Санкт-Петербургский архитектурно-строительный колледж

Математика

(повышенный уровень)

Литература

Валуцэ И.И., Дилигул Г.Д. Математика для техникумов на базе средней школы.– М.: Наука, 1989.
Красс М.С., Чупрынов Б.П. Математика для экономистов.– СПб.: Питер, 2007
Лунгу К.Н. Линейное программирование. Руководство к решению задач. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005
Математика для техникумов. Алгебра и начала анализа. Под ред. Г.Н. Яковлева. Ч.2 – М.: Наука. 1988

Матрицы
и действия над ними

Матрицы и действия над ними

<u>Определение</u>

Матрицей называется система $m \times n$ элементов, расположенных в прямоугольной таблице из m строк и n столбцов. Элементами матрицы могут быть числа, функции, символы к которым применимы алгебраические операции

Термины и обозначения

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & a_{ik} & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & \dots & a_{mn} \end{vmatrix}$$

Термины и обозначения

Элемент матрицы a_{ik}

i – номер строки *(от 1 до m)*

k – номер столбца *(от 1 до n)*

Матрица называется квадратной, если количество строк равно количеству столбцов ($m = n$)

Термины и обозначения

Строчная матрица ($m = 1$)

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & \dots & a_{1n} \end{vmatrix}$$

Столбцовая матрица ($n = 1$)

$$\begin{vmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{m1} \end{vmatrix}$$

Термины и обозначения

Диагональная матрица ($m = n$ и ненулевые элементы расположены только на главной диагонали)

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{ii} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Термины и обозначения

Единичная матрица (диагональная матрица, ненулевые элементы которой равны единице)

$$E = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Термины и обозначения

Симметричная матрица $a_{ik} = a_{ik}$
(элементы, симметричные относительно главной диагонали, равны)

Нулевая матрица $a_{ik} = 0$
(все элементы матрицы равны нулю)

Термины и обозначения

Транспонирование матрицы (поменять местами строки и столбцы)

$$A^{T} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \ldots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \ldots & a_{m2} \\ \ldots & \ldots & a_{ki} & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{1n} & a_{2n} & \ldots & a_{mn} \end{vmatrix}$$

Действия над матрицами

Сложение (вычитание) матриц

Действие определено только для матриц одинакового размера

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{vmatrix}$$

$$B = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{vmatrix}$$

Действия над матрицами

Сложение (вычитание) матриц

$$C = A \pm B =$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} \pm b_{11} & a_{12} \pm b_{12} & \dots & a_{1n} \pm b_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} \pm b_{m1} & a_{m2} \pm b_{m2} & \dots & a_{mn} \pm b_{mn} \end{vmatrix}$$

$$\boxed{C_{ik} = A_{ik} \pm B_{ik}}$$

Действия над матрицами

Умножение матрицы на число

$$B = \lambda \cdot A =$$

$$= \begin{vmatrix} \lambda \cdot a_{11} & \lambda \cdot a_{12} & \ldots & \lambda \cdot a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \lambda \cdot a_{m1} & \lambda \cdot a_{m2} & \ldots & \lambda \cdot a_{mn} \end{vmatrix}$$

$$\boxed{B_{ik} = \lambda \cdot A_{ik}}$$

На λ умножаются все элементы матрицы

Действия над матрицами

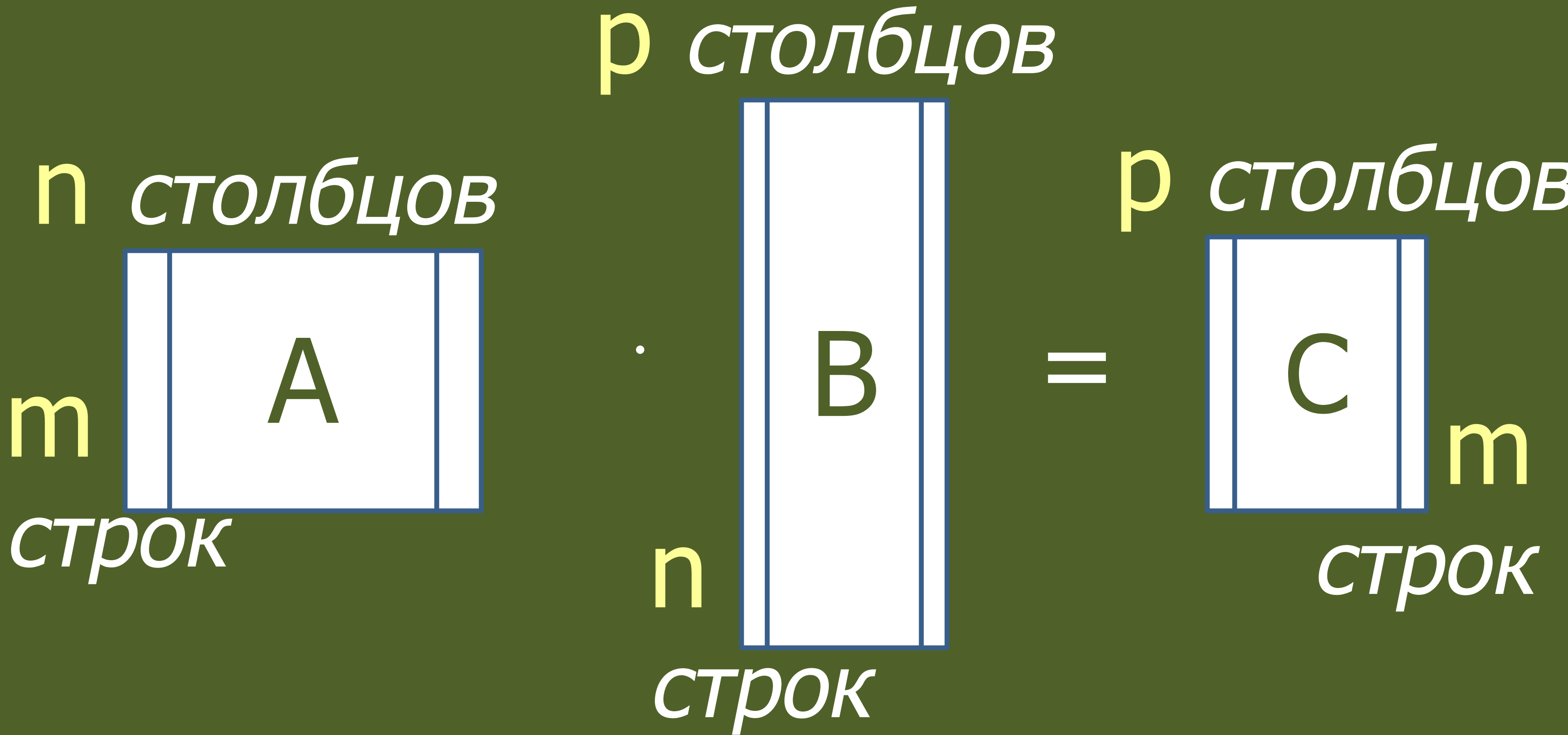
Произведение двух матриц

$$C = A \cdot B$$

Произведение имеет смысл для квадратных матриц одинакового размера, либо для прямоугольных матриц, где:
число столбцов матрицы А равно числу строк матрицы В

Действия над матрицами

Произведение двух матриц



Действия над матрицами

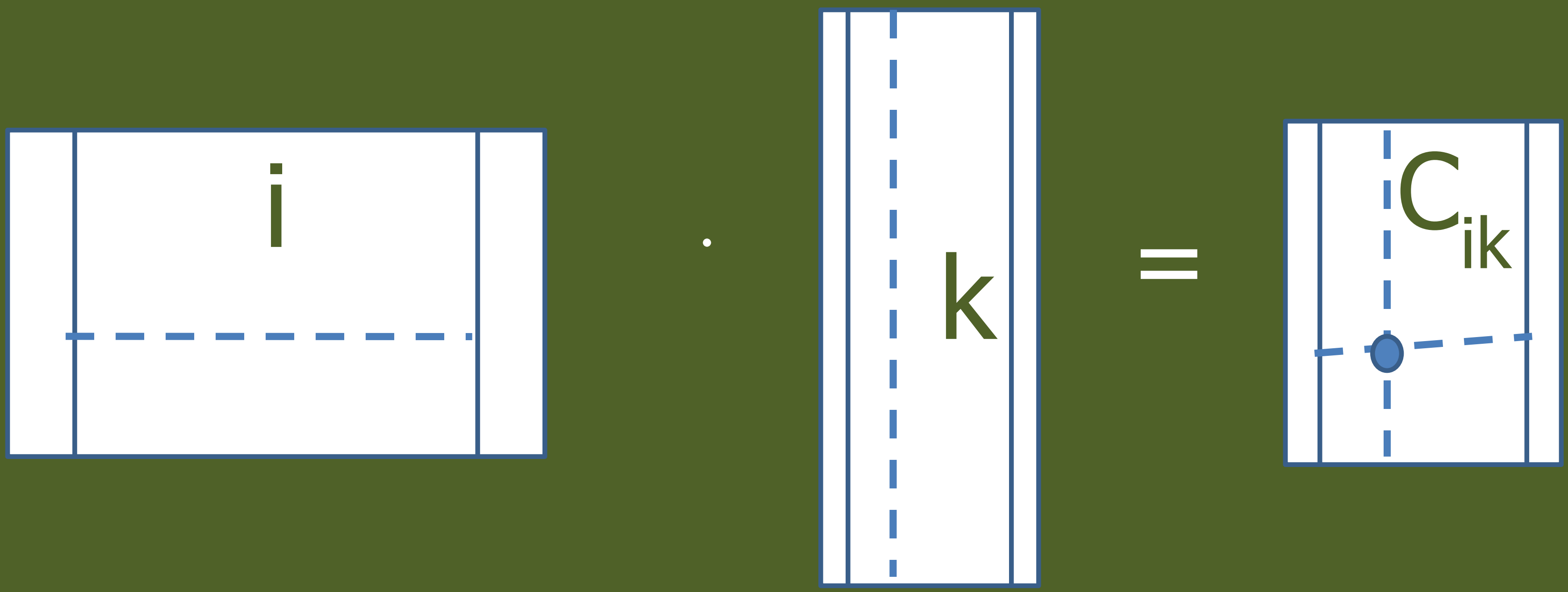
Вычисление элементов матрицы С

Элемент C_{ik} равен сумме произведений элементов

i-й строки матрицы А на k-й столбец матрицы В

Действия над матрицами

Вычисление элементов матрицы С



$$C_{ik} = a_{i1} \cdot b_{1k} + a_{i2} \cdot b_{2k} + + a_{i3} \cdot b_{3k} + \ldots + a_{in} \cdot b_{nk}$$

Действия над матрицами

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -4 & 5 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 6 & -3 \\ 7 & 1 \\ 8 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 44 & 20 \\ 24 & 25 \end{vmatrix}$$

$$C_{11} = 1 \cdot 6 + 2 \cdot 7 + 3 \cdot 8 = 44$$
$$C_{12} = 1 \cdot (-3) + 2 \cdot 1 + 3 \cdot 7 = 20$$
$$C_{21} = 2 \cdot 6 + (-4) \cdot 7 + 5 \cdot 8 = 24$$
$$C_{22} = 2 \cdot (-3) + (-4) \cdot 1 + 5 \cdot 7 = 25$$

Действия над матрицами

Частный случай:

произведение строчки на столбец дает <u>один элемент</u>, при этом число столбцов матрицы A должно равняться числу строк матрицы B

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \dots \\ b_{m1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c_{11} \end{vmatrix}$$

Действия над матрицами

Частный случай:

произведение столбца на строчку имеет смысл всегда, при этом число строк матрицы C равно числу строк матрицы A и число столбцов матрицы C равно числу столбцов матрицы B

$$\begin{vmatrix} a \\ b \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x & y & z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ax & ay & az \\ bx & by & bz \end{vmatrix}$$

Действия над матрицами

Свойство произведения матриц

В общем случае $AB \neq BA$

Если $AB = BA$, то такие матрицы называются перестановочными или коммутирующими.

Для квадратных матриц

$$AE = EA = A$$

где E – единичная матрица

Действия над матрицами

Пример

$$A = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \qquad B = \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 3 & -5 \end{vmatrix}$$

Найти AB и BA

Ответ

$$AB = \begin{vmatrix} 11 & -19 \\ 7 & -12 \end{vmatrix} \qquad BA = \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$$

Запись в матричной форме линейных уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 3 \\ 4x_1 + x_2 = 8 \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 20 \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} 2x_1 & -3x_2 & x_3 \\ 4x_1 & x_2 & 0\,x_3 \\ 3x_1 & 4x_2 & 2x_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 \\ 8 \\ 20 \end{vmatrix}$$

Запись в матричной форме линейных уравнений

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 4 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 \\ 8 \\ 20 \end{vmatrix}$$

A X B

AX = B , откуда X = A^{-1}B

Функции EXCEL для работы с матрицами

ТРАНСП() МУМНОЖ() МОБР()

Порядок работы

1. Записать исходную матрицу.
2. Выделить область ячеек для помещения результата.
3. Выбрать нужную функцию и записать аргументы.
4. Завершить командой матричной операции Ctrl + Shift + Enter.

