

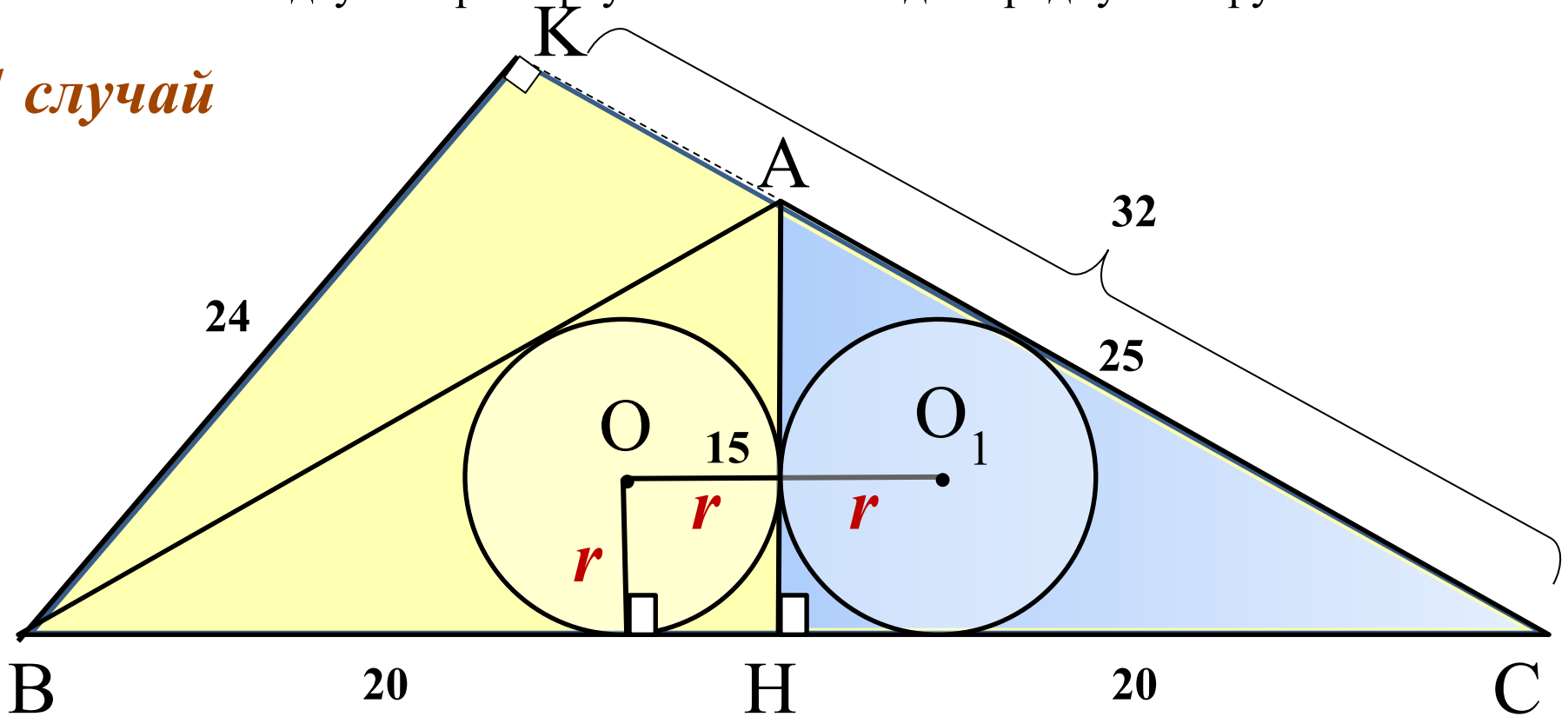
Сборник задач по планиметрии.



С4

ЗАДАЧА №1. Основание равнобедренного треугольника равно 40, а высота, опущенная на боковую сторону равна 24. Внутри треугольника расположены две равные касающиеся окружности, каждая из которых касается двух сторон треугольника. Найдите радиусы окружностей.

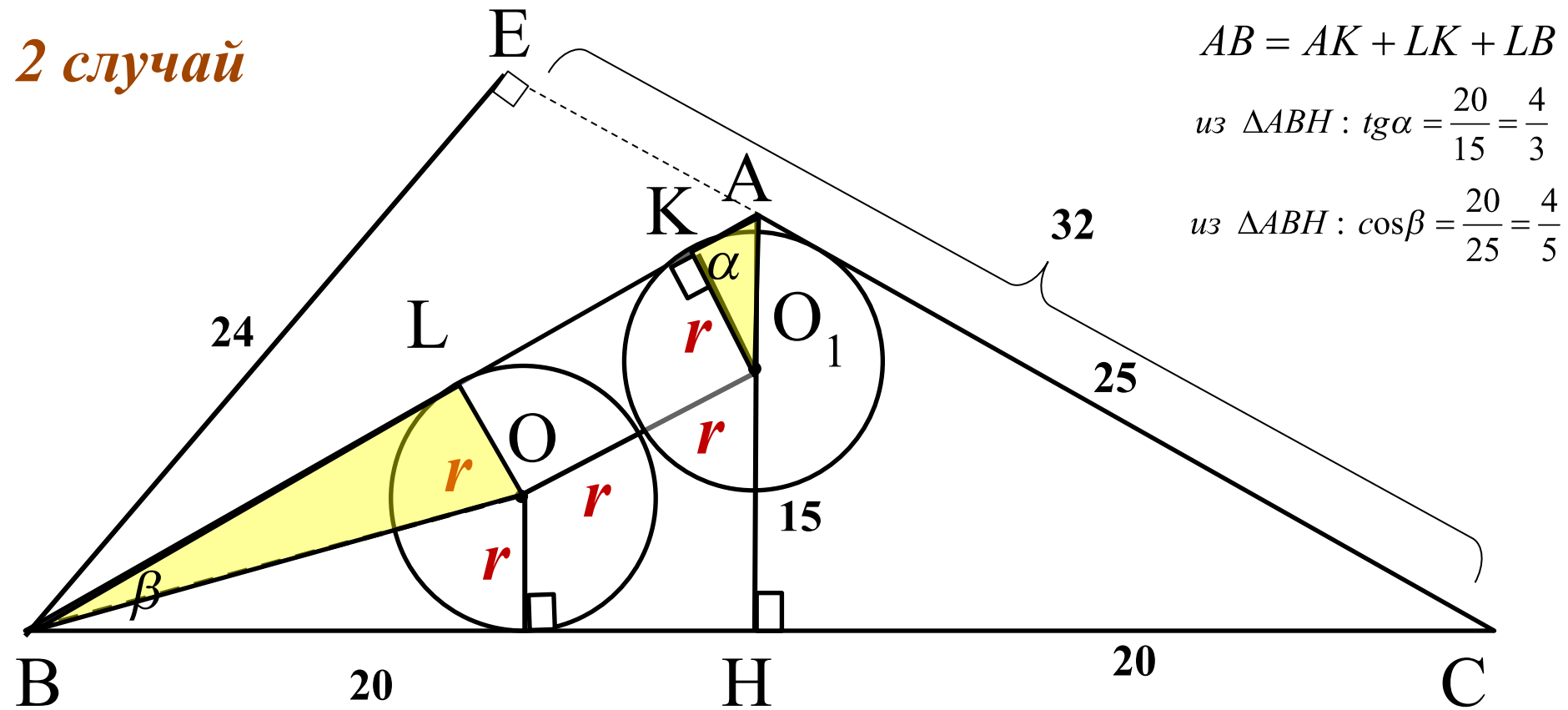
1 случай



$$\Delta BKC \sim \Delta AHC, \Rightarrow \frac{AH}{BK} = \frac{AC}{BC} = \frac{HC}{KC}, \quad \frac{AH}{24} = \frac{AC}{40} = \frac{20}{32}, \Rightarrow AH = 15, AC = 25$$

$$S_{\Delta ABH} = \frac{1}{2} \cdot 20 \cdot 15 = 150, \quad p_{\Delta ABH} = \frac{15 + 20 + 25}{2} = 30, \quad r = \frac{150}{30} = 5.$$

2 случай



$$AB = AK + LK + LB$$

$$\text{из } \triangle ABH : \operatorname{tg} \alpha = \frac{20}{15} = \frac{4}{3}$$

$$\text{из } \triangle ABH : \cos \beta = \frac{20}{25} = \frac{4}{5}$$

$$\left. \begin{aligned} AK &= \frac{O_1K}{\operatorname{tg} \alpha} = \frac{3r}{4}, \\ LK &= 2r, \\ BL &= \frac{OL}{\operatorname{tg} \frac{\beta}{2}} = 3r, \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{3r}{4} + 2r + 3r = 25 \Rightarrow r = \frac{100}{23}$$

$$2 \cos^2 \frac{\beta}{2} - 1 = \frac{4}{5}, \Rightarrow \cos \frac{\angle B}{2} = \frac{3}{\sqrt{10}}, \Rightarrow \sin \frac{\angle B}{2} = \frac{1}{\sqrt{10}}, \Rightarrow \operatorname{tg} \frac{\angle B}{2} = \frac{1}{3}$$

Ответ: 5 или $\frac{100}{23}$

Задачи для самостоятельного решения

- Основание равнобедренного треугольника равно 5, а высота, опущенная на боковую сторону равна 3. Внутри треугольника расположены две равные касающиеся окружности, каждая из которых касается двух сторон треугольника. Найдите радиусы окружностей.

Ответ: $\frac{5}{8}$ или $\frac{25}{46}$

- Основание равнобедренного треугольника равно 5, а высота, опущенная на боковую сторону равна 4. Внутри треугольника расположены две равные касающиеся окружности, каждая из которых касается двух сторон треугольника. Найдите радиусы окружностей.

