточка	
Шерсть	0,4	0,2	300
Силон	0,2	0,1	200
Нитрон	0,1	0,1	150
Цена, руб./шт.	600	500	



D7 fx =СУММПРОИЗВ(B7:C7;B6:C6)						
	A	B	C	D	E	F
1	Вид сырья	Затраты пряжи на 1 шт.		Цена сырья, руб./кг	Расход сырья, кг	Запас сырья
2		свитер	кофточка			
3	Шерсть, кг	0,4	0,2	300	0,6	800
4	Силон, кг	0,2	0,1	200	0,3	400
5	Нитрон, кг	0,1	0,1	150	0,2	300
6	Цена, руб.	600,00р.	500,00р.	Выручка:	Стоимость сырья:	Доход:
7	Планируемое количество	1	1	1 100,00р.	270,00р.	830,00р.

В целевую ячейку "Доход" вставлена формула $F7=D7-E7$. В параметрах "Поиска решения" мы указываем только, что расход материалов не может превышать их запаса:

Добавление ограничения ✖

Ссылка на ячейки: <= v =

Оптимальное решение задачи: при выпуске 1000 свитеров и 2000 кофточек доход составит 1 235 000 руб. Затраты на сырье составят 365 000 руб.:

	A	B	C	D	E	F
1	Вид сырья	Затраты пряжи на 1 шт.		Цена сырья, руб./кг	Расход сырья, кг	Запас сырья, кг
2		свитер	кофточка			
3	Шерсть, кг	0,4	0,2	300	800	800
4	Силон, кг	0,2	0,1	200	400	400
5	Нитрон, кг	0,1	0,1	150	300	300
6	Цена, руб.	600,00р.	500,00р.	Выручка:	Стоимость сырья:	Доход:
7	Планируемое количество	1000	2000	1 600 000,00р.	365 000,00р.	1 235 000,00р

Параметры поиска решения

Оптимизировать целевую функцию:

До: Максимум Минимум Значения:

Изменяя ячейки переменных:

В соответствии с ограничениями:

Сделать переменные без ограничений неотрицательными

Добавить

Изменить

Задача 4. Формирование портфеля инвестиций

Инвестор принимает решение о вложении капитала в 1 млн. руб. Выбраны акции трех предприятий А, В и С. При принятии решения требуется учесть следующие условия:

- 0 Доля наиболее надежных акций должна быть не менее трети суммарного объема капитала.
- 0 Доля акций с наивысшим доходом должна быть не менее суммы, вложенной в остальные акции.
- 0 Доля, приходящаяся на каждый тип акций, не может быть менее 1 тысячи рублей. Данные по дивидендам (в %) и по надежности (в баллах) приведены в таблице.

Наименование	Дивиденды по акциям (%)	Надежность акций (баллы)
A	10	2
B	6	5
C	6,5	3

	A	B	C	D
1	Задача 2.4			
2	Наименование	Дивиденды по акциям (%)	Надежность акций (баллы)	Сумма вложений в акции
3	A	0,1	2	1
4	B	0,06	5	1
5	C	0,065	3	1
6	Доход	=СУММПРОИЗВ(D3:D5;B3:B5)		=СУММ(D3:D5)

	A	B	C	D
1	Задача 2.4			
2	Наименование	Дивиденды по акциям (%)	Надежность акций (баллы)	Сумма вложений в акции
3	A	10,00%	2	665 666,67р.
4	B	6,00%	5	333 333,33р.
5	C	6,50%	3	1 000,00р.
6	Доход	86 631,67р.		1 000 000,00р.

Параметры поиска решения ✖

Оптимизировать целевую функцию: 

До: Максимум Минимум Значения:

Изменяя ячейки переменных:



В соответствии с ограничениями:

Сделать переменные без ограничений неотрицательными

Выберите метод решения: