

Решение квадратных уравнений различными способами

Автор работы:
Сергеева Полина, ученица 8 «А» класса
МБОУ «Лицей г. Абдулино»

Руководитель:
Ягодкина З.Г., учитель математики



Приобретать знания –
храбрость,

Приумножать их –
мудрость,

А умело применять –
великое искусство.

Цель работы:

- Познакомиться с новыми способами решения квадратных уравнений и формировать умение выбора рационального способа решения.

Задачи:

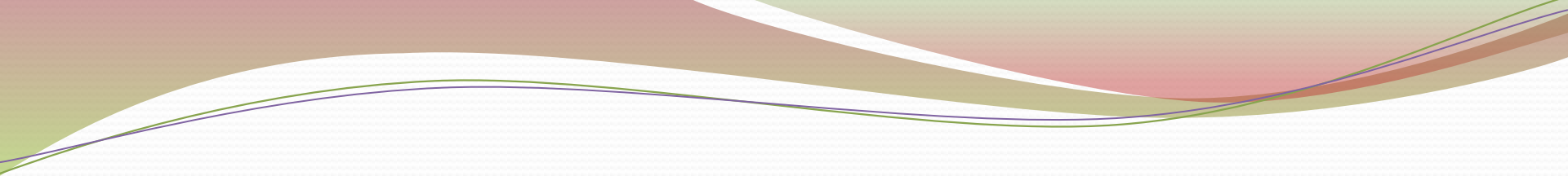
- Изучить литературу по проблеме.
- Расширить и углубить знания по математике, познакомившись со способами решения квадратных уравнений.
- Изучить различные способы решения.
- Распространение различных способов.

Гипотеза:

- Предполагаю, что освоение новых методов решения квадратных уравнений позволит выбрать самый рациональный для их решения.

Методы исследования:

- Изучение программного материала по учебникам А.Г. Мордковича, Н.В.Алимова, Ю.Н. Макарычева
- Изучение дополнительного материала по энциклопедиям
- Изучение исторического материала по сайтам Интернета
- Работа в программах Microsoft Word, Excel, PowerPoint, Publisher



Проблема: изучение и освоение различных способов решения квадратных уравнений, способствующих развитию умственных способностей и математического кругозора ученика.

Объект исследования: раздел математики «Уравнения».

Предмет исследования: квадратные уравнения.

Из истории квадратных уравнений:



- Необходимость решать такие уравнения еще в древности была вызвана потребностью решать задачи, связанные с нахождением площадей земли, а также с развитием астрономии и математики



- Впервые квадратное уравнение сумели решить математики Древнего Египта, сводя их решение к геометрическим построениям

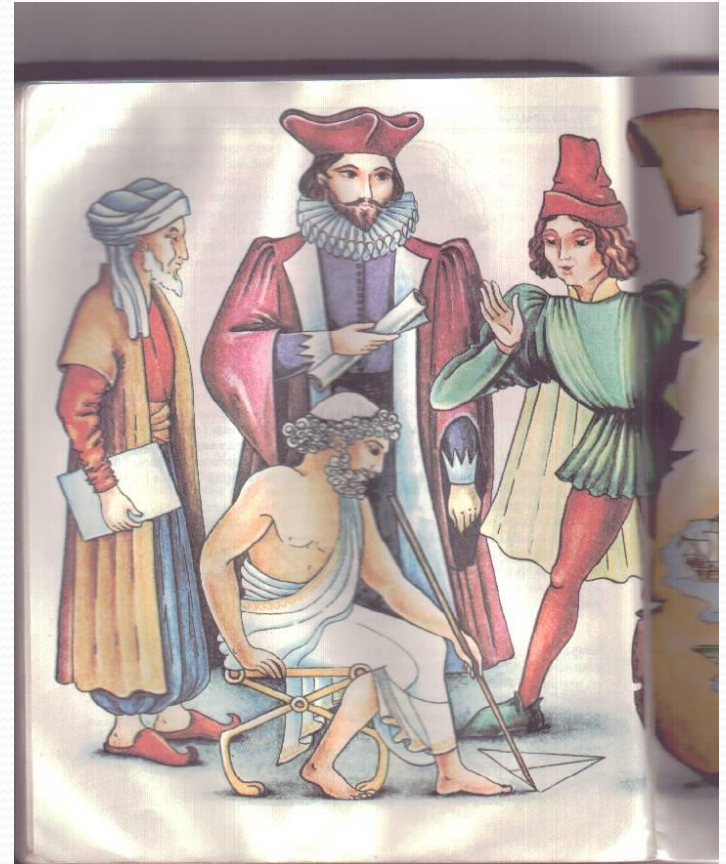


- Приемы решения уравнений без обращения к геометрии дает Диофант Александрийский.



- Индийский ученый, Брахмагупта (VII в.), изложил общее правило решения квадратных уравнений, приведенных к единой форме:

$$ax^2 + bx = c, a > 0.$$





- После трудов нидерландского математика А. Жирара (1595 - 1632), а также Декарта и Ньютона способ решения квадратных уравнений принял современный вид.

Что такое квадратное уравнение?

Квадратное уравнение – уравнение вида

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

где x - переменная, a, b и c -некоторые числа, причем, $a \neq 0$.

Если в квадратном уравнении

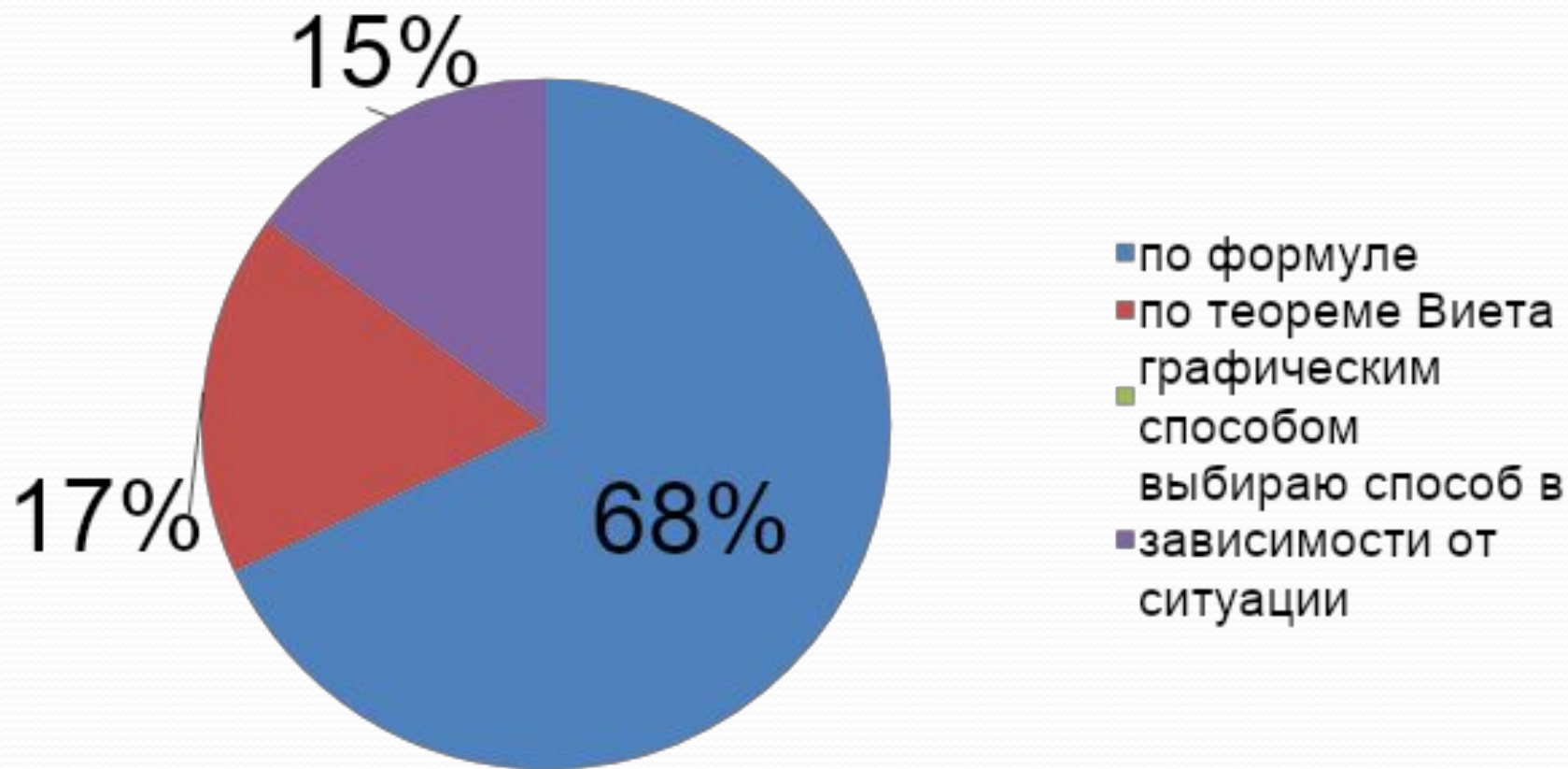
$$ax^2 + bx + c = 0$$

хотя бы один из коэффициентов b или c равен нулю, то такое уравнение называют **неполным квадратным уравнением**.

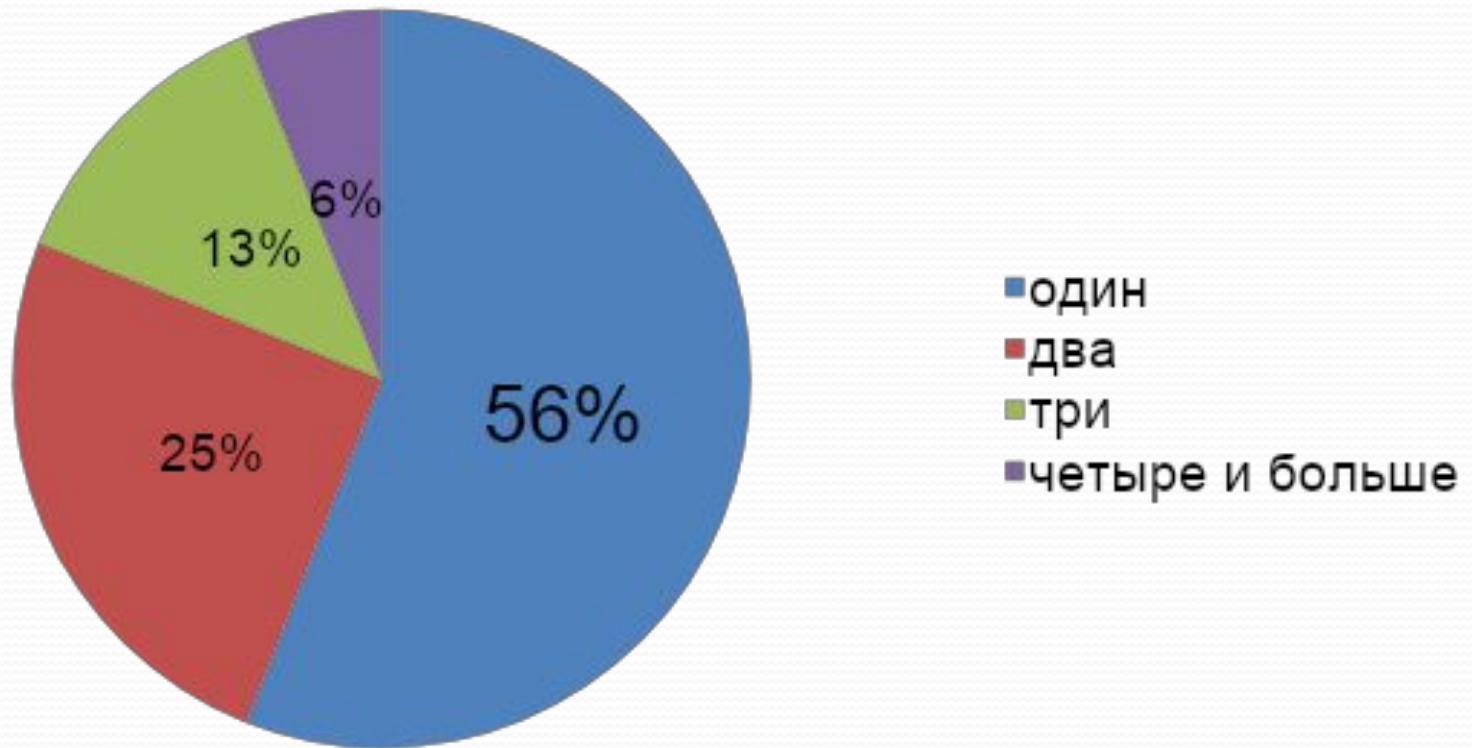
Неполные квадратные уравнения бывают трёх видов:

- 1) $ax^2 + c = 0$, где $b = 0$;
- 2) $ax^2 + bx = 0$, где $c = 0$;
- 3) $ax^2 = 0$, где $b = 0$, $c = 0$.

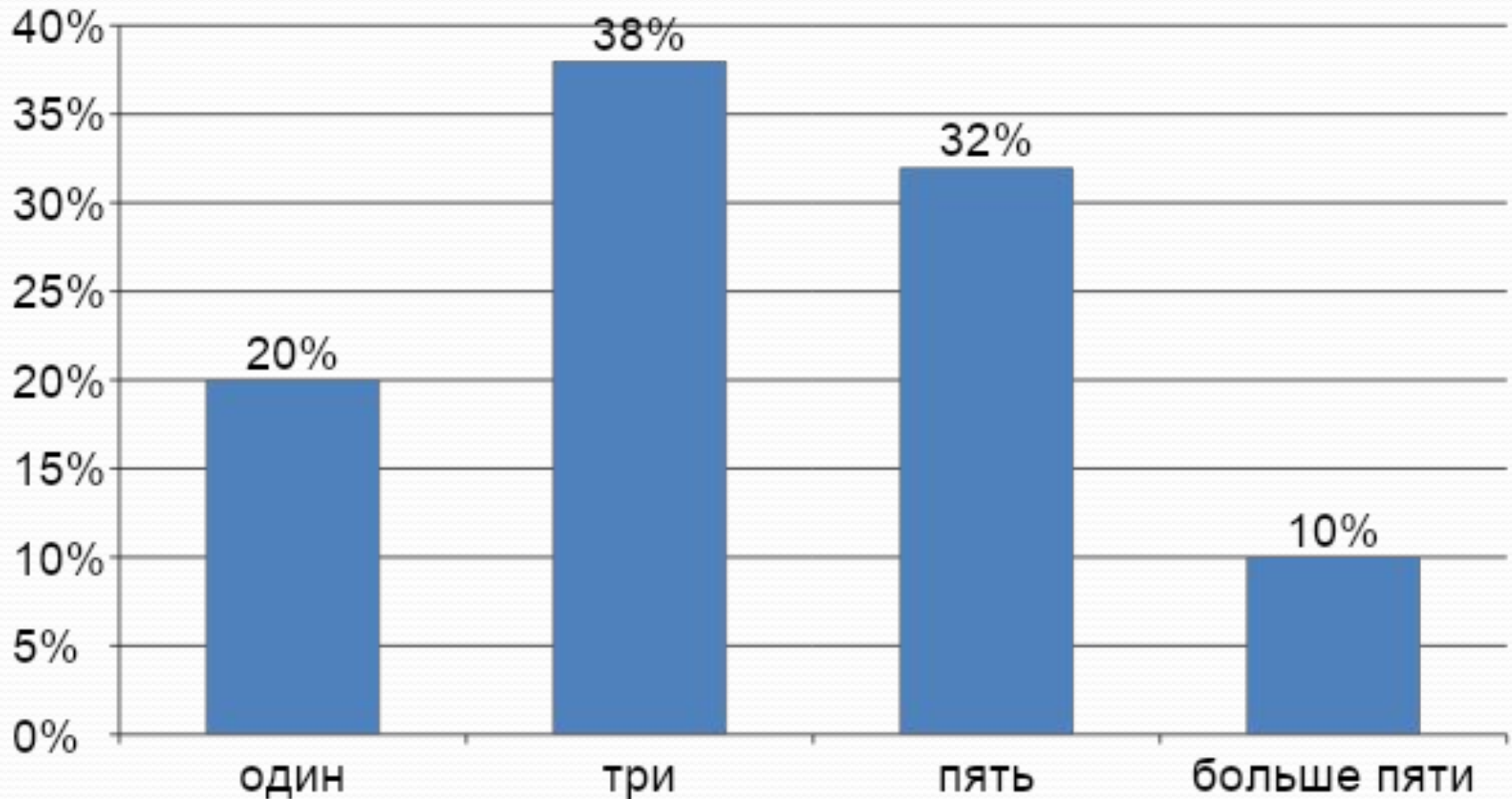
Как ты решаешь квадратные уравнения?