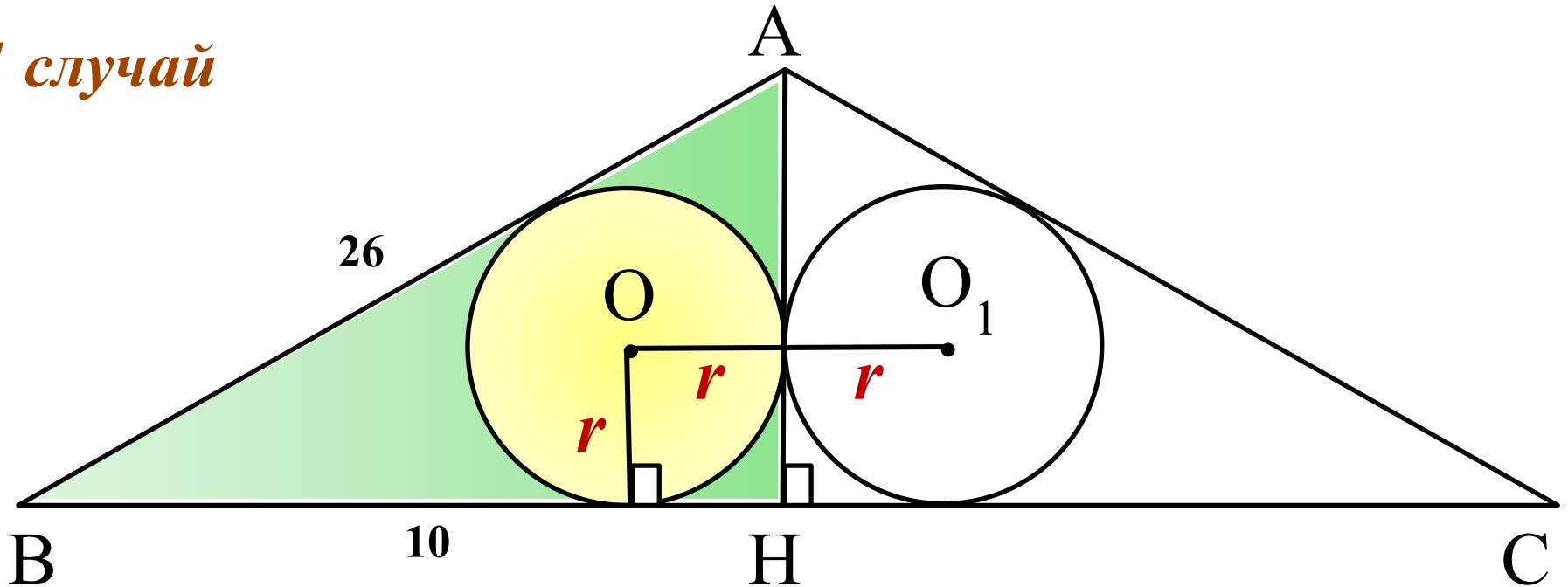
Ответ: $\frac{5}{6}$ или $\frac{25}{32}$

- Основание равнобедренного треугольника равно 80, а высота, опущенная на боковую сторону равна 64. Внутри треугольника расположены две равные касающиеся окружности, каждая из которых касается двух сторон треугольника. Найдите радиусы окружностей.

Ответ: $\frac{40}{3}$ или $\frac{25}{2}$

ЗАДАЧА №2. Дан треугольник со сторонами 26, 26 и 20. Внутри него расположены две равные касающиеся окружности, каждая из которых касается двух сторон треугольника. Найдите радиусы окружностей.

1 случай

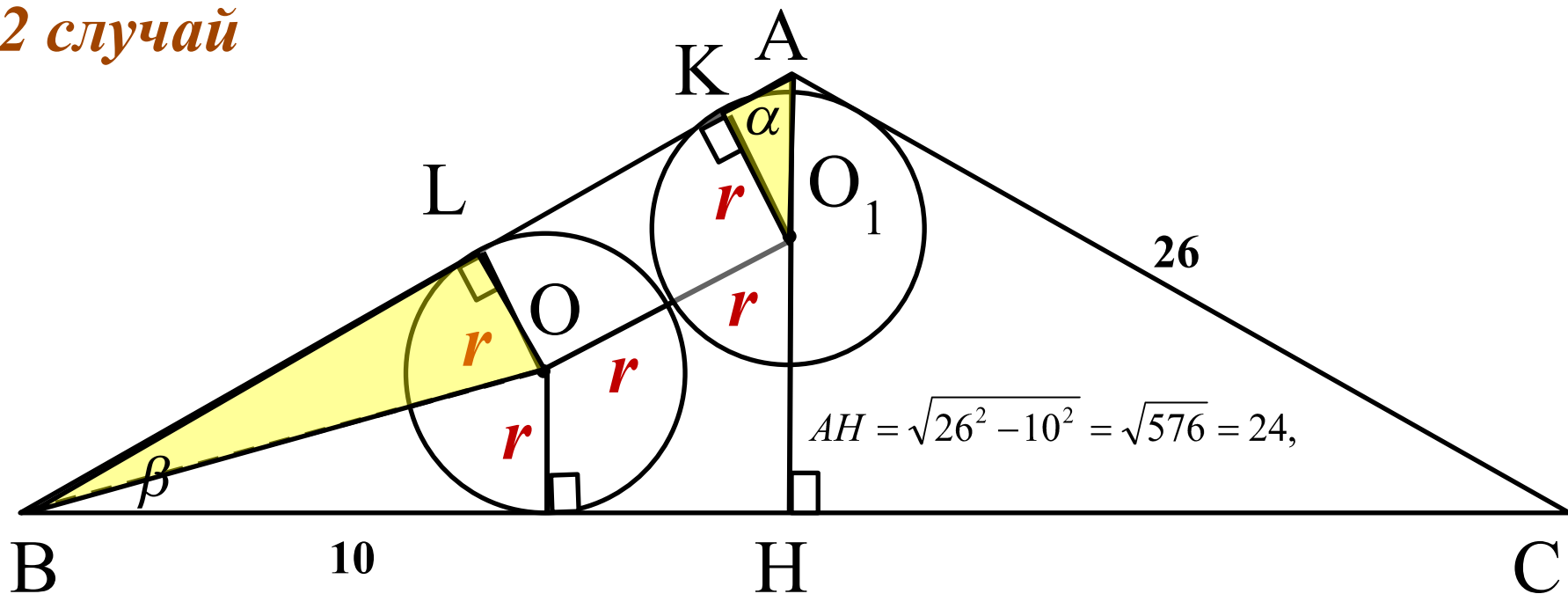


$$AH = \sqrt{26^2 - 10^2} = \sqrt{576} = 24,$$

$$S_{\triangle ABH} = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 24 = 120, \quad p_{\triangle ABH} = \frac{10 + 24 + 26}{2} = 30,$$

$$r = \frac{120}{30} = 4.$$

2 случай



$$AB = AK + LK + LB \quad \text{из } \triangle ABH : \operatorname{tg} \alpha = \frac{10}{24} = \frac{5}{12} \quad \text{из } \triangle ABH : \cos \beta = \frac{10}{26} = \frac{5}{13}$$

$$AK = \frac{O_1K}{\operatorname{tg} \alpha} = \frac{12r}{5},$$

$$LK = 2r,$$

$$BL = \frac{OL}{\operatorname{tg} \frac{\beta}{2}} = \frac{3r}{2},$$

$$\left. \begin{array}{l} AK = \frac{12r}{5} \\ LK = 2r \\ BL = \frac{3r}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{12r}{5} + 2r + \frac{3r}{2} = 26 \Rightarrow r = \frac{260}{59}$$

$$2 \cos^2 \frac{\beta}{2} - 1 = \frac{5}{13}, \Rightarrow \cos \frac{\angle B}{2} = \frac{3}{\sqrt{13}}, \Rightarrow \sin \frac{\angle B}{2} = \frac{2}{\sqrt{13}}, \Rightarrow \operatorname{tg} \frac{\angle B}{2} = \frac{2}{3}$$

Ответ: 4 или $\frac{260}{59}$

Задачи для самостоятельного решения

• Дан треугольник со сторонами 115, 115 и 184. Внутри него расположены две равные касающиеся окружности, каждая из которых касается двух сторон треугольника. Найдите радиусы окружностей.

Ответ: 23 или 20

• Дан треугольник со сторонами 30, 30 и 36. Внутри него расположены две равные касающиеся окружности, каждая из которых касается двух сторон треугольника. Найдите радиусы окружностей.

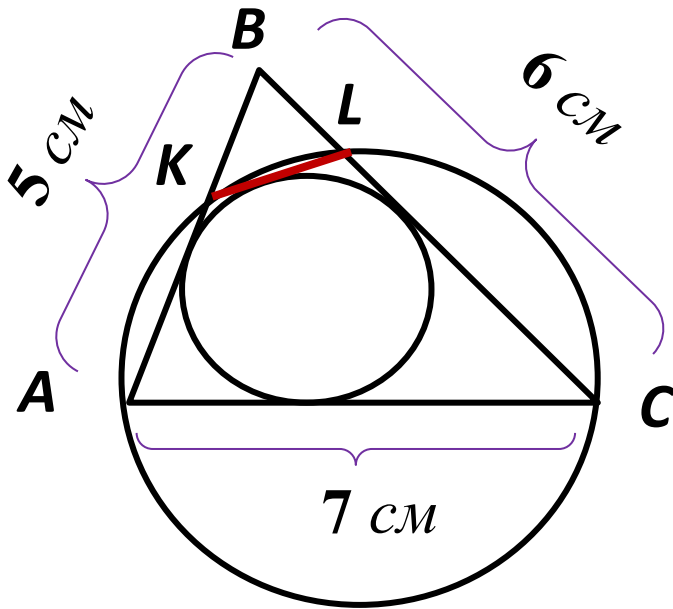
Ответ: 6 или $\frac{45}{8}$

• Дан треугольник со сторонами 13, 13 и 10. Внутри него расположены две равные касающиеся окружности, каждая из которых касается двух сторон треугольника. Найдите радиусы окружностей.

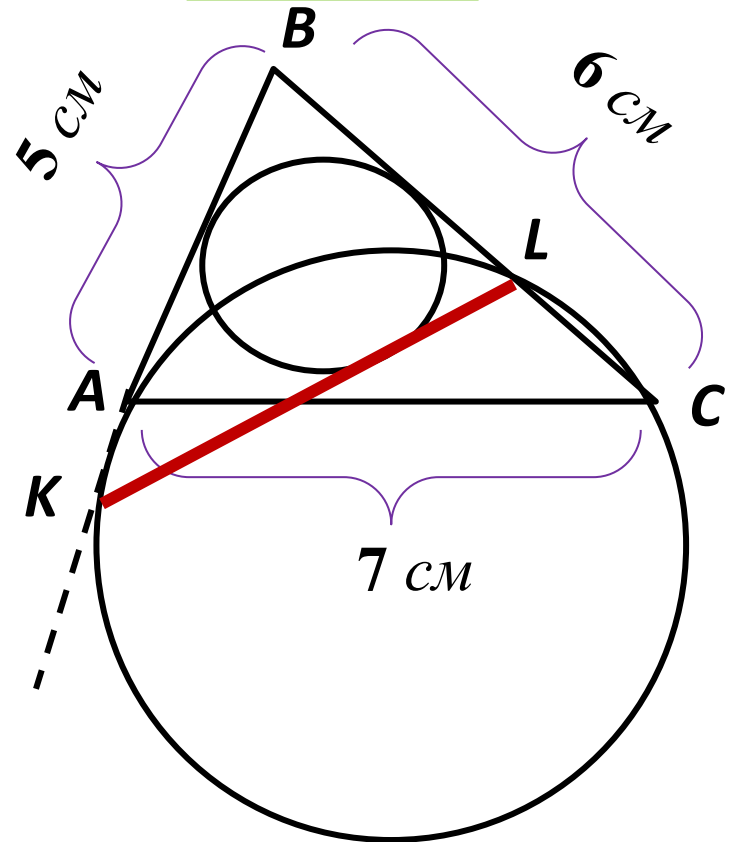
Ответ: 2 или $\frac{130}{59}$

ЗАДАЧА №3. В треугольнике ABC известны стороны: $AB=5$, $BC=6$, $AC=7$. Окружность, проходящая через точки A и C , пересекает прямые BA и BC соответственно в точках K и L , отличных от вершин треугольника. Отрезок KL касается окружности, вписанной в треугольник ABC . Найдите длину отрезка KL .

