Решение квадратных уравнений различными способами

Автор работы:
Сергеева Полина, ученица 8 «А» класса
МБОУ «Лицей г. Абдулино»
Руководитель:
Ягодкина З.Г., учитель математики

Приобретать знания – храбрость,

Приумножать их – мудрость,

А умело применять – великое искусство.

Цель работы:

- Познакомиться с новыми способами решения квадратных уравнений и формировать умение выбора рационального способа решения.

Задачи:

- Изучить литературу по проблеме.
- Расширить и углубить знания по математике, познакомившись со способами решения квадратных уравнений.
- Изучить различные способы решения.
- Распространение различных способов.

Гипотеза:

- Предполагаю, что освоение новых методов решения квадратных уравнений позволит выбирать самый рациональный для их решения.

Методы исследования:

- Изучение программного материала по учебникам А.Г. Мордковича, Н.В.Алимова, Ю.Н. Макарычева
- Изучение дополнительного материала по энциклопедиям
- Изучение исторического материала по сайтам Интернета
- Работа в программах Microsoft Word, Excel, PowerPoint, Publisher

Проблема: изучение и освоение различных способов решения квадратных уравнений, способствующих развитию умственных способностей и математического кругозора ученика.

Объект исследования: раздел математики «Уравнения».

Предмет исследования: квадратные уравнения.

Из истории квадратных уравнений:

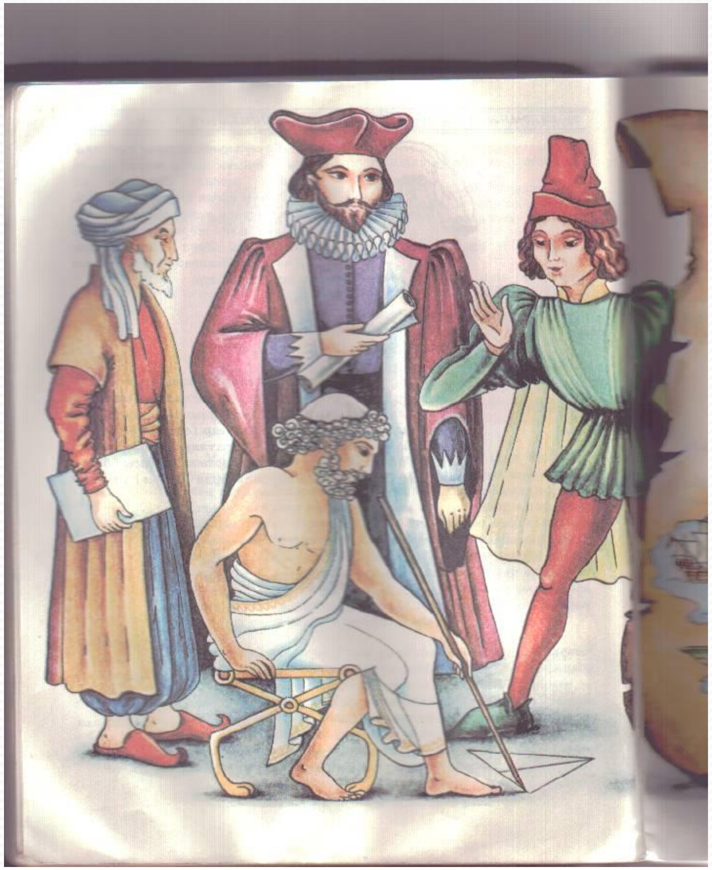
- Необходимость решать такие уравнения еще в древности была вызвана потребностью решать задачи, связанные с нахождением площадей земли, а также с развитием астрономии и математики

- Впервые квадратное уравнение сумели решить математики Древнего Египта, сводя их решение к геометрическим построениям

- Приемы решения уравнений без обращения к геометрии дает Диофант Александрийский.

- Индийский ученый, Брахмагупта(VII в.), изложил общее правило решения квадратных уравнений, приведенных к единой форме:

$$ax^2+вx=c,\ a>o.$$

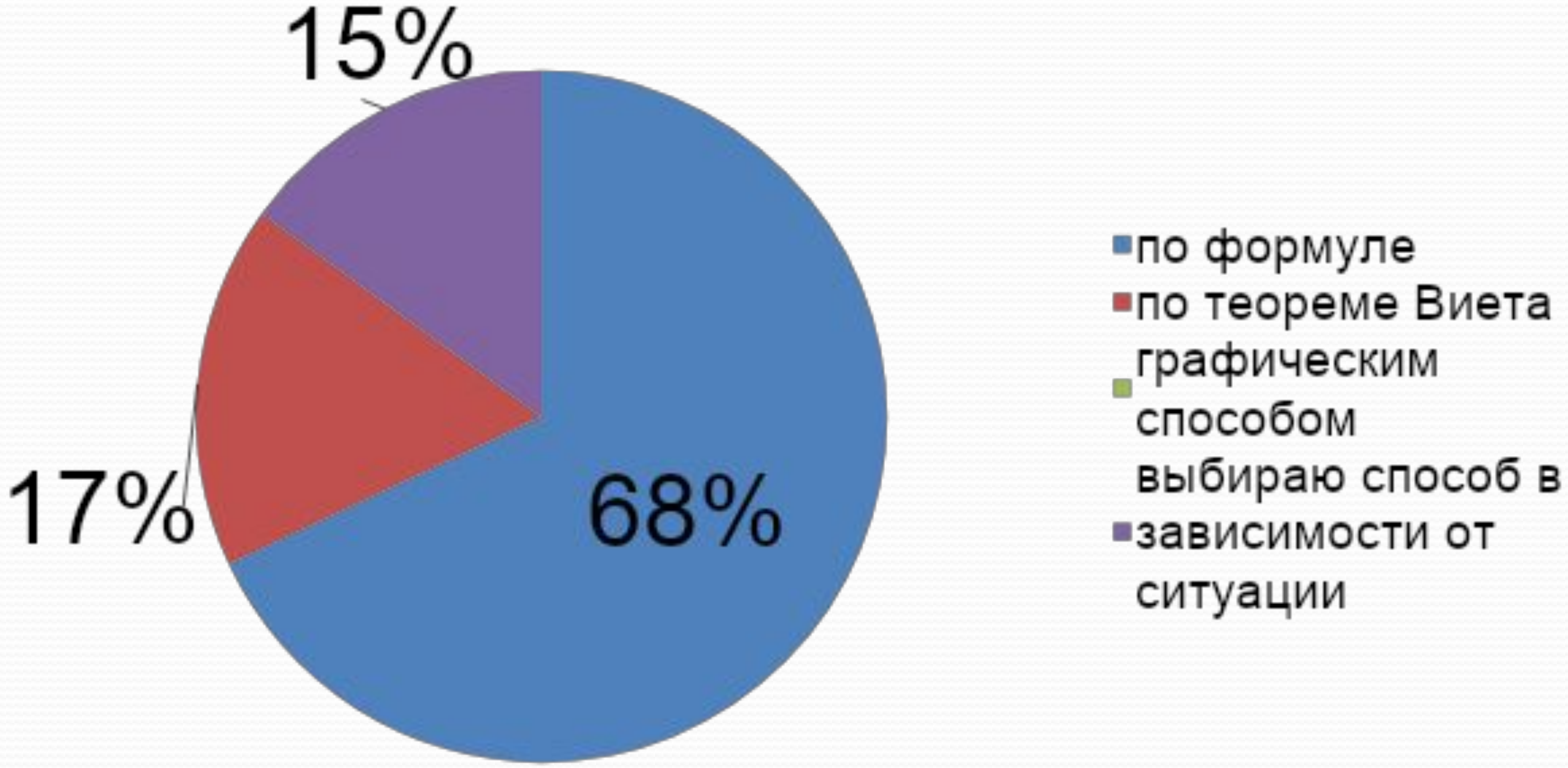


- После трудов нидерландского математика А. Жирара (1595 - 1632), а также Декарта и Ньютона способ решения квадратных уравнений принял современный вид.

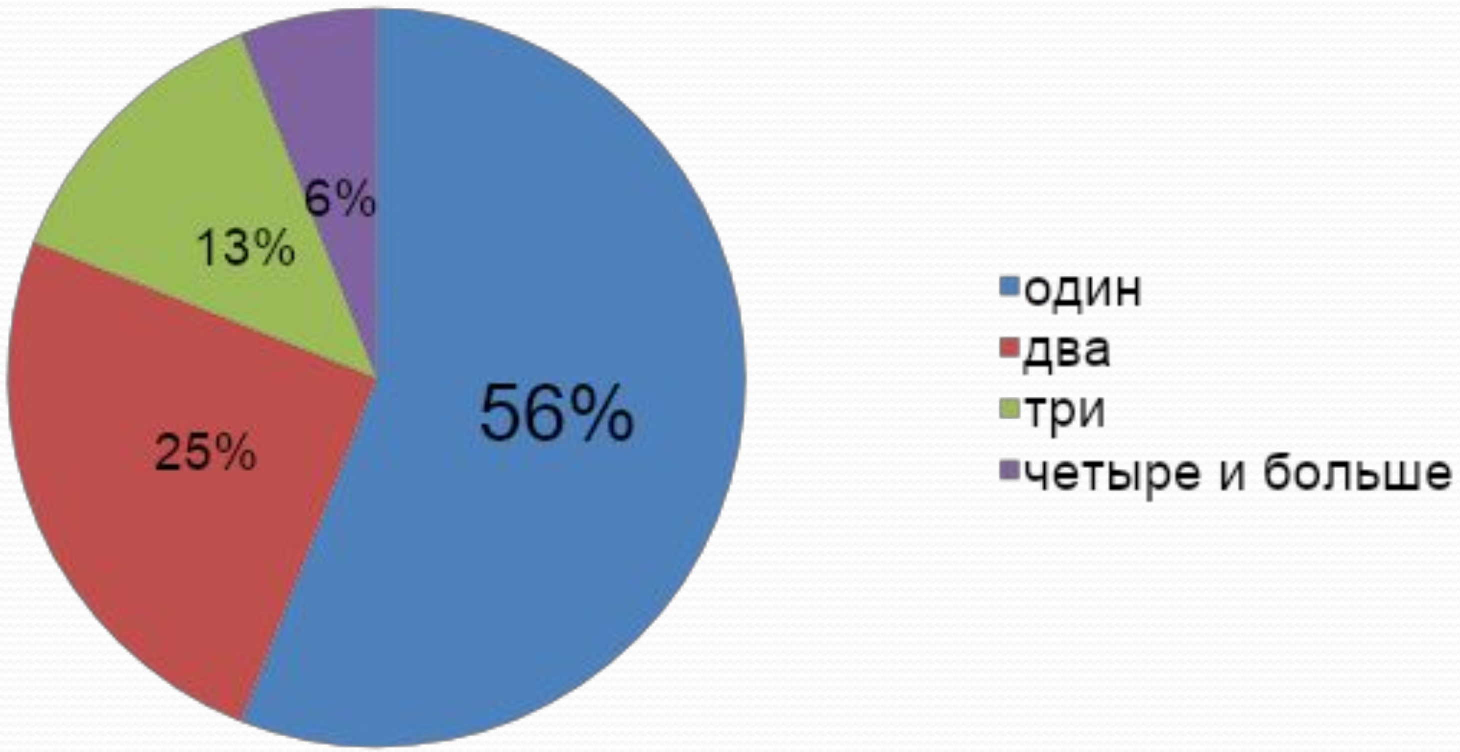
Что такое квадратное уравнение?

Квадратное уравнение – уравнение вида
$ax^2 + bx + c = 0$,
где x- переменная, a,b и c-некоторые числа, причем,
$a \neq 0$.
Если в квадратном уравнении
$ax^2 + bx + c = 0$
хотя бы один из коэффициентов b или c равен нулю, то такое уравнение называют неполным квадратным уравнением.
Неполные квадратные уравнения бывают трёх видов:
1) $ax^2 + c = 0$, где $b = 0$;
2) $ax^2 + bx = 0$, где $c = 0$;
3) $ax^2 = 0$, где $b = 0$, $c = 0$.

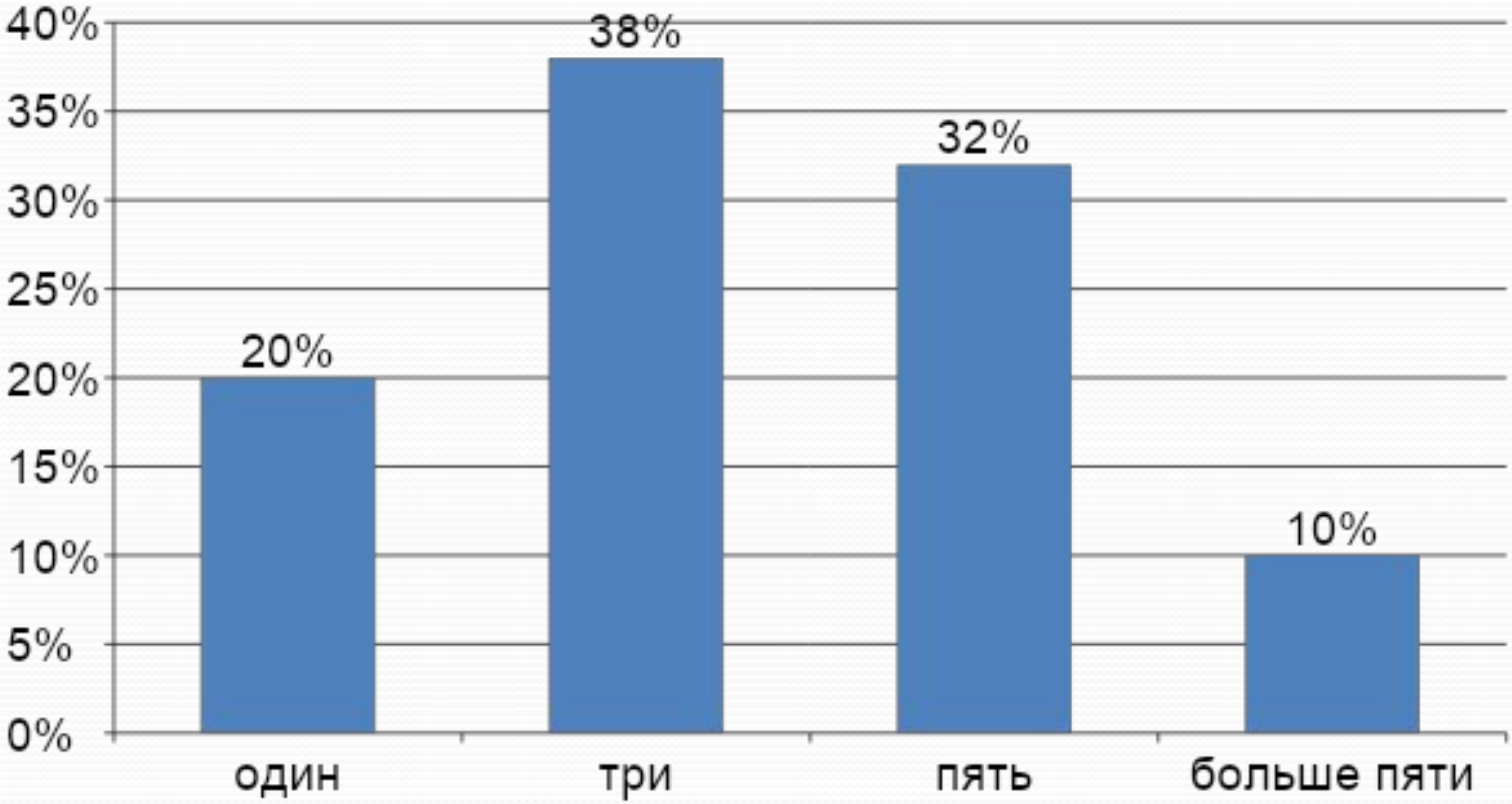
Как ты решаешь квадратные уравнения?



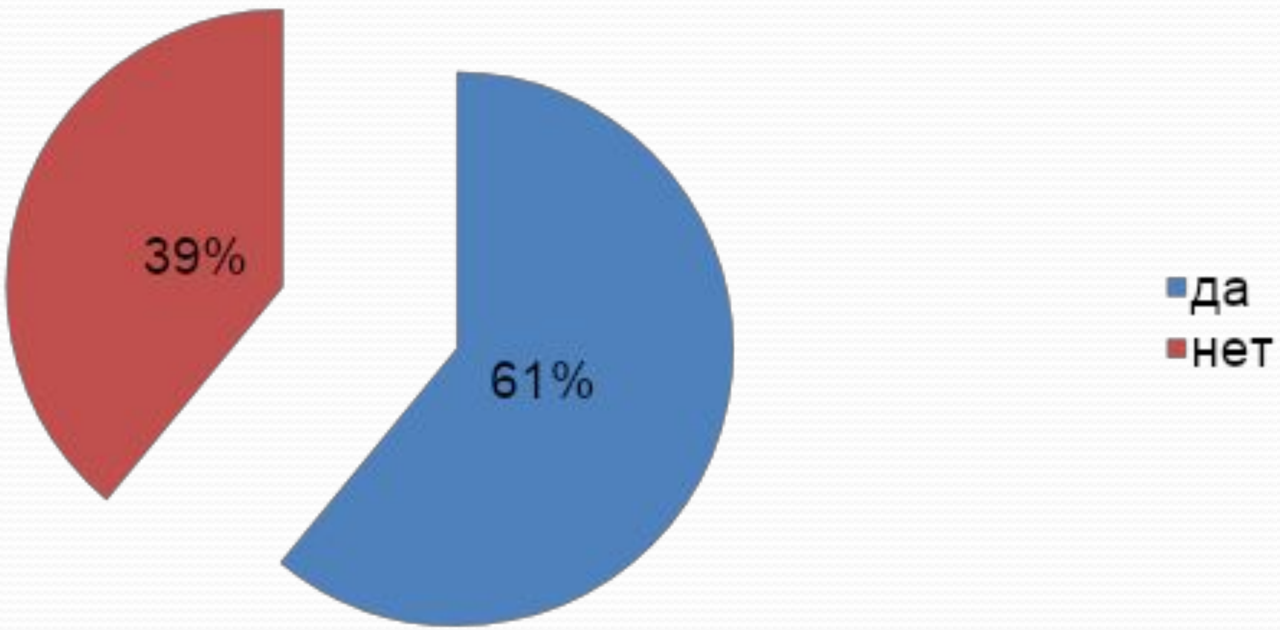
Сколько способов решений квадратных уравнений ты знаешь?



Сколько способов решений квадратных уравнений существует по твоему мнению?



Хотел бы ты узнать другие способы решения квадратных уравнений?



- Первое свойство коэффициентов
- Второе свойство коэффициентов
- Третье свойство коэффициентов
- С помощью циркуля и линейки
- Геометрический способ
- Методом переброски
- С помощью номограммы

Первое свойство коэффициентов

- Если сумма коэффициентов равна нулю, т.е. $a + b + c = 0$, то $x_1 = 1$, $x_2 = \frac{c}{a}$.
- Доказательство: Разделим обе части уравнения на *a*, получим приведенное квадратное уравнение $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$
- Согласно теореме Виета: $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$, $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$.
- По условию, $a + в + c = 0$, тогда $в = -a - c$. Значит,

  $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} = 1\frac{c}{a}$, $x_1 + x_2 = \frac{b}{a} = \frac{(-a-c)}{a} = 1\cdot\frac{c}{a}$.
- Получаем $x_1 = 1$, $x_2 = \frac{c}{a}$, что и требовалось доказать.
- **Пример**

  $3x^2 + 5x - 8 = 0$,

  т.к. $a + b + c = 0$

  ($3 + 5 - 8 = 0$), то получим

  $x_1 = 1$, $x_2 = \frac{c}{a} = -\frac{8}{3}$

  Ответ: 1 и $-\frac{8}{3}$

Второе свойство коэффициентов

- Если $b = a + c$, то $x_1 = -1$, $x_2 = -\frac{c}{a}$.

  Доказательство аналогично первому.

- **Пример**

  $11x^2 + 27x + 16 = 0$,

  Т.к. $\boldsymbol{b = a + c}$ $(27 = 11 + 16)$, значит

  $x_1 = -1$, $x_2 = \frac{c}{a} = \frac{16}{11}$.

  Ответ: -1 и $\frac{16}{11}$

Третье свойство коэффициентов

- Если второй коэффициент b четное число (b = 2k), то формулу корней можно записать в виде $x_{1,2} = \frac{-k \pm \sqrt{k^2 - ac}}{a}$.

- **Пример**

  $4x^2 - 36x + 77 = 0$,

  a = 4, b = - 36, c = 77, k = - 18;

  $D = k^2 - ac = (- 18)^2 - 4 \cdot 77 = 324 - 308 = 16$, D > 0, два различных корня;

$$x_{1,2} = \frac{-k \pm \sqrt{k^2 - ac}}{a} = \frac{18 \pm 4}{4}$$

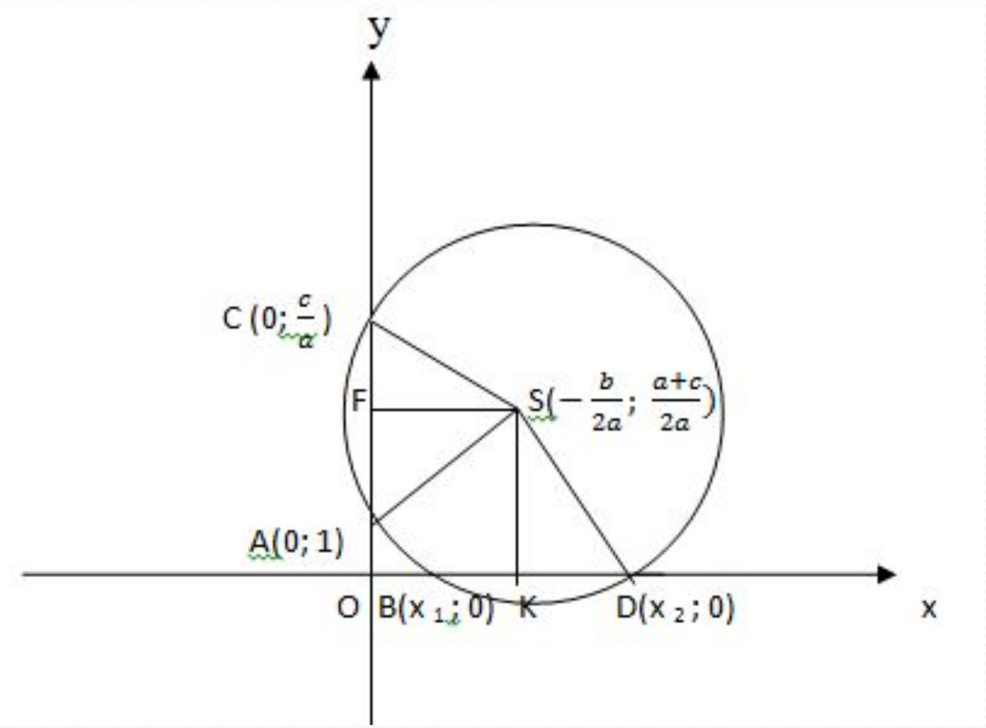
  $x_1 = 5,5$; $x_2 = 3,5$.

  Ответ: 5,5 и 3,5.

Решение квадратных уравнений с помощью циркуля и линейки:

$ax^2 + bx + c = 0$

SA – радиус окружности
т.S (x;y) – центр окружности



Центр окружности:

$$x = \frac{-b}{2a}$$

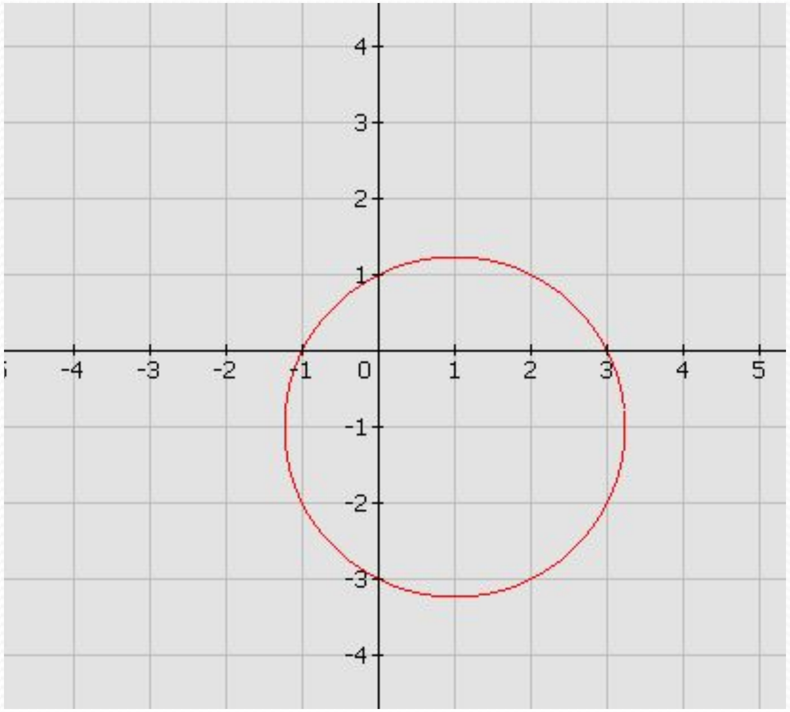
$$y = \frac{a+c}{2a}$$

Точка А (0;1)

$$x^2 - 2x - 3 = 0$$

Центр окружности:

$$x = -\frac{b}{2a} = -\frac{-2}{2 \cdot 1} = 1$$



$$y = \frac{a + c}{2a} = \frac{1 - 3}{2 \cdot 1} = -1$$

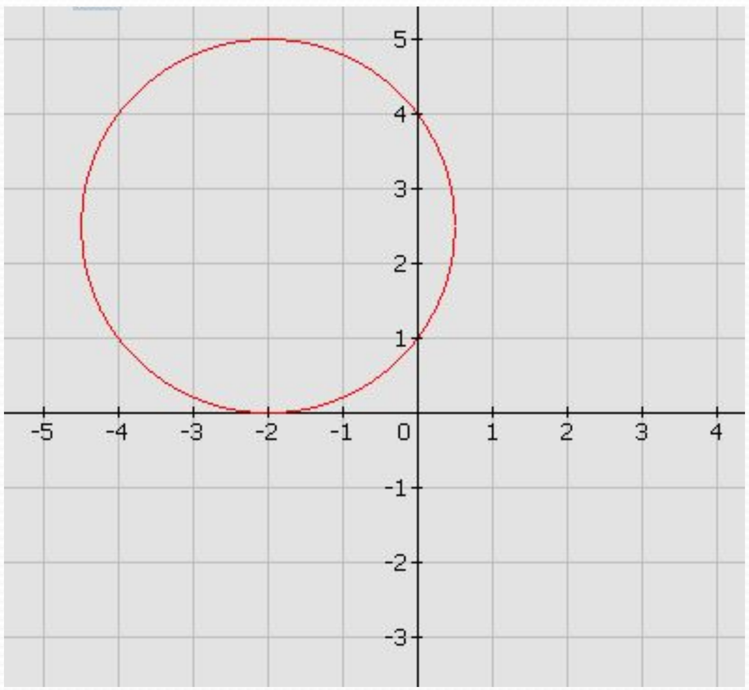
Точка А (0;1)

$$x_1 = -1, \quad x_2 = 3$$

$$x^2 + 4x + 4 = 0$$

Центр окружности:

$$\mathbf{x = -\frac{b}{2a} = -\frac{4}{2 \cdot 1} = -2}$$

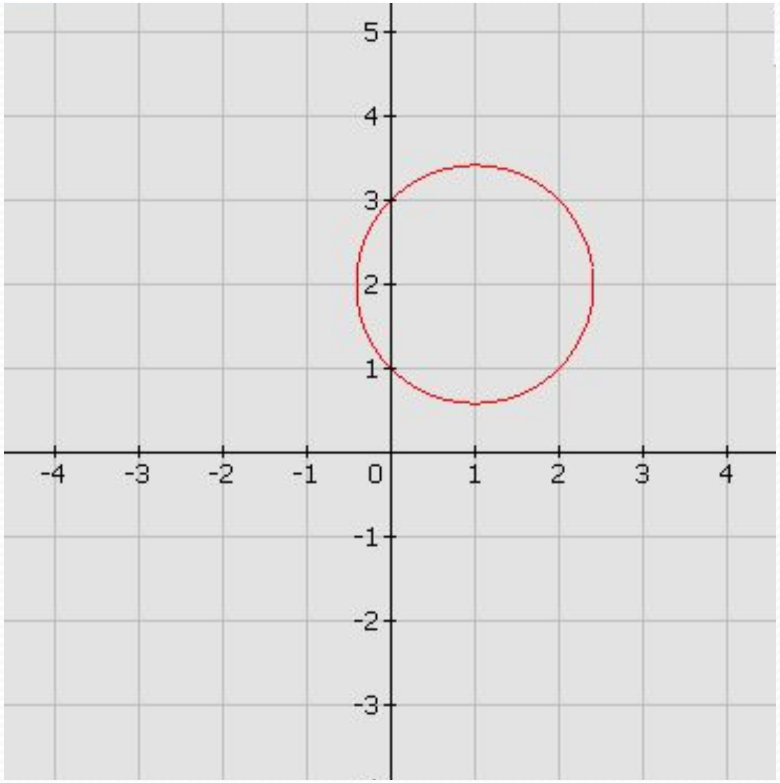


$$\mathbf{y = \frac{a + c}{2a} = \frac{1 + 4}{2 \cdot 1} = 2,5}$$

Точка А (0;1)

$$x = -\ 2$$

$$x^2 - 2x + 3 = 0$$



$$x = -\frac{b}{2a} = -\frac{-2}{2 \cdot 1} = 1$$

$$y = \frac{a + c}{2a} = \frac{3 + 1}{2 \cdot 1} = 2$$

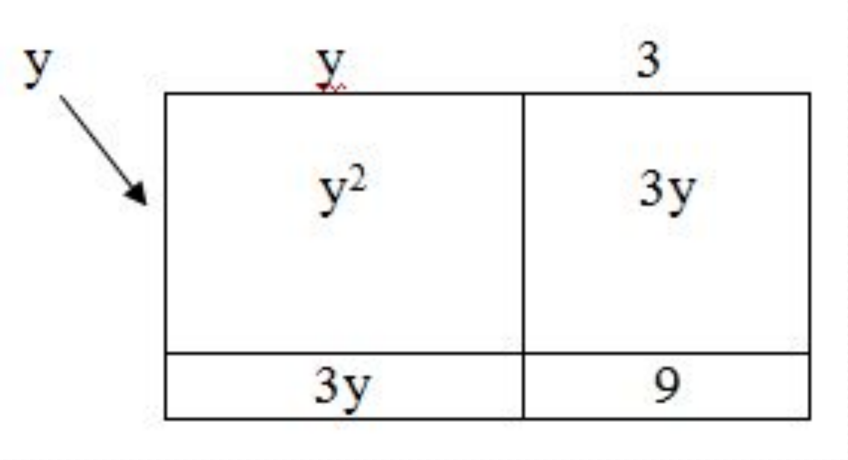
Точка А (0;1)

нет решения

Геометрический способ решения

- Решим геометрически уравнения $y^2 - 6y - 16 = 0$.
- Преобразуя уравнение, получаем $y^2 - 6y = 16$.
- В левой части уравнения выделяем полный квадрат и получаем

  $y^2 + 6y + 9 = 16 + 9$, отсюда получаем $(y + 3)^2 = 25$.
- Следовательно, $y + 3 = \pm 5$, откуда $y_1 = 2$, $y_2 = -8$.



Решение уравнений методом «переброски»

Рассмотрим квадратное уравнение

$$ax^2 + bx + c = 0,\ a \neq 0.$$

Умножая обе его части на *a*, получаем уравнение

$$a^2 x^2 + a\,bx + ac = 0.$$

Пусть $ax = y$, откуда $x = \frac{y}{a}$; тогда приходим к уравнению

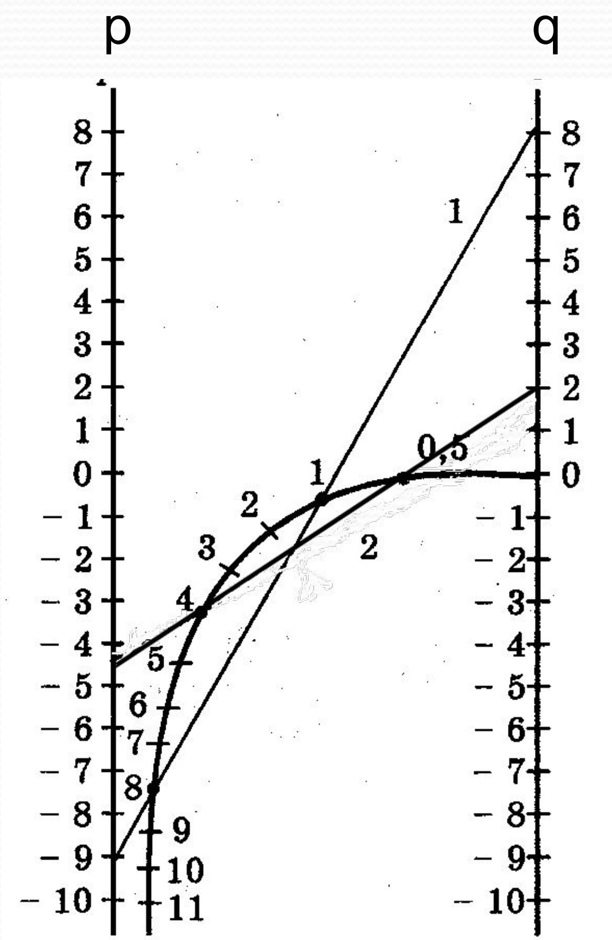
$$y^2 + by + ac = 0,$$

равносильного данному. Его корни y_1 и y_2 найдем с помощью теоремы Виета. Окончательно получаем $x_1 = \frac{y_1}{a}$ и $x_2 = \frac{y_2}{a}$. При этом способе коэффициент a умножается на свободный член, как бы «перебрасывается» к нему, поэтому его и называют *способом «переброски»*. Этот способ применяют, когда можно легко найти корни уравнения, используя теорему Виета и, что самое важное, когда дискриминант есть точный квадрат.

Решение квадратных уравнений с помощью номограммы

Это старый и незаслуженно забытый способ решения квадратных уравнений, помещенный на с.83 таблиц Брадиса.

$$ax^2 + bx + c = 0$$



$$x^2 – 9x + 8 = 0$$

Соединим p=-9 и q=8, номограмма даёт корни: $x_1 = 8$ и $x_2 = 1$

Из эксперимента:

$$2x^2 – 9x + 4 = 0 \ / :2$$

$$x^2 - 4,5x + 2 = 0$$

Соединим p=-4,5 и q=2, номограмма даёт корни: $x_1 = 4$ и $x_2 = 0,5$

Вывод:

Во время своих исследований я узнала о 7 новых способах решения квадратных уравнений. Я надеюсь, что они помогут и мне, и моим одноклассникам в будущем.Я считаю, что своей цели я достигла. Но также я узнала, что существует около 100 способов решения квадратных уравнений. Поэтому, я думаю, что буду продолжать свои исследования в более старших классах.

О теореме Виета

Вывод формулы решения квадратного уравнения в общем виде имеется у Виета, однако Виет признавал только положительные корни. Теорема, выражающая связь между коэффициентами квадратного уравнения и его корнями, носящая имя Виета, была им сформулирована впервые в 1591 г.

Если приведенное квадратное уравнение $x^2+px+q=0$ имеет действительные корни, то их сумма равна $-p$, а произведение равно q, то есть

$$x_1+x_2=-p,$$
$$x_1x_2=q$$

Например:

Если X_1 и X_2 корни уравнения $X^2+3X-10=0$, то
$X_1\cdot X_2=-10$, значит корни имеют разные знаки
$X_1+X_2=-3$, значит больший по модулю корень - отрицательный
Подбором находим корни: $X_1=-5$, $X_2=2$

Из истории квадратных уравнений:

Квадратные уравнения уже умели решать около 2000 лет до н.э. вавилоняне. Одна из задач знаменитого индийского математика 12 века Бхаскары.

Обезьянок резвых стая
Всласть поевши, развлекалась.
Их в квадрате часть восьмая
На поляне забавлялась.
А двенадцать по лианам...
Стали прыгать повисая...
Сколько было обезьянок
Ты скажи мне, в этой стае?

$$\left(\frac{x}{8}\right)^2+12=x$$
$$x^2-64x=-768$$
$$x^2-64x+32^2=-768+1024,$$
$$(x-32)^2=256$$
$$x-32=\pm16$$
$$x^1=16, \qquad x^2=48$$

Общее правило решения квадратных уравнений, приведенных к единому каноническому виду x2+вх+с=0 , было сформулировано в Европе лишь в 1544 г. Штифелем.

МБОУ «Лицей г.Абдулино»

Решение квадратных уравнений

Использование данного материала поможет экономить время и эффективно решать уравнения и задания, связанные с ними, при подготовке к региональному экзамену, ГИА и при тестовой системе сдачи вступительных экзаменов.

Абдулино 2014

Практикум по материалам ГИА

1. Решите уравнение $x^2+4x-32=0$. Если в уравнении более одного корня, в ответе запишите наименьший.

2. Решите уравнение $\frac{3}{x-8}+\frac{8}{x-3}=2$. Если уравнение имеет более одного корня, в ответе запишите наибольший.

3. Не решая уравнения $2x^2+2x-3=0$, найдите значение x_1+x_2, где x_1, x_2 — корни уравнения.

4. Найдите наименьший корень уравнения:

$(x+3)^4+3x^2+18x-1=0$.

5. Укажите все значения в, при которых уравнение:

$x^3-2вx^2-(2в-3)x=0$ имеет три различных корня.

19 Решите уравнение $(x^2-2x)^2+(x-1)^2=1$.

по формуле $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$

(x^2-2x+1)

Т.е. $(\underbrace{x^2-2x}_{\text{пусть } t})^2+(\underbrace{x^2-2x}_{t}+1)=1$

Тогда $t^2+(t+1)=1$

$t^2+t+1=1$

$t^2+t=0$

$t(t+1)=0$

$t_1=0$ т.е. $x^2-2x=0$, $x(x-2)=0$, $x_1=0$ и $x-2=0$, $x_2=2$

$t+1=0$, $t_2=-1$ т.е. $x^2-2x=-1$, $x^2-2x+1=0$, $(x-1)^2=0$, т.к. $x_3=1$

Ответ: 0; 2; 1.

Свойства коэффициентов квадратного уравнения

Если в квадратном уравнении $a+b+c=0$, то один из корней равен 1, а второй по теореме Виета равен $\frac{c}{a}$;

Если в квадратном уравнении $a+c=b$, то один из корней равен (-1), а второй по теореме Виета равен $-\frac{c}{a}$;

Например: $137x^2+20x-157=0$.

$a=137$, $b=20$, $c=-157$.

$a+b+c=137+20-157=0$.

$x_1=1$, $x_2=\frac{c}{a}=\frac{-157}{137}$

Ответ: 1; $\frac{-157}{137}$

Графический способ решения квадратного уравнения

Решим уравнение $x^2-x-1=0$.

Для этого построим два графика

1) $y=x^2$ 2) $y=x+1$

Ответ: $x\approx-0.6; x\approx2.6$

Различные способы решения квадратного уравнения

$ax^2+bx+c=0$

Выражение $D=b^2-4ac$ **называют** ***дискриминантом*** **квадратного уравнения.**

Корни квадратного уравнения:

Если $D>0$, $x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}$

Если $D=0$, $x=\frac{-b}{2a}$

Если $D<0$, *Нет корней*

Второй коэффициент четный:

Если $b=2k$, то корни уравнения $ax^2+2kx+c=0$ находятся по формуле $\boxed{x=\frac{-k\pm\sqrt{D_1}}{a}=\frac{-\frac{b}{2}\pm\sqrt{D_1}}{a}}$,

где $\boxed{D_1=\frac{D}{4}=k^2-ac=\left(\frac{b}{2}\right)^2-ac}$.