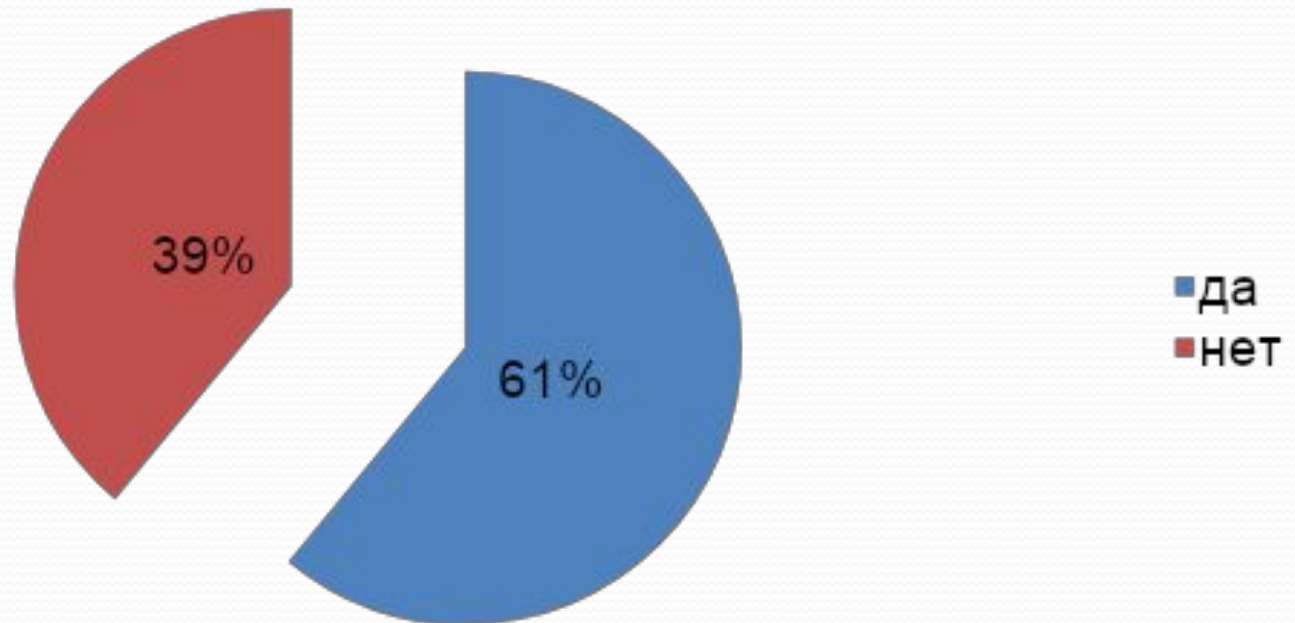
Сколько способов решений квадратных уравнений ты знаешь?

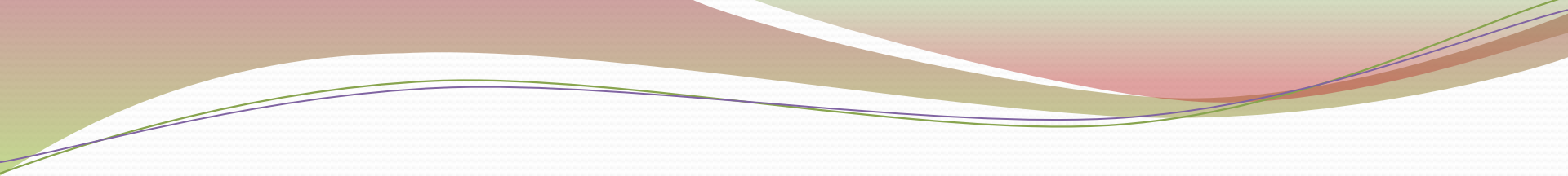


Сколько способов решений квадратных уравнений существует по твоему мнению?



Хотел бы ты узнать другие способы решения квадратных уравнений?



- 
- Первое свойство коэффициентов
 - Второе свойство коэффициентов
 - Третье свойство коэффициентов
 - С помощью циркуля и линейки
 - Геометрический способ
 - Методом переброски
 - С помощью номограммы

Первое свойство коэффициентов

- Если сумма коэффициентов равна нулю, т.е. $a + b + c = 0$, то $x_1 = 1$, $x_2 = \frac{c}{a}$.
- Доказательство: Разделим обе части уравнения на a , получим приведенное квадратное уравнение $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$

- Согласно теореме Виета: $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$, $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$.
- По условию, $a + b + c = 0$, тогда $b = -a - c$. Значит,
 $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} = 1 \cdot \frac{c}{a}$, $x_1 + x_2 = \frac{b}{a} = \frac{-a - c}{a} = 1 - \frac{c}{a}$.
- Получаем $x_1 = 1$, $x_2 = \frac{c}{a}$, что и требовалось доказать.