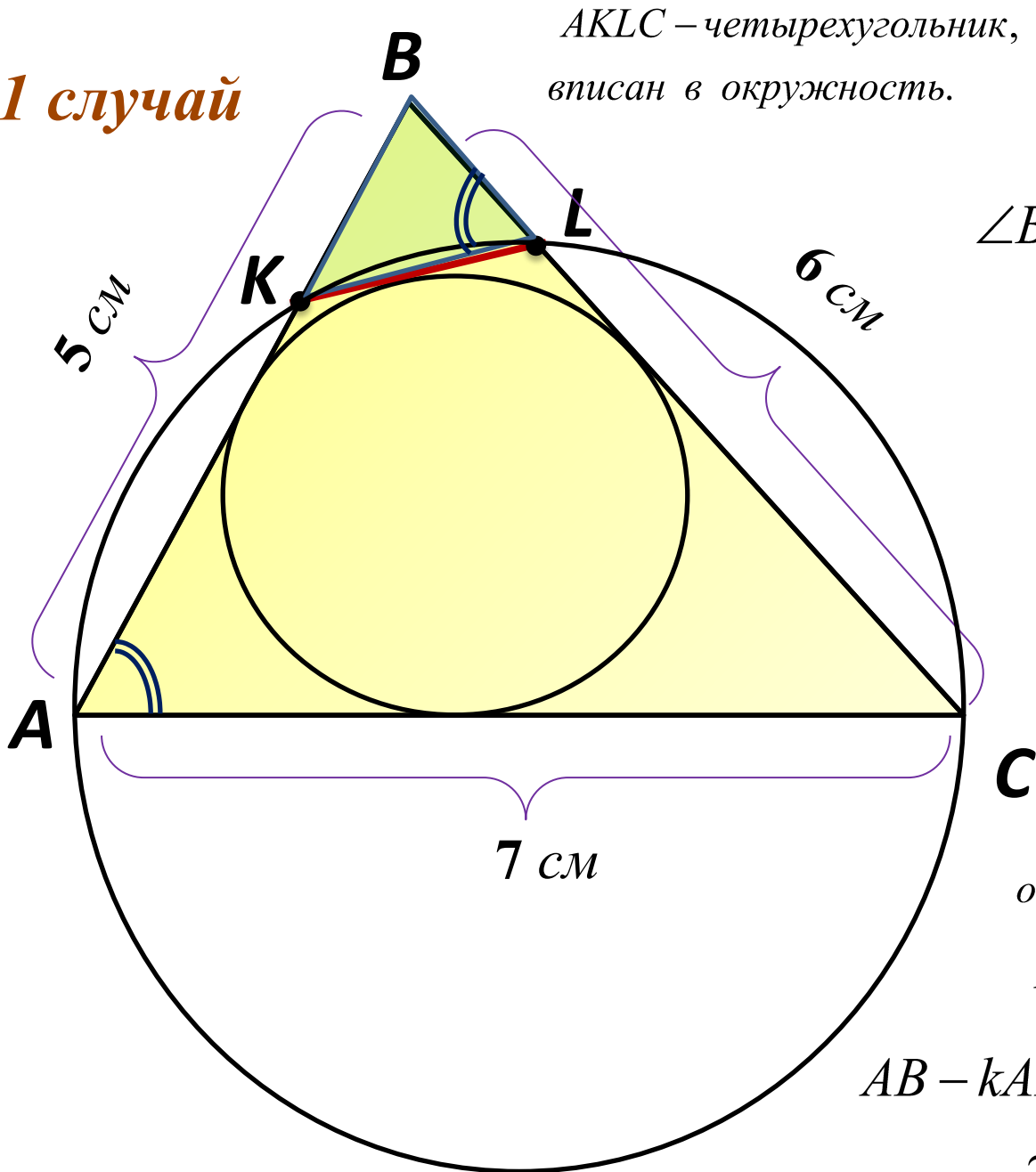
1 Случай



2 Случай



1 случай



*AKLC – четырехугольник,
вписан в окружность.*

$$\triangle ABC \sim \triangle KBL$$

$\angle B$ – общий;

$$\angle BAC = \angle KLB = 180^\circ - \angle KLC;$$

\Downarrow

$$\frac{KL}{AC} = \frac{BK}{BC} = \frac{BL}{AB} = k$$

\Downarrow

$$KL = k \cdot AC;$$

$$BK = k \cdot BC;$$

$$BL = k \cdot BA$$

*Т.к. AKLC – четырехугольник,
описанный около окружности, то*

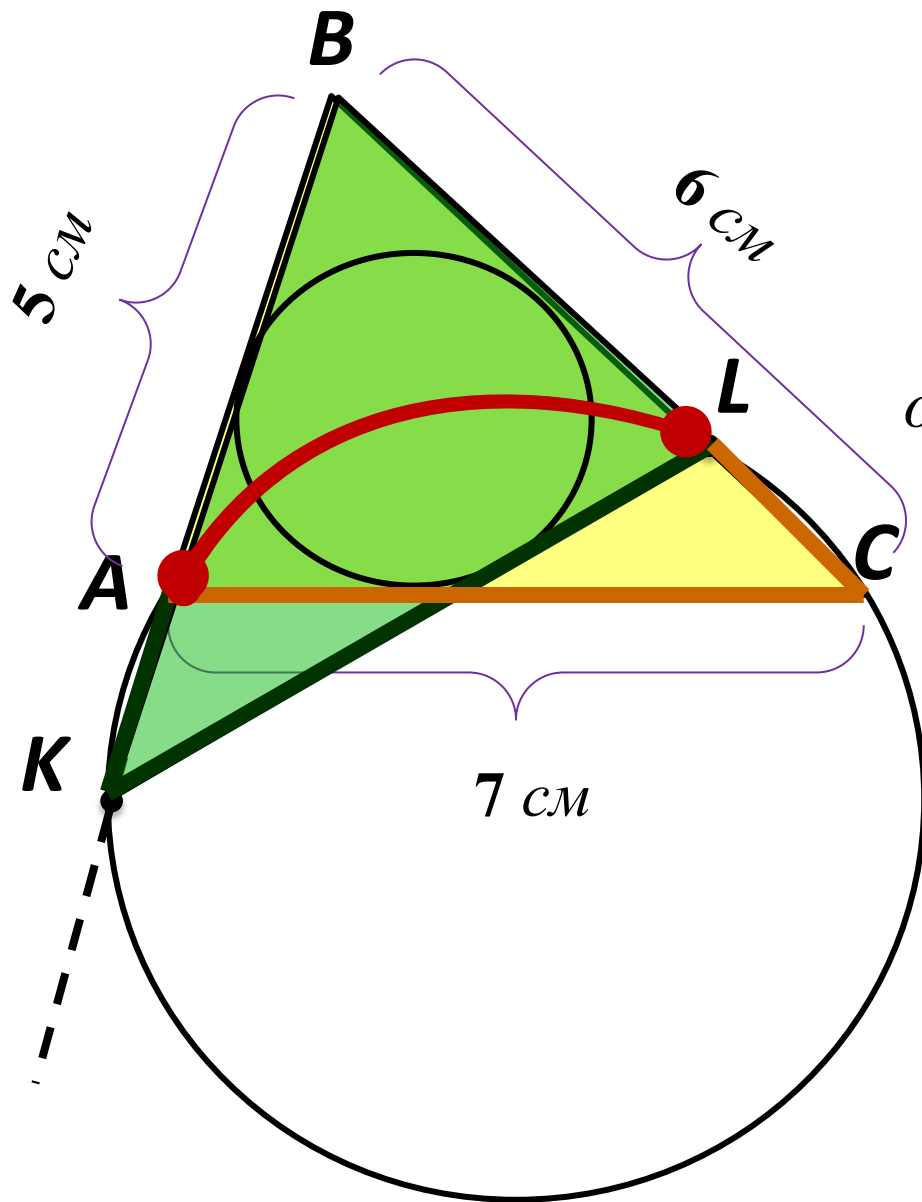
$$AK + LC = AC + KL$$

$$AB - kAB + BC - kBC = AC + kAC$$

$$k = \frac{2}{9}, \Rightarrow KL = 7 \cdot \frac{2}{9} = \frac{14}{9}.$$

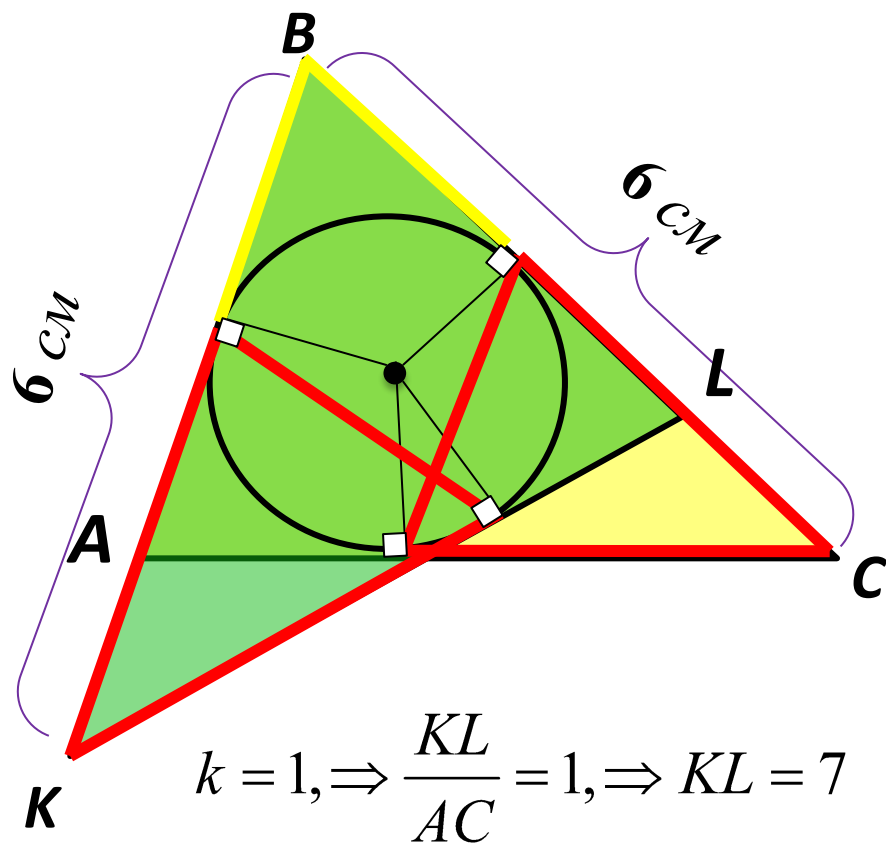
2 случай

$\triangle ABC \sim \triangle KBL$: $\angle B$ – общий; $\angle BKL = \angle ACB = \frac{1}{2} \cup AL$



$$\frac{KL}{AC} = \frac{BK}{BC} = \frac{BL}{AB} = k$$

т. к. $\triangle ABC$ и $\triangle KBL$ описаны около одной окружности



$$k = 1, \Rightarrow \frac{KL}{AC} = 1, \Rightarrow KL = 7$$

Задачи для самостоятельного решения

- В треугольнике ABC известны стороны: $AB = 4$, $BC = 6$, $AC = 5$. Окружность, проходящая через точки A и C , пересекает прямые BA и BC соответственно в точках K и L , отличных от вершин треугольника. Отрезок KL касается окружности, вписанной в треугольник ABC . Найдите длину отрезка KL .