Домашнее задание

1. Выучить конспект лекции.
2. Учебник Красс М.С., Чупрынов Б. П. Математика для экономистов.– СПб.: Питер, 2007 § 1.2.1, 1.2.2, 1.2.3, 1.2.4
3. Подготовится к практической работе № 1 «Действия с матрицами»

Определители

Определители

Определителем называется число, соответствующее квадратной матрице.

Число есть сумма $n!$ произведений элементов матрицы n-го порядка, взятых по одному из каждой строчки и каждого столбца. Знак каждого произведения определяется особым правилом.

Определители

Обозначения

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

$$|A| = \Delta = \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

Определители

Вычисление определителя второго порядка $n = 2$, $n! = 2$

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$$

$$\begin{vmatrix} \dots & \dots \\ \dots & \dots \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \dots & \dots \\ \dots & \dots \end{vmatrix}$$

Определители

Вычисление определителя третьего порядка n = 3, n! = 6

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32} - a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} - a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33} - a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32}$$

Определители

Правило Саррюса

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32} - - a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} - a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33} -$$

Определители

Правило Саррюса (вариант)

$$\left|\begin{array}{ccc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array}\right|$$

□ $\oplus$

$$a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32} - - a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} - a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33} -$$

Определители

Пример

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \\ -1 & 2 & 5 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{matrix} \Bigg|$$

$$\Delta = 5 - 8 + 12 - (-3 + 8 + 20) = -16$$

Минор элемента определителя

Минором какого либо элемента определителя называется определитель, полученный из данного, путем вычеркивания строки и столбца, на пересечении которых стоит элемент.

Минор элемента определителя

Пример: минор к элементу a_{11}

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$M_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \qquad M_{22} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Алгебраическое дополнение

Алгебраическим дополнением элемента определителя называется его минор, взятый со своим или противоположным знаком согласно правилу: если сумма номеров столбца и строки – четная, то минор берется со своим знаком, если нечетная то с противоположным.

Алгебраическое дополнение

Для выполнения этого правила перед минором записывается множитель

$$(-1)^{(i+k)}$$

<u>Теорема</u>

Определитель любого порядка равен сумме произведений элементов любой строки (столбца) на их алгебраические дополнения.

Алгебраическое дополнение

Для определителя 3-го порядка разложение по 1-й строке:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = (-1)^{1+1} \cdot a_1 \cdot \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} +$$

$$+ (-1)^{1+2} \cdot b_1 \cdot \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} + (-1)^{1+3} \cdot c_1 \cdot \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

Второе слагаемое берется со знаком минус!

Свойства определителей

1. Значение определителя при его транспонировании не изменяется.
2. При перестановке двух столбцов (строк) знак определителя изменяется на противоположный.
3. Определитель с двумя одинаковыми строками (столбцами) равен нулю.

4. Множитель общий для некоторого столбца (строки) может быть вынесен за знак определителя.
5. Значение определителя не изменяется, если к элементам некоторого столбца (строки) прибавить элементы другого столбца (строки), при этом прибавляемые элементы можно умножать на один и тот же ненулевой множитель.

Свойства определителей

Указанные свойства упрощают вычисление определителей.

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 4 \\ -5 & 4 & 3 \\ 3 & -6 & 2 \end{vmatrix} \begin{matrix} 2 \\ -3 \end{matrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 4 \\ -3 & 0 & 11 \\ 0 & 0 & -10 \end{vmatrix} =$$

Раскладываем по второму столбцу:

$$= (-1)^{1+2} \cdot (-2) \begin{vmatrix} -3 & 11 \\ 0 & -10 \end{vmatrix} = 60$$

Функция EXCEL для работы с определителем

МОПРЕД()

Порядок работы

1. Записать определитель.
2. Выделить одну ячейку для помещения результата.
3. Выбрать функцию МОПРЕД() и записать аргумент.
4. Завершить командой ОК или Enter. (Операция не матричная!)

Обратная матрица

Обратная матрица A^{-1} к квадратной матрице A существует только тогда, когда определитель $|A| \neq 0$

Вычисление обратной матрицы связано с нахождением присоединенной (взаимной) матрицы

Обратная матрица

Присоединенной матрицей называется матрица, составленная из алгебраических дополнений к исходной, в строчках которой расположены соответствующие элементы столбцов (транспонированная)

Обозначение : $\tilde{\acute{A}}$ или $A^{\vee}$

Обратная матрица

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{3n} \end{vmatrix}$$

$$A^{\vee} = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{vmatrix}, \text{ где}$$

Обратная матрица

$$A_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$A_{21} = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$ и т.д.

