Решение задач С3

Системы неравенств, решаемых стандартными методами

Что нужно знать для решения?

- Метод интервалов. Нанесение точек смены знака на одну прямую
- Методы и правила решения квадратических и кубических неравенств
- Методы и правила решения логарифмических неравенств
- Методы и правила решения неравенств с модулем
- Методы и правила решения неравенств, содержащих выражение под корнем
- Методы и правила решения неравенств, содержащих дроби
- Метод замены переменных

Критерии оценки решения

- Обоснованно получен верный ответ – 3 балла
- Обоснованно получен верный ответ в обоих неравенствах исходной системы – 2 балла
- Обоснованно получен верный ответ в одном из неравенств исходной системы – 1 балл
- Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше – 0 баллов

В 2010 году процент приступивших к выполнению задания С3 составил 32,4%, в 2011 году – 43,4%, в 2012 году – 37,8%. При этом в 2010 году от 1 до 3 баллов за задачу С3 смогли получить только 11,8% участников экзамена, в 2011 – 19,5% , а в 2012 году – 11,5%. Верно решили задачу С3 лишь 1,5% участников экзамена в 2010 году, 3,7% – в 2011 и 2,4% – в 2012 году.

Этапы Решения задачи

1. Выбор одного неравенства
2. Определение его ОДЗ
3. Решение этого неравенства
4. Определение промежутков методом интервалов
5. Ограничение промежутков ОДЗ
6. Аналогичное решение второго неравенства
7. Нанесение обоих решений на одну числовую прямую
8. Запись ответа

Сравнение числовых выражений

При решении различных неравенств и их систем на этапе получения ответа, в частности нанесения их решений на одну числовую прямую, приходится сравнивать числовые значения, соответствующие концам промежутков, из которых состоят соответствующие множества решений. Довольно часто подобное сравнение является не очевидным и представляет ключевой этап решения задачи. На помощь приходит использование свойств числовых неравенств (к обеим частям можно прибавлять одно и то же число; можно умножать обе части неравенства на положительное число и т.д.), а также некоторые специальные приемы.

Методы сравнения числовых выражений

При сравнении числовых выражений A и B используют следующие общие методы.

- ***Метод сравнения с нулем разности выражений***

Если $A - B > 0$, то $A > B$;

Если $A - B = 0$, то $A = B$;

Если $A - B < 0$, то $A < B$.

Пример 1. *Сравнить числа* $\frac{1}{\sqrt{6}} - 1$ *и* $-\frac{4}{5}$

- ***Метод сравнения с единицей отношения выражений***

Если $\frac{A}{B} > 1$, то $A > B$;

если $\frac{A}{B} = 1$, то $A = B$;

если $\frac{A}{B} < 1$, то $A < B$.

Пример 2. *Сравнить числа* $\frac{2^{2012}+1}{2^{2013}+1}$ *и* $\frac{2^{2013}+1}{2^{2014}+1}$

Методы сравнения числовых выражений

- ***Метод разделения выражений***

Если удается показать, что одно из сравниваемых выражений A больше некоторого числа (или выражения) C, а второе B наоборот меньше него, то первое выражение будет больше второго

$$A > C > B \rightarrow A > B$$

Пример 3. *Сравнить числа*

$$\log_2 5 \text{ и } \log_3 6$$

- ***Метод использования свойств функций***

В этом случае для сравнения выражений используют монотонность или выпуклость функций на промежутках.

Пример 4. *Сравнить числа*

$$e^{\pi} \text{ и } \pi^{e}$$

Разминка

- **Пример 5.** *Сравнить числа*:

$$\sqrt{15} \qquad и \qquad 2\log_{12} 145$$

Пример 6. *Сравнить числа*:

$$\log_2 11 \qquad и \qquad 2 + \sqrt{3}$$

На дом 1. *Сравнить числа*:

$$\log_2 11 \qquad и \qquad 2 + \sqrt{2}$$

Маленькая хитрость или Метод рассматривания промежутков

Порой бывает гораздо удобнее разбить ось оX на несколько промежутков по каким-либо критериям и решать данное неравенство на каждом из них отдельно, соединив все решения после.

Как правило, эти промежутки определяются с помощью области определения либо свойств функции.

Маленькая хитрость

- **Пример 1.** *Решить неравенство*

$$2^{|x|} + 2^x \geq 2\sqrt{2}$$

Пример 2. *Решить неравенство*

$$log_2(x^2-4) - 3\,log_2\frac{x+2}{x-2} > 2$$

На Дом 2. *Решить неравенство*

$$|x-1| + |x-2| > 3 + x$$

Большая хитрость

В задании всегда дана система. Система означает, что нас интересуют только такие x, которые являются решением для обоих неравенств. То есть, если какой-то промежуток не является решением для одного из них, то это промежуток нас уже не интересует и для второго. Таким образом, можно значительно облегчить решение более сложного неравенства, решив сначала более простое.