Ответ: $\frac{5}{3}$ или 5

- В треугольнике ABC известны стороны: $AB = 7$, $BC = 10$, $AC = 8$. Окружность, проходящая через точки A и C , пересекает прямые BA и BC соответственно в точках K и L , отличных от вершин треугольника. Отрезок KL касается окружности, вписанной в треугольник ABC . Найдите длину отрезка KL .

Ответ: $\frac{72}{25}$ или 8

- В треугольнике ABC известны стороны: $AB = 5$, $BC = 7$, $AC = 8$. Окружность, проходящая через точки A и C , пересекает прямые BA и BC соответственно в точках K и L , отличных от вершин треугольника. Отрезок KL касается окружности, вписанной в треугольник ABC . Найдите длину отрезка KL .

Ответ: $\frac{8}{5}$ или 8

Задачи для самостоятельного решения

- В треугольнике ABC известны стороны: $AB = 9$, $BC = 10$, $AC = 11$. Окружность, проходящая через точки A и C , пересекает прямые BA и BC соответственно в точках K и L , отличных от вершин треугольника. Отрезок KL касается окружности, вписанной в треугольник ABC . Найдите длину отрезка KL .

Ответ: $\frac{44}{15}$ или 11

- В треугольнике ABC известны стороны: $AB = 8$, $BC = 10$, $AC = 11$. Окружность, проходящая через точки A и C , пересекает прямые BA и BC соответственно в точках K и L , отличных от вершин треугольника. Отрезок KL касается окружности, вписанной в треугольник ABC . Найдите длину отрезка KL .

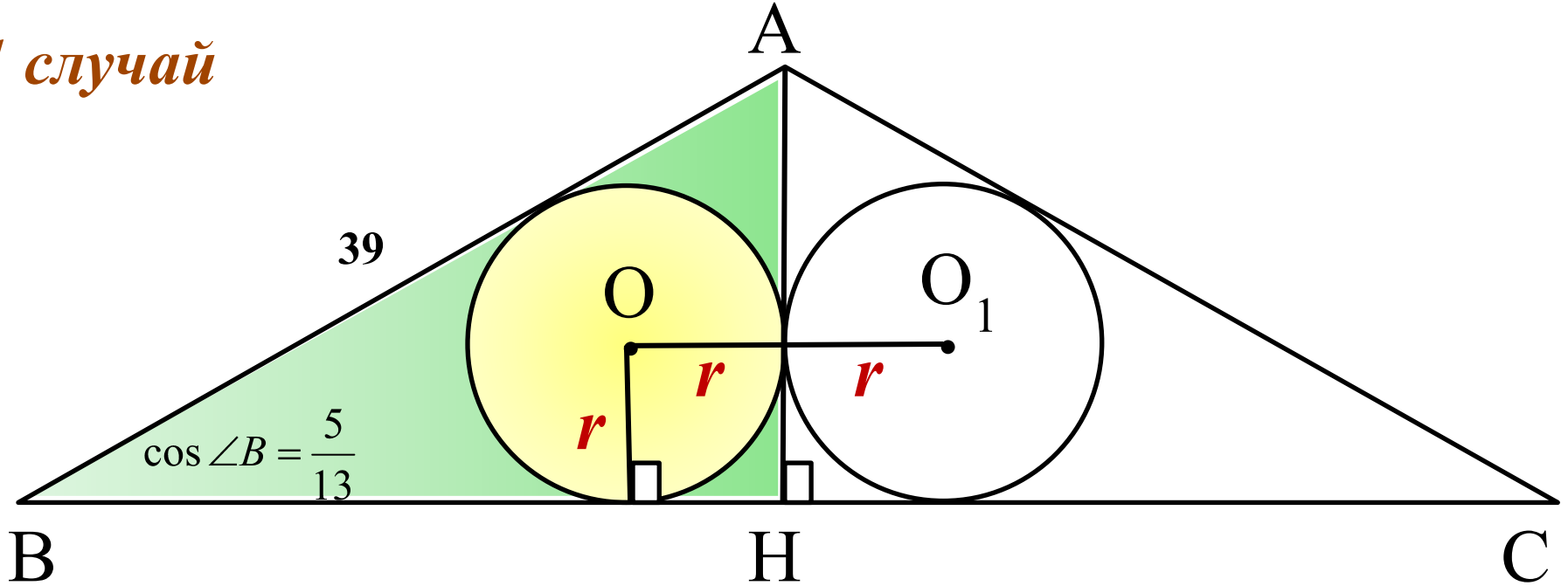
Ответ: $\frac{77}{29}$ или 11

- В треугольнике ABC известны стороны: $AB = 7$, $BC = 9$, $AC = 10$. Окружность, проходящая через точки A и C , пересекает прямые BA и BC соответственно в точках K и L , отличных от вершин треугольника. Отрезок KL касается окружности, вписанной в треугольник ABC . Найдите длину отрезка KL .

Ответ: $\frac{30}{13}$ или 10

ЗАДАЧА №4. Косинус угла при основании равнобедренного треугольника равен $\frac{5}{13}$, а боковая сторона равна 39. Внутри треугольника расположены две равные касающиеся окружности, каждая из которых касается двух сторон треугольника. Найдите радиусы окружностей.

1 случай

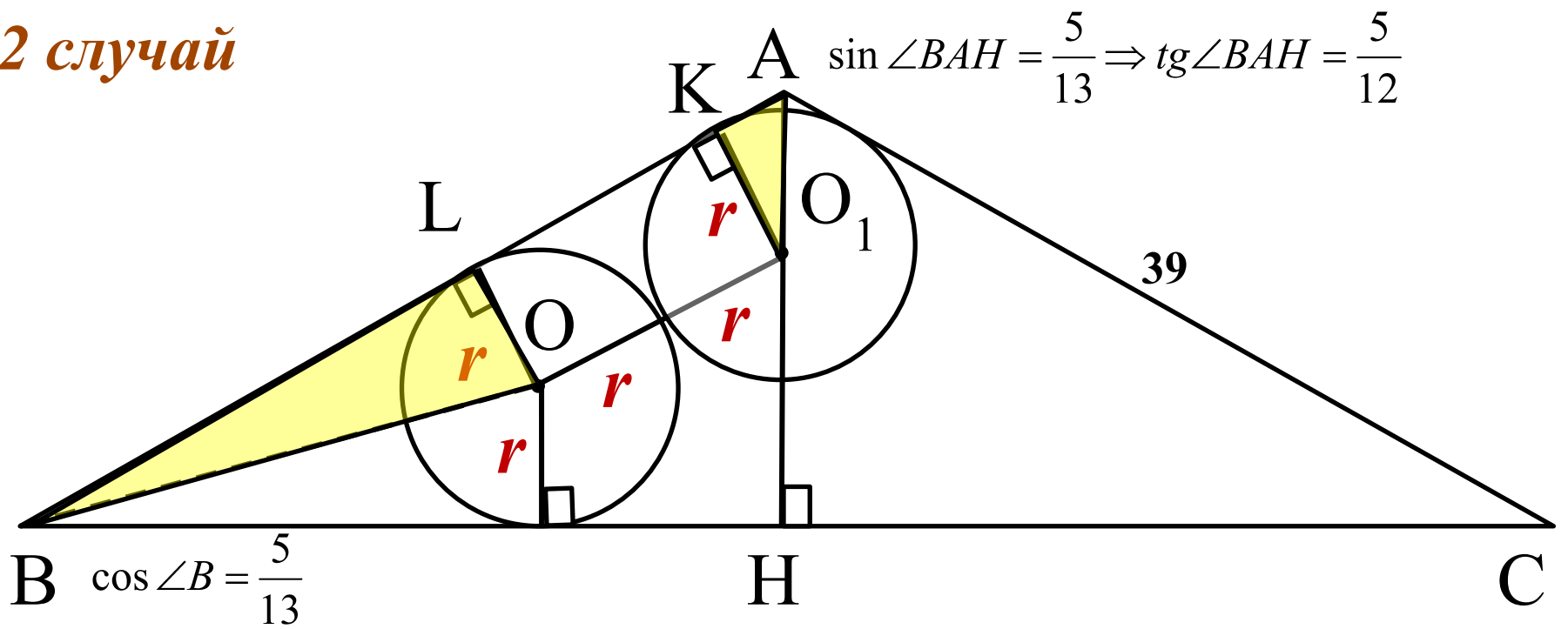


$$BH = AB \cdot \cos \angle B = 15, \quad AH = \sqrt{AB^2 - BH^2} = \sqrt{39^2 - 15^2} = 36,$$

$$S_{\triangle ABH} = \frac{1}{2} \cdot 15 \cdot 36 = 270, \quad p_{\triangle ABH} = \frac{15 + 39 + 36}{2} = 45,$$

$$r = \frac{270}{45} = 6.$$

2 случай



$$AB = AK + LK + LB$$

$$AK = \frac{O_1K}{\operatorname{tg} \angle BAH} = \frac{12r}{5},$$

$$LK = 2r,$$

$$BL = \frac{OL}{\operatorname{tg} \frac{\angle B}{2}} = \frac{3r}{2},$$

$$\left. \begin{array}{l} AK = \frac{12r}{5} \\ LK = 2r \\ BL = \frac{3r}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{12r}{5} + 2r + \frac{3r}{2} = 39 \Rightarrow r = \frac{390}{59}$$

$$2 \cos^2 \frac{\angle B}{2} - 1 = \frac{5}{13}, \Rightarrow \cos \frac{\angle B}{2} = \frac{3}{\sqrt{13}}, \Rightarrow \sin \frac{\angle B}{2} = \frac{2}{\sqrt{13}}, \Rightarrow \operatorname{tg} \frac{\angle B}{2} = \frac{2}{3}$$

Ответ: 6 или $\frac{390}{59}$

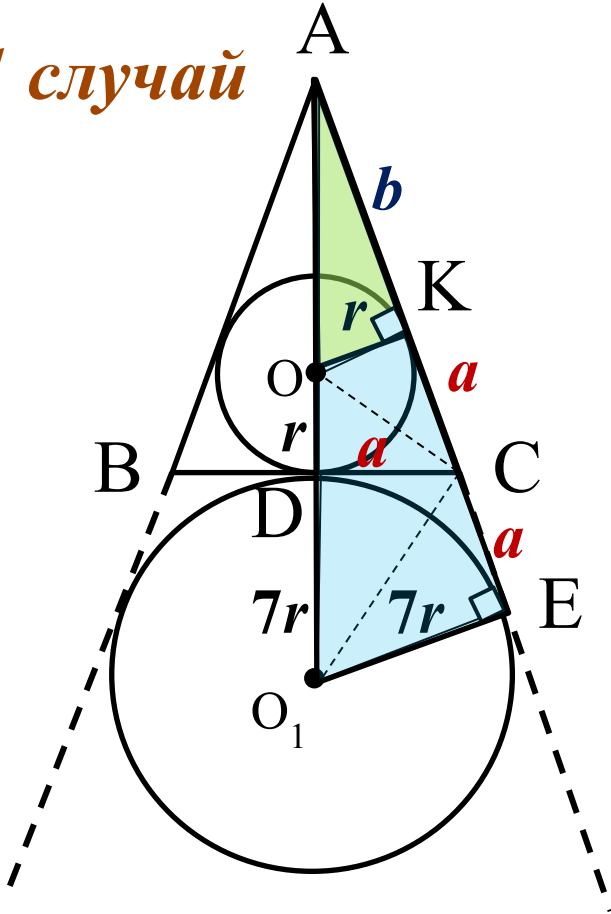
Задачи для самостоятельного решения

- Дан равнобедренный треугольник с основанием 16. Косинус одного из углов равен $7/25$. Две равные окружности, касающиеся друг друга и двух сторон треугольника, вписаны в треугольник. Найти их радиусы.