- **Пример**

$$3x^2 + 5x - 8 = 0,$$

т.к. $a + b + c = 0$

($3 + 5 - 8 = 0$), то получим

$$x_1 = 1, x_2 = \frac{c}{a} = \frac{8}{3}$$

Ответ: 1 и $\frac{8}{3}$

Второе свойство коэффициентов

- Если $b = a + c$, то $x_1 = -1$, $x_2 = -\frac{c}{a}$.
Доказательство аналогично первому.

- **Пример**

$$11x^2 + 27x + 16 = 0,$$

Т.к. $b = a + c$ ($27 = 11 + 16$), значит

$$x_1 = -1, \quad x_2 = -\frac{c}{a} = -\frac{16}{11}.$$

Ответ: -1 и $-\frac{16}{11}$

Третье свойство коэффициентов

- Если второй коэффициент b четное число ($b = 2k$), то формулу корней можно записать в виде $x_{1,2} = \frac{-k \pm \sqrt{k^2 - ac}}{a}$.

- **Пример**

$$4x^2 - 36x + 77 = 0,$$

$$a = 4, b = -36, c = 77, k = -18;$$

$$D = k^2 - ac = (-18)^2 - 4 \cdot 77 = 324 - 308 = 16, \quad D > 0, \text{ два различных корня;}$$

$$x_{1,2} = \frac{-k \pm \sqrt{k^2 - ac}}{a} = \frac{18 \pm 4}{4}$$

$\wedge_1 - \text{''''}, \wedge_2 - \text{''''}$

Ответ: 5,5 и 3,5.

Решение квадратных уравнений с помощью циркуля и линейки:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

SA – радиус окружности

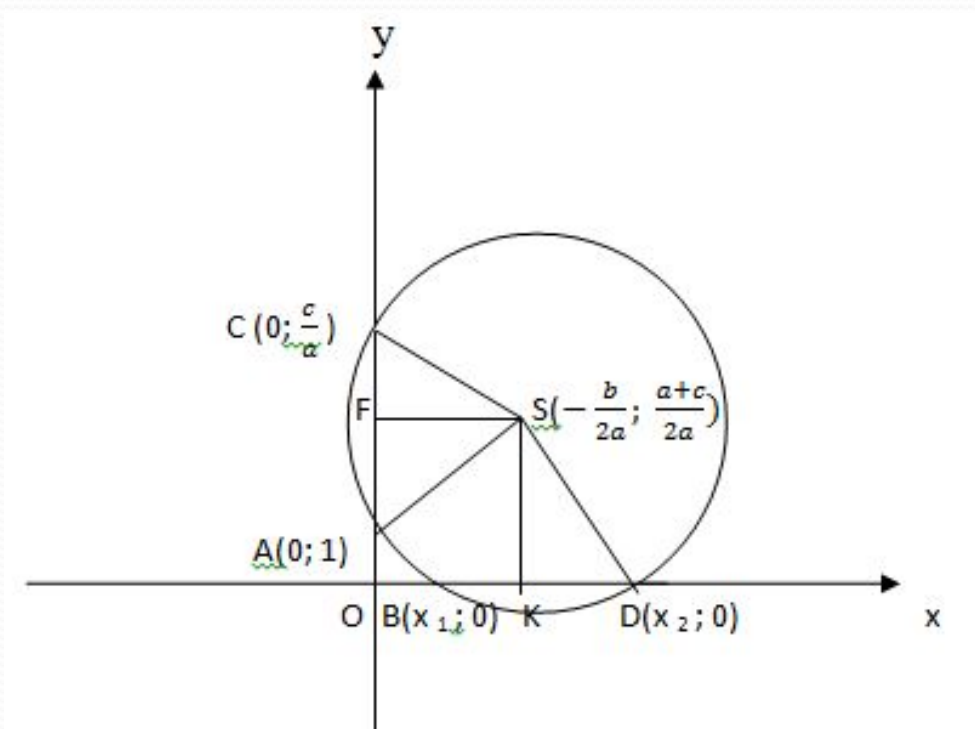
$S(x; y)$ – центр окружности

Центр окружности:

$$x = \frac{-b}{2a}$$

$$y = \frac{a+c}{2a}$$

Точка $A(0; 1)$



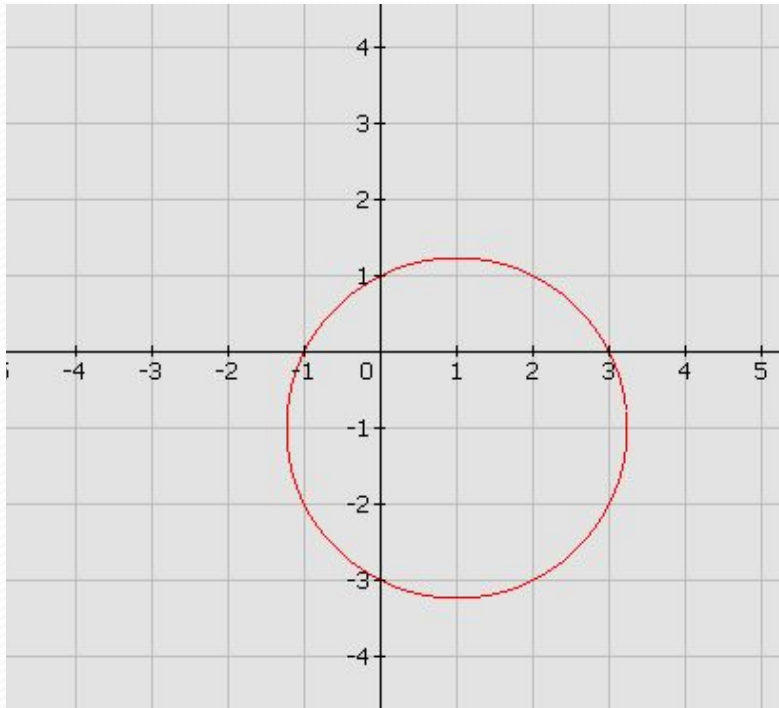
$$x^2 - 2x - 3 = 0$$

Центр окружности:

$$x = -\frac{b}{2a} = -\frac{-2}{2 \cdot 1} = 1$$

$$y = \frac{a + c}{2a} = \frac{1 - 3}{2 \cdot 1} = -1$$

Точка А (0;1)



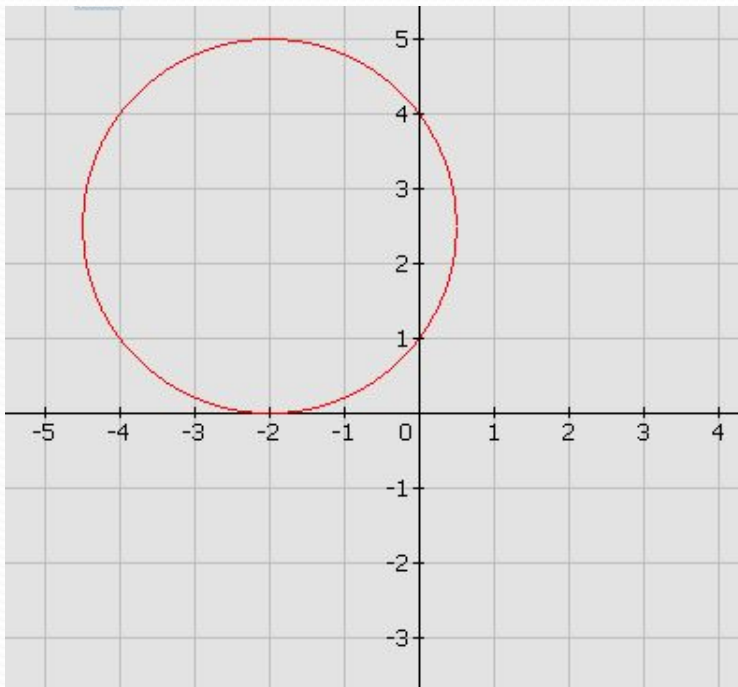
$$x_1 = -1, \quad x_2 = 3$$

$$x^2 + 4x + 4 = 0$$

Центр окружности:

$$x = -\frac{b}{2a} = -\frac{4}{2 \cdot 1} = -2$$

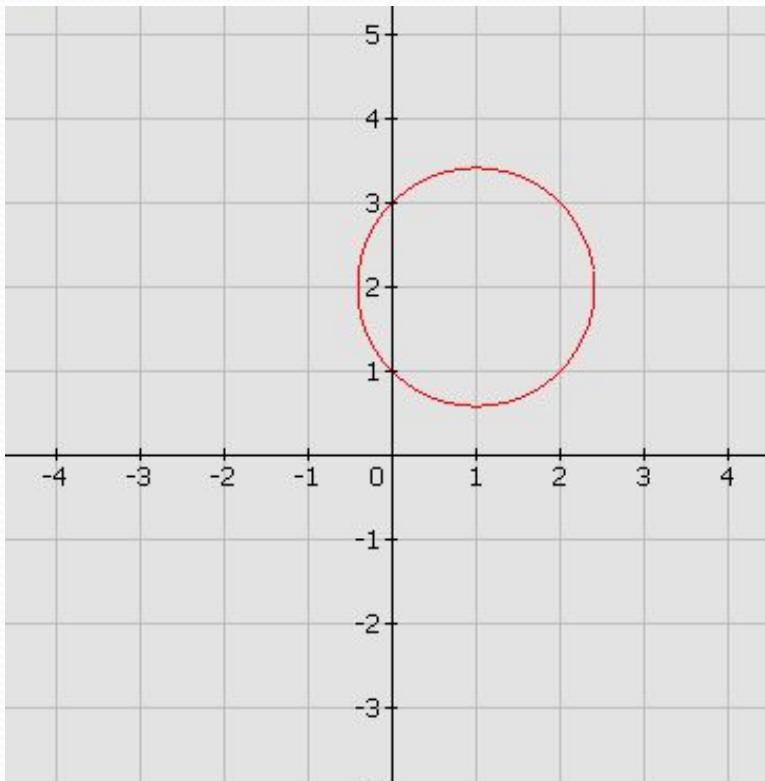
$$y = \frac{a + c}{2a} = \frac{1 + 4}{2 \cdot 1} = 2,5$$