Обратная матрица

Теорема

Для присоединенной матрицы $A^{\vee}$ к квадратной матрицы A n-го порядка справедливо тождество

$$A^{\vee} \cdot A = A \cdot A^{\vee} = |A| \cdot E$$

Следствие: $\boxed{A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot A^{\vee}}$

Обратная матрица

$$A = \begin{vmatrix} 5 & 7 \\ 4 & 6 \end{vmatrix}$$

Найти A^{-1}

$$|A| = 30 - 28 = 2 \neq 0$$

$A_{11} = 6$ $A_{12} = -4$ $A_{21} = -7$ $A_{22} = 5$

$$A^{-1} = ½ \cdot \begin{vmatrix} 6 & -7 \\ -4 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -3{,}5 \\ -2 & 2{,}5 \end{vmatrix}$$

Вычисление обратной матрицы в EXCEL

1. Записать исходную матрицу.
2. Выделить область ячеек для обратной матрицы и задать формат ячеек – <u>дробный</u>.
3. Выбрать функцию МОБР() и записать аргумент.
4. Завершить командой матричной операции Ctrl + Shift + Enter.

Домашнее задание

1. Выучить конспект лекции.
2. Красс М.С., Чупрынов Б.П. Математика для экономистов.– СПб.: Питер, 2007. §§ 1.3.1, 1.3.2, 1.3.3 , 1.2.7, 1.5.1, 1.5.2
3. Подготовится к практической работе № 2 «Вычисление определителей, обратных матриц».

Системы линейных уравнений

Системы линейных уравнений

Постановка задачи

Найти решение системы n уравнений с n неизвестными ($x_1, x_2 \dots x_n$)

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \dots \quad \dots + a_{ik}x_k + \dots = b_i \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

Системы линейных уравнений

Обозначения:

X_k ($k = 1, 2, \dots n$) – неизвестные

a_{ik}, b_i – коэффициенты

i – порядковый номер уравнения

k – порядковый номер неизвестной

Системы линейных уравнений

Система, имеющая хотя бы одно решение, называется совместной.

Система, не имеющая решений, называется несовместной.

Система, имеющая единственное решение, называется определенной.

Система, имеющая множество решений, называется неопределенной.

Системы линейных уравнений

Теорема Крамера

Если определитель системы n уравнений с n неизвестными не равен нулю, то система совместна и имеет единственное решение:

$$x_1 = \frac{D_1}{D} \qquad x_2 = \frac{D_2}{D} \qquad x_n = \frac{D_n}{D}$$

Системы линейных уравнений

где:

D – определитель, составленный из коэффициентов a_{ik}

D_1, D_2 … D_N - определитель, полученный из D путем замены k-го столбца столбцом коэффициентов b_i

Системы линейных уравнений

Пример: $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 5 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 6 \\ x_1 + 5x_2 = -3 \end{cases}$

$$D = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 5 & 0 \end{vmatrix} \cdot (-1) = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -1 & -3 & 0 \\ 1 & 5 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= (-1)^{3+1} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} -1 & -3 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = -5 + 3 = -2 \neq 0$$

Системы линейных уравнений

$$D_1 = \begin{vmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 6 & -1 & 1 \\ -3 & 5 & 0 \end{vmatrix} \cdot (-1) = \begin{vmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 1 & -3 & 0 \\ -3 & 5 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= (-1)^{3+1} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 5 \end{vmatrix} = 5 - 9 = -4$$

Системы линейных уравнений

$$D_2 = \begin{vmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 2 & 6 & 1 \\ 1 & -3 & 0 \end{vmatrix} \cdot (-1) = \begin{vmatrix} 3 & 5 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= (-1)^{3+1} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = 3 - 1 = 2$$