Ответ: $\frac{16}{5}$ или $\frac{64}{23}$

ЗАДАЧА №5. В каком отношении точка касания вписанной в равнобедренный треугольник окружности делит его боковую сторону, если известно, что радиус окружности, касающейся стороны треугольника и продолжений двух других его сторон, в 7 раз больше радиуса вписанной окружности?

1 случай



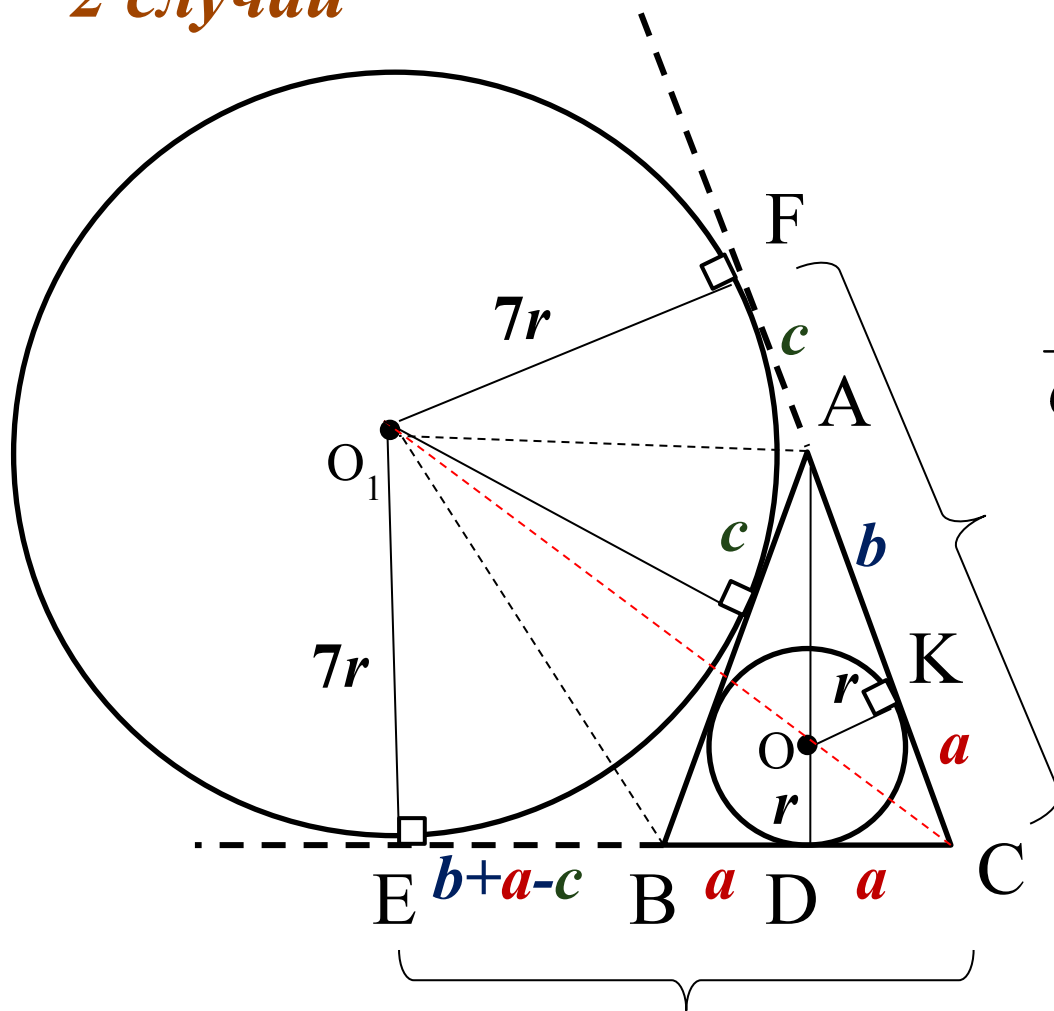
$$\triangle AOK \sim \triangle AO_1E,$$

$$\frac{OK}{O_1E} = \frac{AK}{AE}, \quad \frac{r}{7r} = \frac{b}{b+2a},$$

$$\frac{b}{b+2a} = \frac{1}{7}, \quad 7b = b + 2a, \quad 6b = 2a, \quad a = 3b$$

$$\frac{KC}{AK} = \frac{a}{b} = \frac{3b}{b} = 3.$$

2 случай



$$c + b + a = 3a + b - c$$

$$a = c$$

$$\triangle COK \sim \triangle CO_1F,$$

$$\frac{OK}{O_1E} = \frac{CK}{CF}, \quad \frac{r}{7r} = \frac{a}{b+2a},$$

$$\frac{1}{7} = \frac{a}{b+2a},$$

$$7a = b + 2a,$$

$$b = 5a,$$

$$\frac{KC}{AK} = \frac{a}{b} = \frac{a}{5a} = \frac{1}{5}.$$

Задачи для самостоятельного решения

- В каком отношении точка касания вписанной в равнобедренный треугольник окружности делит его боковую сторону, если известно, что отношение радиусов его вписанной окружности и окружности, касающейся стороны треугольника и продолжений двух других сторон, равно $2/7$?

Ответ: $\frac{5}{4}$ или $\frac{2}{3}$

- Дан равнобедренный треугольник. Найти угол при основании этого треугольника, если радиус вписанной окружности относится к радиусу окружности, касающейся одной из сторон и продолжений двух других сторон, как $1 : 4$.

Ответ: $2\arctg \frac{1}{2}$; $2\arctg \frac{\sqrt{2}}{2}$

- В каком отношении точка касания вписанной в равнобедренный треугольник окружности делит его боковую сторону, если известно, что отношение радиусов его вписанной окружности и окружности, касающейся стороны треугольника и продолжений двух других его сторон, равно $1/5$?

Ответ: 2 или $\frac{1}{3}$

- Найдите косинус угла при основании равнобедренного треугольника, если известно, что радиус его вписанной окружности в 6 раз меньше радиуса окружности, касающейся стороны и продолжений двух других сторон треугольника.

Ответ: $\frac{5}{7}$ или $\frac{1}{5}$

ЗАДАЧА №6. Боковые стороны KL и MN трапеции $KLMN$ равны 10 и 26 соответственно. Отрезок, соединяющий середины диагоналей, равен 12, средняя линия трапеции равна 24. Прямые KL и MN пересекаются в точке A . Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник ALM .

1 случай:

$$\left. \begin{array}{l} \text{из } \triangle LNM : LM = 2x \\ \text{из } \triangle LKM : LM = 24 - 2x \end{array} \right\} \Rightarrow 24 - 2x = 2x$$

$$x = 6, \Rightarrow LM = 12, KN = 36$$

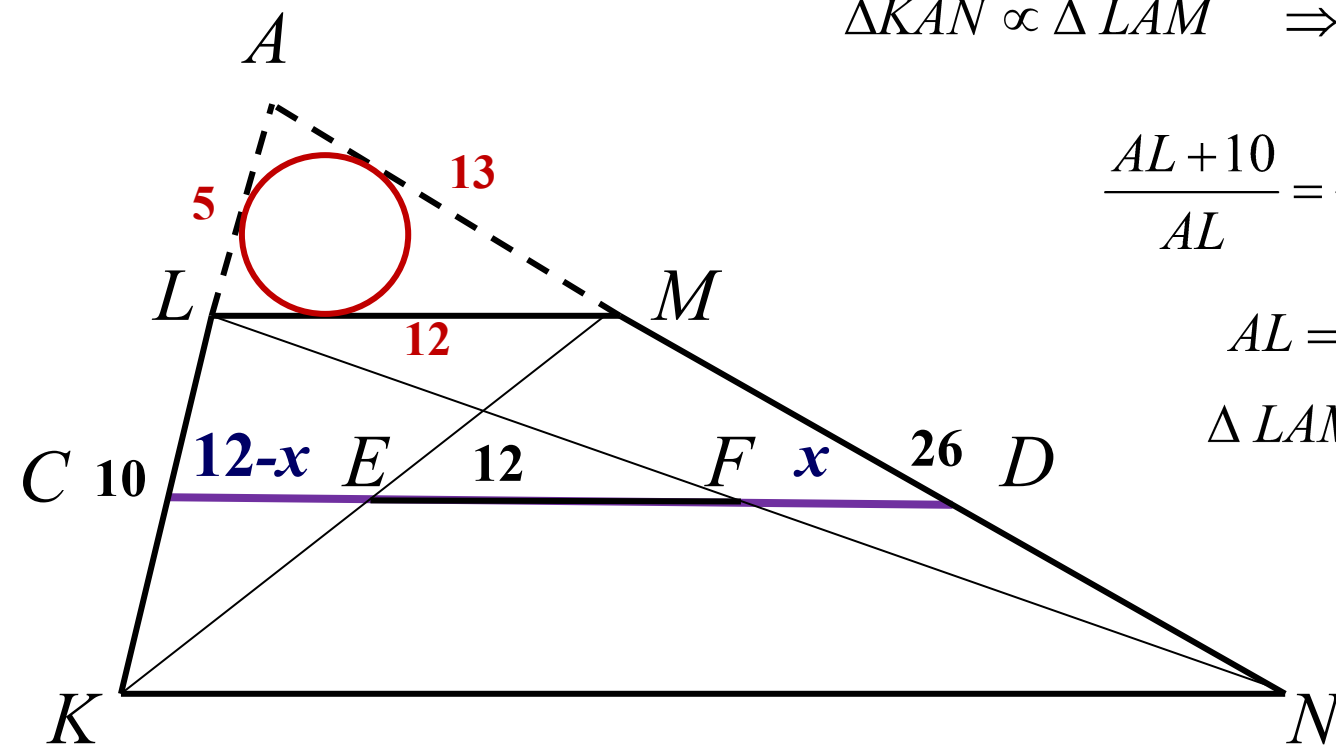
$$\triangle KAN \sim \triangle LAM \Rightarrow \frac{AK}{AL} = \frac{AN}{AM} = \frac{KN}{LM}$$

$$\frac{AL + 10}{AL} = \frac{AM + 26}{AM} = \frac{36}{12}$$

$$AL = 5, AM = 13.$$

$\triangle LAM$ – прямоугольный

$$r = \frac{\frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 12}{\frac{1}{2}(5 + 12 + 13)} = 2$$