Точка А (0;1)

$$x = -2$$

$$x^2 - 2x + 3 = 0$$



$$x = -\frac{b}{2a} = -\frac{-2}{2 \cdot 1} = 1$$

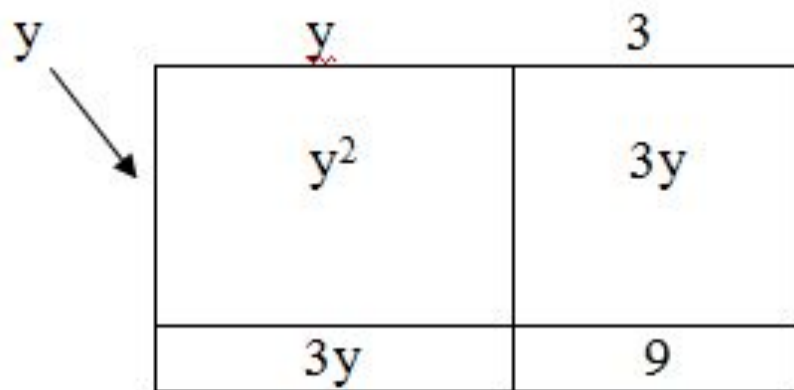
$$y = \frac{a + c}{2a} = \frac{3 + 1}{2 \cdot 1} = 2$$

Точка А (0;1)

нет решения

Геометрический способ решения

- Решим геометрически уравнения $y^2 - 6y - 16 = 0$.
- Преобразуя уравнение, получаем $y^2 - 6y = 16$.
- В левой части уравнения выделяем полный квадрат и получаем $y^2 + 6y + 9 = 16 + 9$, отсюда получаем $(y + 3)^2 = 25$.
- Следовательно, $y + 3 = \pm 5$, откуда $y_1 = 2$, $y_2 = -8$.



Решение уравнений методом «переброски»

Рассмотрим квадратное уравнение

$$ax^2 + bx + c = 0, a \neq 0.$$

Умножая обе его части на a , получаем уравнение

$$a^2 x^2 + a bx + ac = 0.$$

Пусть $ax = y$, откуда $x = \frac{y}{a}$; тогда приходим к уравнению

$$y^2 + by + ac = 0,$$

равносильного данному. Его корни y_1 и y_2 найдем с помощью теоремы Виета. Окончательно получаем $x_1 = \frac{y_1}{a}$ и $x_2 = \frac{y_2}{a}$. При этом способе коэффициент a умножается на свободный член, как бы «перебрасывается» к нему, поэтому его и называют *способом «переброски»*. Этот способ применяют, когда можно легко найти корни уравнения, используя теорему Виета и, что самое важное, когда дискриминант есть точный квадрат.

Решение квадратных уравнений с помощью номограммы

Это старый и незаслуженно забытый способ решения квадратных уравнений, помещенный на с.83 таблиц Брадиса.



$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$x^2 - 9x + 8 = 0$$

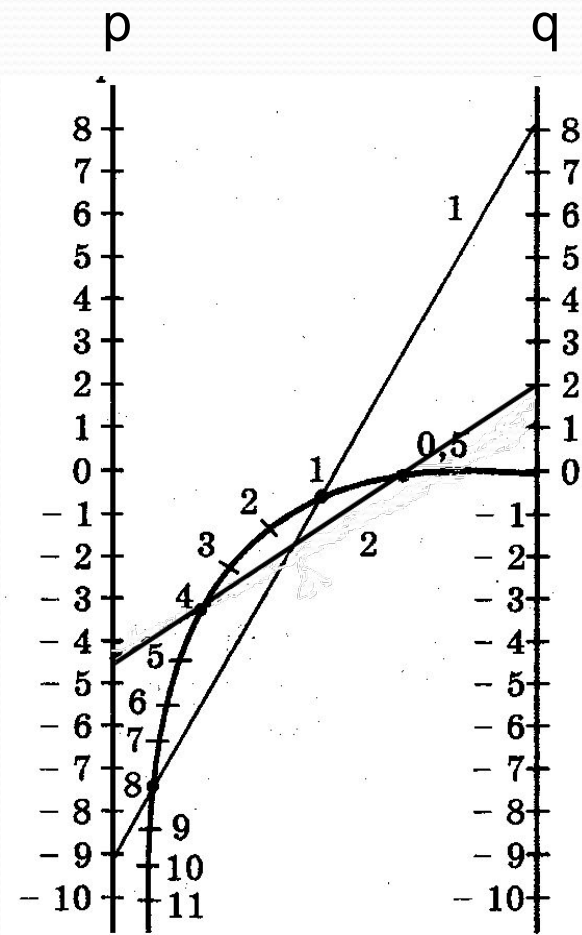
Соединим $p=-9$ и $q=8$,
номограмма даёт корни: $x_1 = 8$ и $x_2 = 1$

Из эксперимента:

$$2x^2 - 9x + 4 = 0 / :2$$

$$x^2 - 4,5x + 2 = 0$$

Соединим $p=-4,5$ и $q=2$,
номограмма даёт корни: $x_1 = 4$ и $x_2 = 0,5$



Вывод:

Во время своих исследований я узнала о 7 новых способах решения квадратных уравнений. Я надеюсь, что они помогут и мне, и моим одноклассникам в будущем. Я считаю, что своей цели я достигла. Но также я узнала, что существует около 100 способов решения квадратных уравнений. Поэтому, я думаю, что буду продолжать свои исследования в более старших классах.