Системы линейных уравнений

$$D_3 = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 2 & -1 & 6 \\ 1 & 5 & -3 \end{vmatrix} \begin{matrix} 2 \\ \\ 5 \end{matrix} = \begin{vmatrix} 7 & 0 & 17 \\ 2 & -1 & 6 \\ 11 & 0 & 27 \end{vmatrix} =$$

$$= (-1)^{2+2} \cdot (-1) \begin{vmatrix} 7 & 17 \\ 11 & 27 \end{vmatrix} =$$

$$= -189 + 187 = -2$$

Системы линейных уравнений

$$x_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{-4}{-2} = 2$$

$$x_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{2}{-2} = -1$$

$$x_3 = \frac{D_3}{D} = \frac{-2}{-2} = 1$$

Матричное выражение формулы Крамера

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{vmatrix}$$

$A \qquad\qquad X \qquad\qquad B$

$AX = B$, откуда $X = A^{-1}B$

Матричное выражение формулы Крамера

$$\begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{vmatrix} = \frac{1}{D} \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{vmatrix}}_{\text{Обратная матрица}} \cdot \begin{vmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{vmatrix}$$

Реализация матричного выражения формулы Крамера в EXCEL

1. Записать матрицу коэффициентов и матрицу свободных членов уравнения.
2. Выделить квадратную область и найти обратную матрицу (МОБР)
3. Выделить столбец результата и поместить туда произведение обратной матрицы на матрицу коэффициентов (МУМНОЖ)

Матричное выражение формулы Крамера

Тот же пример:

$$A = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 5 & 0 \end{vmatrix} \qquad B = \begin{vmatrix} 5 \\ 6 \\ -3 \end{vmatrix}$$

$$A^{-1} = -\frac{1}{2} \begin{vmatrix} -5 & 5 & 3 \\ 1 & -1 & -1 \\ 11 & -13 & -7 \end{vmatrix}$$

Матричное выражение формулы Крамера

$$\begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{vmatrix} = -\frac{1}{2} \begin{vmatrix} -5 & 5 & 3 \\ 1 & -1 & -1 \\ 11 & -13 & -7 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 5 \\ 6 \\ -3 \end{vmatrix} =$$

$$= -\frac{1}{2} \begin{vmatrix} 4 \\ 2 \\ -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{vmatrix}$$

Ответ:

$x_1 = 2$

$x_2 = -1$

$x_3 = 1$

Системы линейных уравнений

Решение системы линейных уравнений методом исключения неизвестных (метод Гаусса)

Метод основан на преобразовании расширенной матрицы коэффициентов уравнения в трапециевидную:

Системы линейных уравнений

$$\left|\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} & b_n \end{array}\right| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left|\begin{array}{cccc|c} a'_{11} & a'_{12} & \ldots & a'_{1n} & b'_1 \\ 0 & 0 & \ldots & a'_{2n} & b'_2 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & a'_{nn} & b'_n \end{array}\right|$$

Системы линейных уравнений

и затем последовательному нахождению $(x_n, x_{n-1} \dots x_2, x_1)$

$$x_n = \frac{b'_n}{a'_{nn}}$$

Подставляя найденное значение x_n в предыдущую строку, находим x_{n-1} и т.д., до нахождения x_1

Системы линейных уравнений

При преобразовании расширенной матрицы коэффициентов уравнения в трапециевидную, используются следующие действия, обеспечивающие равносильность исходной и преобразованной системы уравнений:

Системы линейных уравнений

1. Умножение какой-либо строки на ненулевой множитель.
2. Прибавление к какой-либо строке другой строки, в том числе умноженной на ненулевой множитель.
3. Перестановка любых строк расширенной матрицы.

Системы линейных уравнений

Пример: $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 5 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 6 \\ x_1 + 5x_2 = -3 \end{cases}$

Составляем матрицу и преобразуем к диагональному виду :

$$\left|\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & 0 & -3 \\ 2 & -1 & 1 & 6 \\ 3 & 2 & 1 & 5 \end{array}\right| \begin{array}{c} -2 \\ \\ -3 \end{array} =$$

$$\left|\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & 0 & -3 \\ 0 & -11 & 1 & 12 \\ 0 & -13 & 1 & 14 \end{array}\right| \begin{array}{c} \\ \\ -1 \end{array} = \left|\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & 0 & -3 \\ 0 & -11 & 1 & 12 \\ 0 & -2 & 0 & 2 \end{array}\right| \Rightarrow$$

Системы линейных уравнений

Пример: $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 5 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 6 \\ x_1 + 5x_2 = -3 \end{cases}$

Составляем расширенную матрицу и преобразуем к диагональному виду :

$$\left|\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & 0 & -3 \\ 2 & -1 & 1 & 6 \\ 3 & 2 & 1 & 5 \end{array}\right| \begin{array}{c} -2 \\ \\ -3 \end{array} = \left|\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & 0 & -3 \\ 0 & -11 & 1 & 12 \\ 0 & -13 & 1 & 14 \end{array}\right| = \; -$$