2 случай:

$$\left. \begin{array}{l} \text{из } \triangle NLK : NK = 2x \\ \text{из } \triangle NMK : NK = 24 - 2x \end{array} \right\} \Rightarrow 24 - 2x = 2x$$

$$x = 6, \Rightarrow NK = 12, ML = 36$$

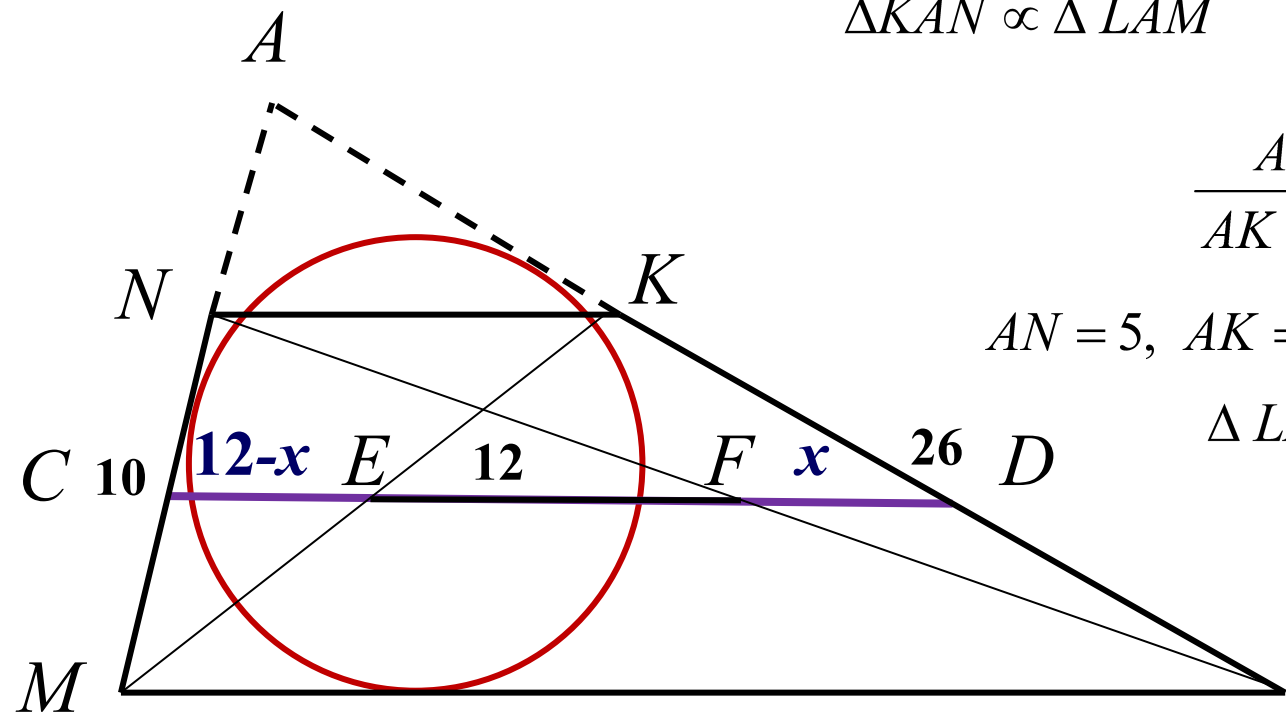
$$\triangle KAN \sim \triangle LAM \Rightarrow \frac{AK}{AL} = \frac{AN}{AM} = \frac{KN}{LM}$$

$$\frac{AK}{AK + 26} = \frac{AN}{AN + 10} = \frac{12}{36}$$

$$AN = 5, AK = 13. AL = 39, AM = 15.$$

$\triangle LAM$ – прямоугольный

$$r = \frac{\frac{1}{2} \cdot 15 \cdot 36}{\frac{1}{2} (15 + 39 + 36)} = 6$$



ОТВЕТ: 2 или 6

Задачи для самостоятельного решения:

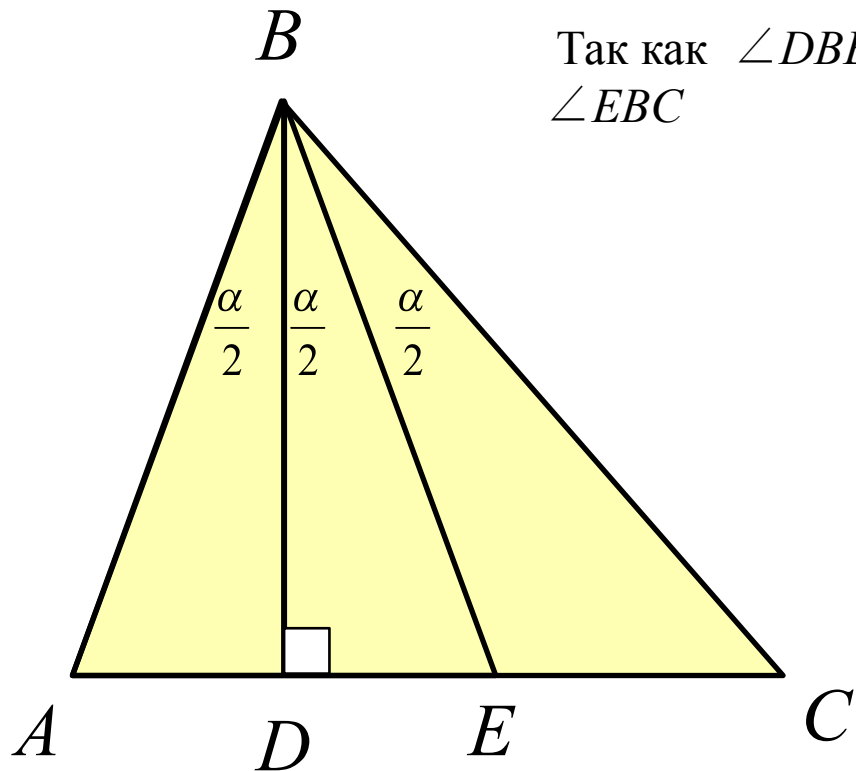
- Боковые стороны AB и CD трапеции $ABCD$ равны 6 и 8 соответственно. Отрезок, соединяющий середины диагоналей, равен 5, средняя линия трапеции равна 25. Прямые AB и CD пересекаются в точке M . Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник BMC .

Ответ: 4 или 6

- Боковые стороны AB и CD трапеции $ABCD$ равны 7 и 24 соответственно. Отрезок, соединяющий середины диагоналей, равен 12.5, средняя линия трапеции равна 27.5. Прямые AB и CD пересекаются в точке M . Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник BMC .

Ответ: 1,8 или 4,8

ЗАДАЧА №7. Дан треугольник ABC . Точка E на прямой AC выбрана так, что треугольник ABE , площадь которого равна 14, - равнобедренный с основанием AE и высотой BD . Найдите площадь треугольника ABC , если известно, что $\angle ABE = \angle CBD = \alpha$ и $\operatorname{tg} \alpha = 24/7$.



Так как $\angle DBE = \angle EBC$

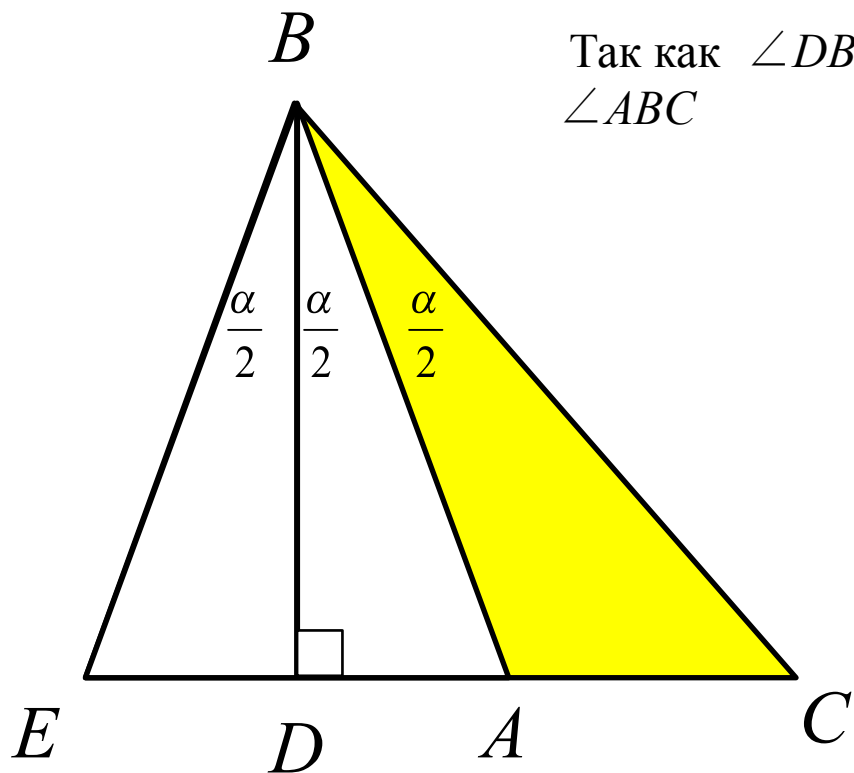
$$\frac{\Delta S_{DBE}}{\Delta S_{EBC}} = \frac{BD \cdot BE}{BE \cdot BC} = \frac{BD}{BC} = \cos \alpha$$

$$\Delta S_{EBC} = \frac{\Delta S_{DBE}}{\cos \alpha}$$

$$1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Rightarrow \cos \alpha = \frac{7}{25}$$

$$\Delta S_{EBC} = \frac{7 \cdot 25}{7} = 25$$

$$\Delta S_{ABC} = 14 + 25 = 39$$



Так как $\angle DBA = \angle ABC$

$$\frac{\Delta S_{DBA}}{\Delta S_{ABC}} = \frac{BD \cdot BA}{BA \cdot BC} = \frac{BD}{BC} = \cos \alpha$$

$$\Delta S_{ABC} = \frac{\Delta S_{DBA}}{\cos \alpha}$$

$$1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Rightarrow \cos \alpha = \frac{7}{25}$$

$$\Delta S_{ABC} = \frac{7 \cdot 25}{7} = 25$$

Ответ: 25 или 39

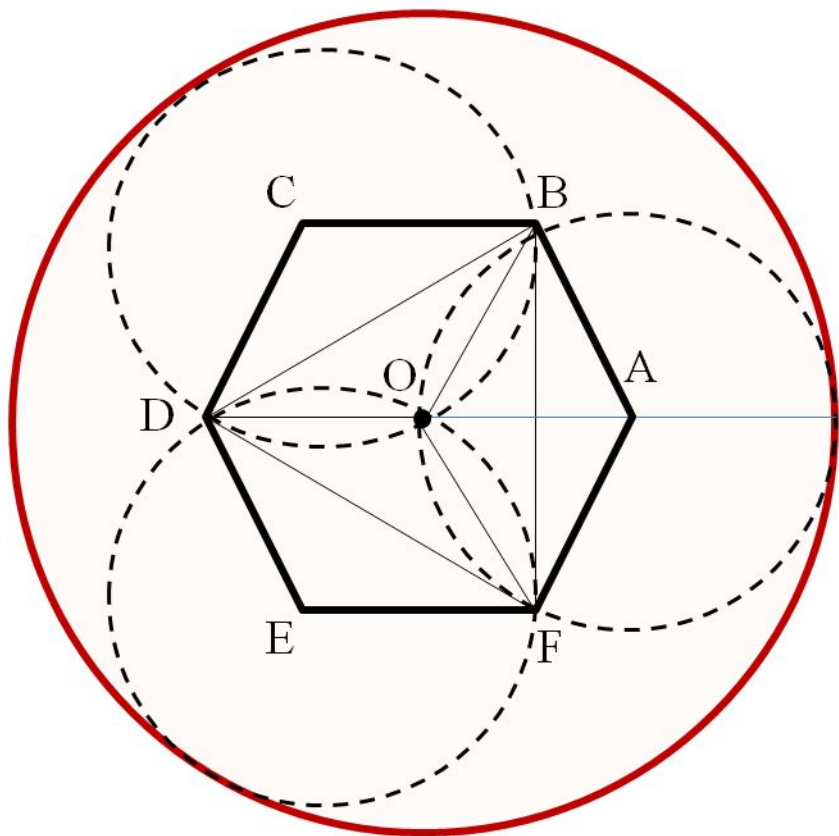
Задача для самостоятельного решения

- Дан треугольник ABC , площадь которого равна 55. Точка E на прямой AC выбрана так, что треугольник ABE - равнобедренный с основанием AE и высотой BD . Найдите площадь треугольника ABE , если известно, что $\angle ABE = \angle CBD = \alpha$ и $\operatorname{tg} \alpha = 4/3$.