О теореме Виета



Вывод формулы решения квадратного уравнения в общем виде имеется у Виета, однако Виет признавал только положительные корни. Теорема, выражающая связь между коэффициентами {

квадратного уравнения и его корнями, носящая имя Виета, была им сформулирована впервые в 1591 г.

Если приведенное квадратное уравнение $x^2+px+q=0$ имеет действительные корни, то их сумма равна $-p$, а произведение равно q , то есть

$$x_1 + x_2 = -p, \\ x_1 \cdot x_2 = q$$



Например:

Если X_1 и X_2 корни уравнения

$$X^2 + 3X - 10 = 0, \text{ то}$$

$X_1 \cdot X_2 = -10$, значит корни имеют разные знаки

$X_1 + X_2 = -3$, значит больший по модулю корень - отрицательный

Подбором находим корни: $X_1 = -5$, $X_2 = 2$

Из истории квадратных уравнений:



Квадратные уравнения уже умели решать около 2000 лет до н.э. вавилоняне. Одна из задач знаменитого индийского математика 12 века Бхаскара.

Обезьянок резвын стаа
Всасть поввилн, развлелалася
Их в квадрате часть восьмая
На почане забавлялася
А двенадцато по шканам...
Стали прыгати поввисаа...
Сколко была обезьянок
Та скажи мне, в этой стае?

$$\left(\frac{x}{8}\right)^2 + 12 = x \\ x^2 - 64x = -768 \\ x^2 - 64x + 32^2 = -768 + 1024, \\ (x - 32)^2 = 256 \\ x - 32 = \pm 16 \\ x^1 = 16, \quad x^2 = 48$$

Общее правило решения квадратных уравнений, приведенных к единому каноническому виду $x^2+bx+c=0$, было сформулировано в Европе лишь в 1544 г. Штифелем.

МБОУ «Лицей г.Абдулино»

Решение квадратных уравнений



Использование данного материала поможет экономить время и эффективно решать уравнения и задания, связанные с ними, при подготовке к региональному экзамену, ГИА и при тестовой системе сдачи вступительных экзаменов.

Абдулино 2014

Практикум по материалам ГИА

1. Решите уравнение $x^2 + 4x - 32 = 0$. Если в уравнении более одного корня, в ответе запишите ~~каждый~~

$$\frac{3}{x-8} + \frac{8}{x-3} = 2$$

2. Решите уравнение $\frac{3}{x-8} + \frac{8}{x-3} = 2$. Если уравнение имеет более одного корня, в ответе запишите наибольший.

3. Не решая уравнения $2x^2 + 2x - 3 = 0$, найдите значение $x_1 + x_2$, где x_1, x_2 — корни уравнения.

4. Найдите наименьший корень уравнения:

$$(x+3)^4 + 3x^2 + 18x - 1 = 0.$$

5. Укажите все значения a , при которых уравнение:

$$x^3 - 2ax^2 - (2a - 3)x = 0$$

19. Решите уравнение $(x^2 - 2x)^2 + (x - 1)^2 = 1$.

по формуле $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

т.е. $(x^2 - 2x)^2 + (x - 1)^2 = 1$

пусть $t = x^2 - 2x$

Тогда $t^2 + (t+1) = 1$

$$t^2 + t + 1 = 1$$

$$t^2 + t = 0$$

$$t(t+1) = 0$$

$t_1 = 0$ $t_2 = -1$

т.е. $x^2 - 2x = 0$
 $x(x-2) = 0$
 $x_1 = 0, x_2 = 2$

т.е. $x^2 - 2x = -1$
 $x^2 - 2x + 1 = 0$
 $(x-1)^2 = 0, x_1 = x_2 = 1$

Ответ: 0; 2; 1.



Свойства коэффициентов квадратного уравнения

Если в квадратном уравнении $a+b+c=0$, то один из корней равен 1, а второй по теореме Виета равен $-\frac{c}{a}$.

Если в квадратном уравнении $a+c=b$, то один из корней равен (-1), а второй по теореме Виета равен $-\frac{c}{a}$.

Например: $137x^2 + 20x - 157 = 0$.
 $a = 137, b = 20, c = -157$.
 $a + b + c = 137 + 20 - 157 = 0$.
 $x_1 = 1, x_2 = \frac{c}{a} = \frac{-157}{137}$

Ответ: 1; $-\frac{157}{137}$

Графический способ решения квадратного уравнения

Решим уравнение $x^2 - x - 1 = 0$.
 Для этого построим два графика
 $1) y = x^2$ $2) y = x + 1$



Ответ: $x \approx -0.6; x \approx 2.6$

Различные способы решения квадратного уравнения

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Выражение $D = b^2 - 4ac$ называют дискриминантом квадратного уравнения.

Корни квадратного уравнения:

Если $D > 0$, $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$

Если $D = 0$, $x = \frac{-b}{2a}$

Если $D < 0$, Нет корней

Второй коэффициент четный:

Если $b = 2k$, то корни уравнения $ax^2 + 2kx + c = 0$ находят

ся по формуле $x = \frac{-k \pm \sqrt{D_1}}{a} = \frac{-\frac{b}{2} \pm \sqrt{D_1}}{a}$

где $D_1 = \frac{D}{4} = k^2 - ac = \left(\frac{b}{2}\right)^2 - ac$