- **Пример 3.** *Решить систему*

$$\begin{cases} \dfrac{36-9^x}{9-3^x} \geq 4 \\ \log_{x^2}(2-x) \leq 1 \end{cases}$$

На дом 3. *Решить систему*

$$\begin{cases} \log_{x+5}(6-x)\log_{4-x}(x+3) \geq 0 \\ |2x-6|^{x+1} + |2x-6|^{-x-1} \leq 2 \end{cases}$$

Практика

Главное, что нужно для успешного решения С3 –набивание руки.

Системы показательных неравенств

Пример 1:

$$\begin{cases} 8^{3-4x} \times 0.125 < \left(\dfrac{32}{\sqrt{2}}\right)^{2-4x} \\ 9^{x^2-x} + 12 \times 3^{x^2} - 5 \times 3^{2x+2} \le 0 \end{cases}$$

Системы логарифмических неравенств

- **Пример 3:**

$$\begin{cases} \log_{x^2+\frac{1}{4}}\left(\frac{x^2}{2}+\frac{x}{4}+\frac{1}{2}\right) \geq 1 \\ x^2-3x-2>0 \end{cases}$$

На дом 4:

$$\begin{cases} \log_{4-x}\frac{x+6}{(x-4)^6} \geq -6 \\ x^3+9x^2+\frac{40x^2+2x-10}{x-5} \leq 2 \end{cases}$$

Системы неравенств с модулем

- **Пример 3:**

$$\begin{cases} \dfrac{1}{|x-1|-1} \geq \dfrac{2}{|x+1|-2} \\ \dfrac{3|x|-11}{x-3} \geq \dfrac{3x+14}{6-x} \end{cases}$$

На дом 5:

$$\begin{cases} |3x+2|+|2x-3| \leq 11 \\ \dfrac{7}{x^2-5x+6}+\dfrac{9}{x-3}+1<0 \end{cases}$$

Системы смешанных неравенств

Пример 4: $\begin{cases} \sqrt{x+2} + \log_5(x+3) \geq 0 \\ 9^{x+1} - 28 \times 3^x + 3 \geq 0 \end{cases}$

Пример 5: $\begin{cases} 25^x + 3 \times 10^x - 4 \times 4^x > 0 \\ \log_{1-\frac{x^2}{37}}(x^2 - 12|x| + 37) - \\ \log_{1+\frac{x^2}{37}}(x^2 - 12|x| + 37) \geq 0 \end{cases}$

Системы смешанных неравенств

На дом 6: $$\begin{cases} 3^{(x+2)^2} + \frac{1}{27} \le 3^{x^2-3} + 9^{2x+2} \\ |x-1| \ge \frac{4|1-x|}{4-|x|} \end{cases}$$

На дом 7: $$\begin{cases} 4^x \le 9 \times 2^x + 22 \\ \log_3(x^3 - x - 2) \le 1 + \log_3 \frac{x+1}{x-2} \end{cases}$$

Нарешивайте задания. Делайте опоры и СЗ не будет доставлять проблем!

Конец.

Ответы

- Большая хитрость:

Пример 3: $\boldsymbol{x\epsilon}(-\infty; -\mathbf{2}] \cup (-\mathbf{1}; \mathbf{0}) \cup (\mathbf{0}; \mathbf{1}) \cup (\mathbf{1}; \mathbf{2})$

На дом 3: $\boldsymbol{x\epsilon}[-\mathbf{1}; \mathbf{2,5}]$

- Системы показательных неравенств

Пример 1: $\boldsymbol{x\epsilon}\left[\mathbf{1} - \sqrt{\mathbf{2}}; \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\right)$

- Системы логарифмических неравенств

Пример 2: $\boldsymbol{x\epsilon}\left(-\frac{\sqrt{\mathbf{3}}}{\mathbf{2}}; \frac{\mathbf{3}-\sqrt{\mathbf{17}}}{\mathbf{2}}\right)$

На дом 4: $\boldsymbol{x\epsilon}\{-\mathbf{5}\} \cup \{\mathbf{0}\} \cup [\mathbf{1}; \mathbf{3})$

- Модуль

Пример 3: $\boldsymbol{x\epsilon}\{\mathbf{1}\} \cup (\mathbf{0}; \mathbf{1})$

На дом 5: $\boldsymbol{x\epsilon}(-\mathbf{5}; \mathbf{2}] \cup \left[-\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}}; \mathbf{1}\right)$

- Системы смешанных неравенств

Пример 4: $\boldsymbol{x\epsilon}\{-\mathbf{2}\} \cup [\mathbf{1}; +\infty)$

Пример 5: **x=6**

На дом 6: $\boldsymbol{x\epsilon}(-\infty; -\mathbf{4}) \cup \{\mathbf{0}\}$

На дом 7: $\boldsymbol{x\epsilon}(\mathbf{2}; \boldsymbol{log_2}\,\mathbf{11}]$