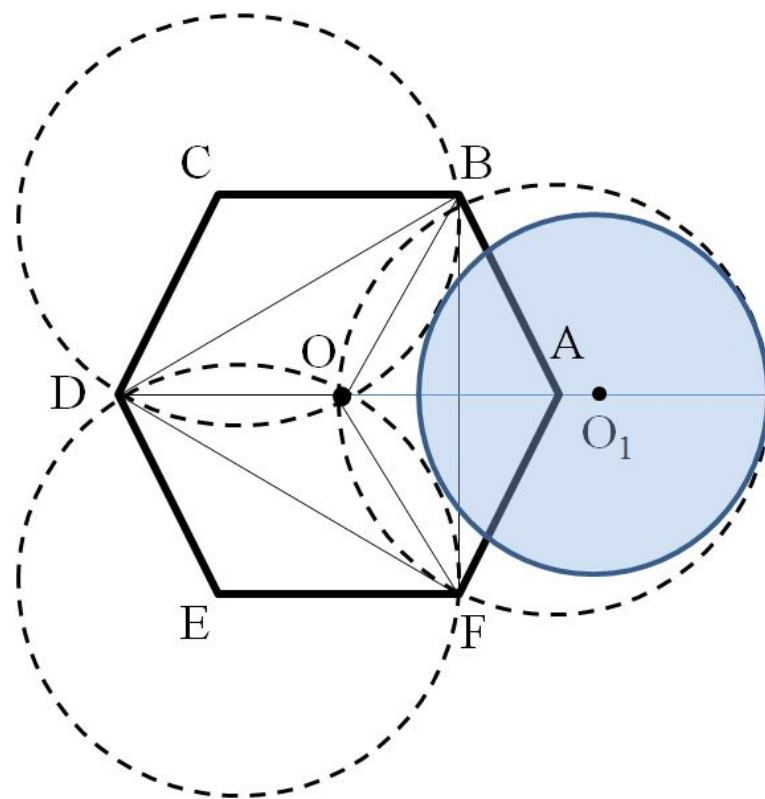
Ответ: 30 или 66

ЗАДАЧА №8. Точка O - центр правильного шестиугольника $ABCDEF$ со стороной 7. Найдите радиус окружности, касающейся окружностей, описанных около треугольников BOD , DOF , BOF .

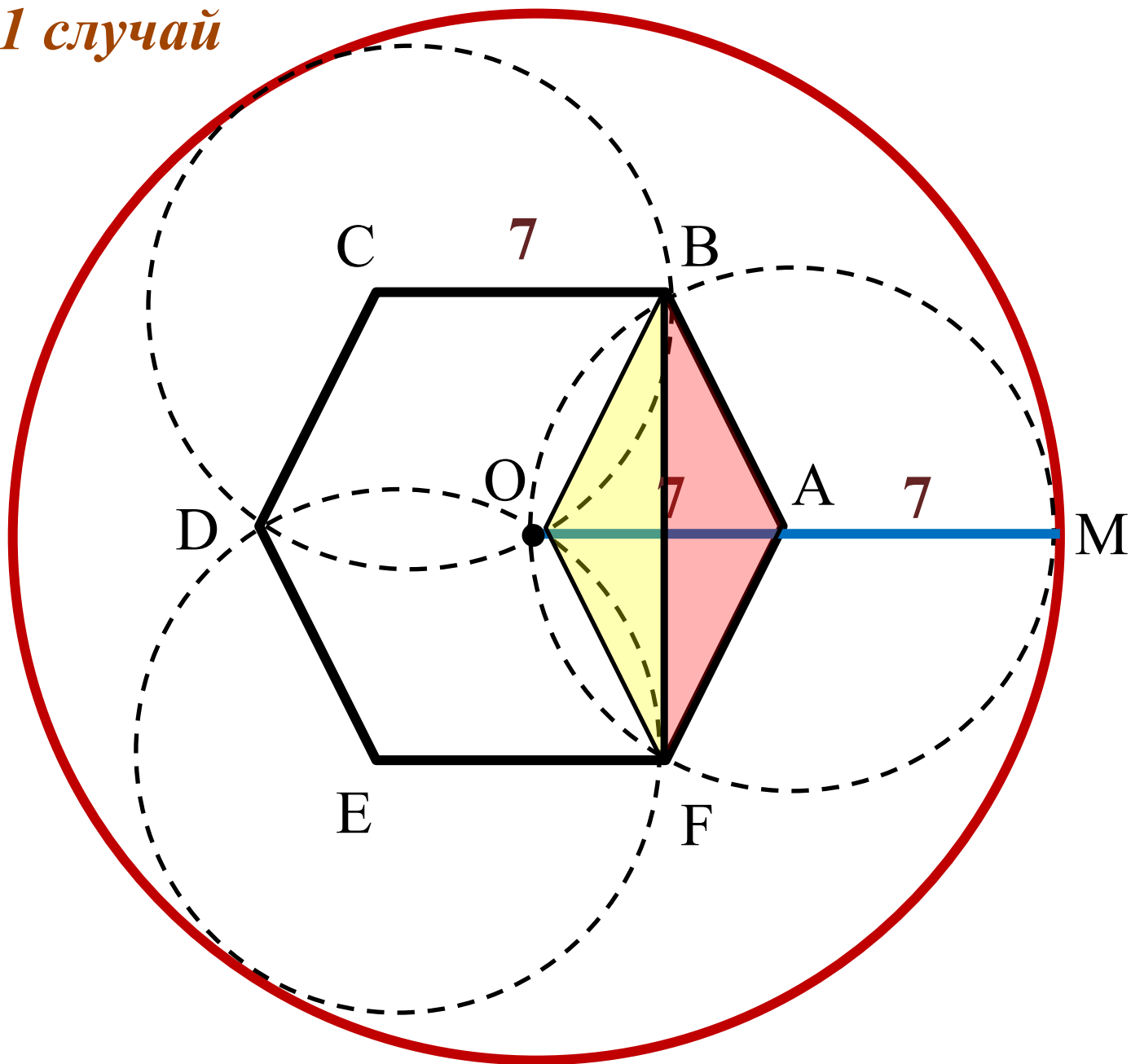
1 случай



2 случай

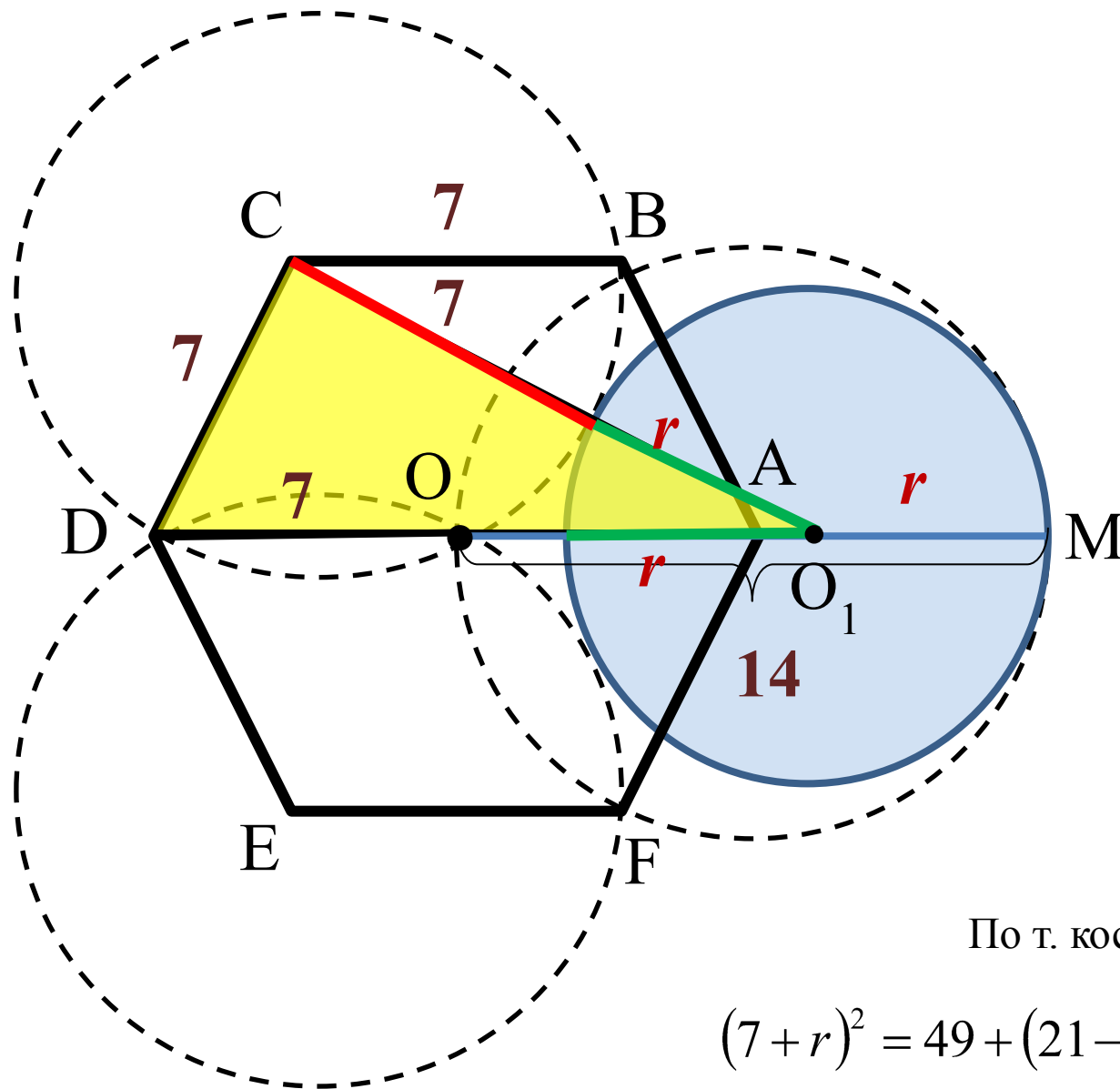


1 случай



$$r = 14$$

2 случай



$\triangle CDO_1$:
 $DC=7$
 $DO_1=21-r$
 $CO_1=7+r$
 $\angle CDO_1=60^\circ$

По т. косинусов:

$$(7+r)^2 = 49 + (21-r)^2 - 14(21-r)\cos 60^\circ$$
$$r = 6$$

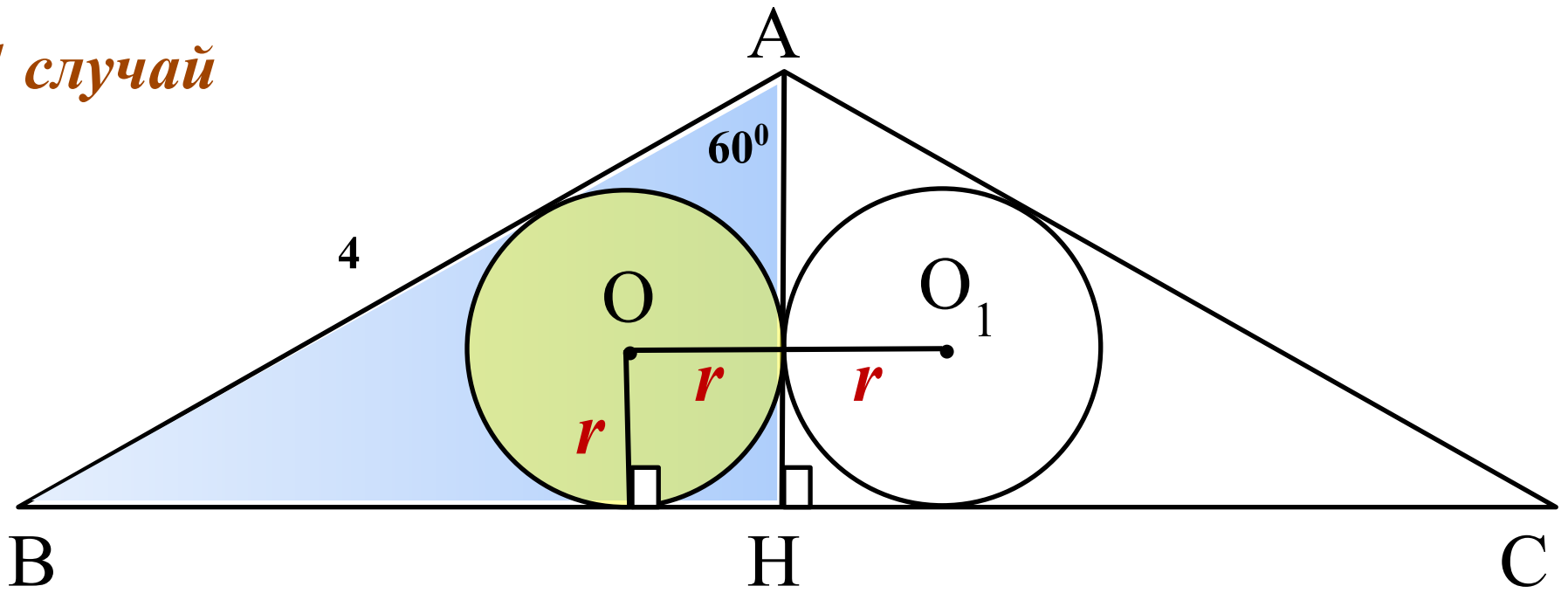
Задача для самостоятельного решения

- Точка O - центр правильного шестиугольника $ABCDEF$ со стороной a . Найдите радиус окружности, касающейся сторон AB и BC и описанной около треугольника AOB , COB , EOB .

Ответ: $\frac{a}{2}$ или $\frac{a\sqrt{3}}{2}$

ЗАДАЧА №9. Дан равнобедренный треугольник с боковой стороной 4 и углом 120° . Внутри него расположены две равные касающиеся окружности, каждая из которых касается двух сторон треугольника. Найдите радиусы окружностей.

1 случай



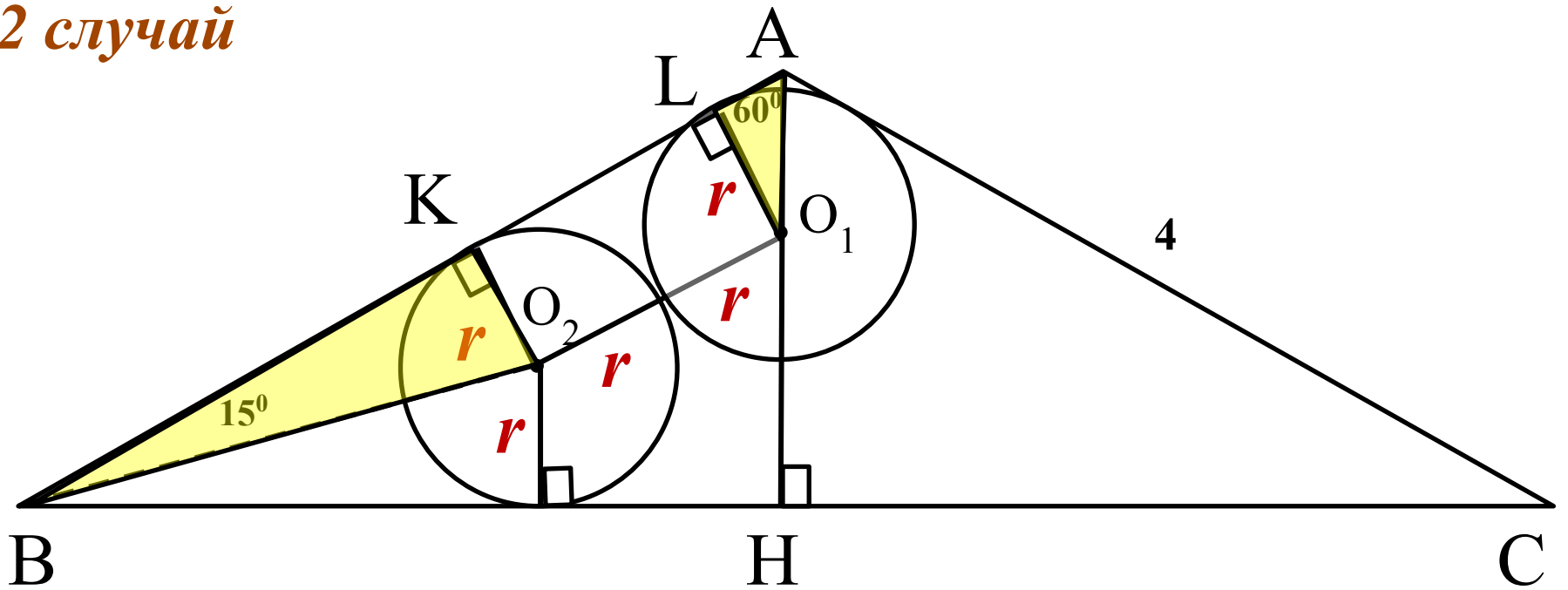
B ΔABH : $AH = 2, BH = 2\sqrt{3}$

$$S_{\Delta ABH} = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2\sqrt{3} = 2\sqrt{3}$$

$$r = \frac{2\sqrt{3}}{3 + \sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}(3 - \sqrt{3})}{6} = \frac{6(\sqrt{3} - 1)}{6} = \sqrt{3} - 1$$

$$P_{\Delta ABH} = \frac{1}{2} (2 + 2\sqrt{3} + 4) = 3 + \sqrt{3}$$

2 случай



$$AB = AL + LK + KB$$

$$\left. \begin{array}{l} B \quad \Delta AO_1L: \quad AL = \frac{r}{\operatorname{tg}60^\circ} \Rightarrow AL = \frac{r\sqrt{3}}{3} \\ B \quad \Delta BO_2K: \quad BK = \frac{r}{\operatorname{tg}15^\circ} \Rightarrow BK = \frac{r}{2-\sqrt{3}} = r(2+\sqrt{3}) \\ LK = 2r \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{r\sqrt{3}}{3} + 2r + r(2+\sqrt{3}) = 4$$

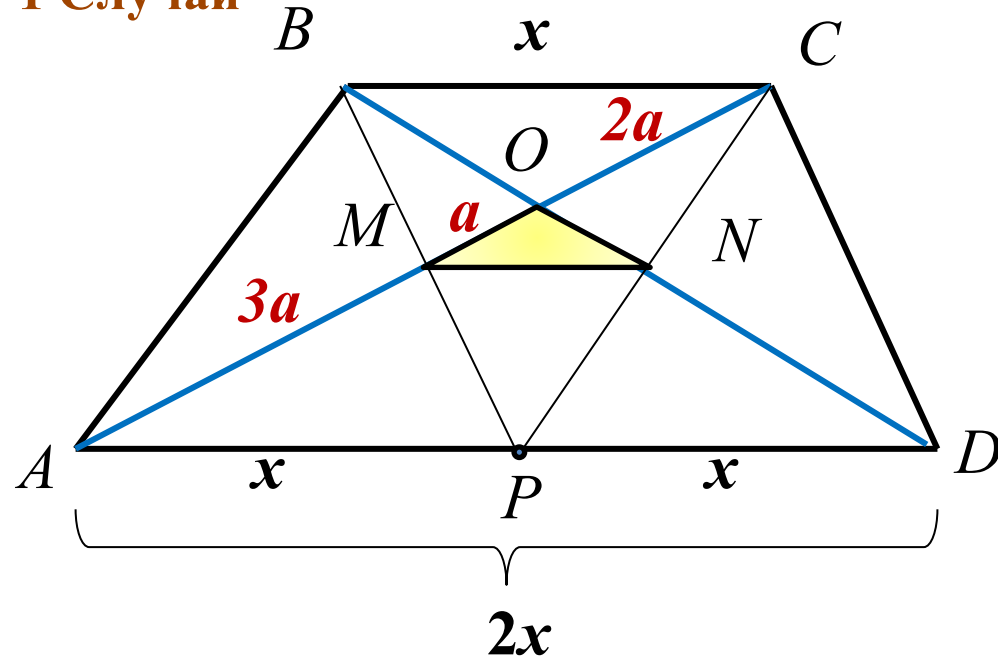
$$r = \frac{3-\sqrt{3}}{2}$$

$$\operatorname{tg}15^\circ = \operatorname{tg}(45^\circ - 30^\circ) = \frac{\operatorname{tg}45^\circ - \operatorname{tg}30^\circ}{1 + \operatorname{tg}45^\circ \operatorname{tg}30^\circ} = \frac{1 - \frac{1}{\sqrt{3}}}{1 + 1 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}} = 2 - \sqrt{3}$$

Ответ: $\sqrt{3} - 1$ или $\frac{3 - \sqrt{3}}{2}$

ЗАДАЧА №10. Площадь трапеции $ABCD$ равна 135. Диагонали пересекаются в точке O . Отрезки, соединяющие середину P основания AD с вершинами B и C , пересекаются с диагоналями трапеции в точках M и N . Найдите площадь треугольника MON , если одно из оснований трапеции вдвое больше другого.

1 Случай



$$S = \frac{1}{2}(x + 2x)h = 135, \Rightarrow hx = 90$$

M, N - середины диагоналей

OC - медиана

$$\triangle MON \sim \triangle AOD$$

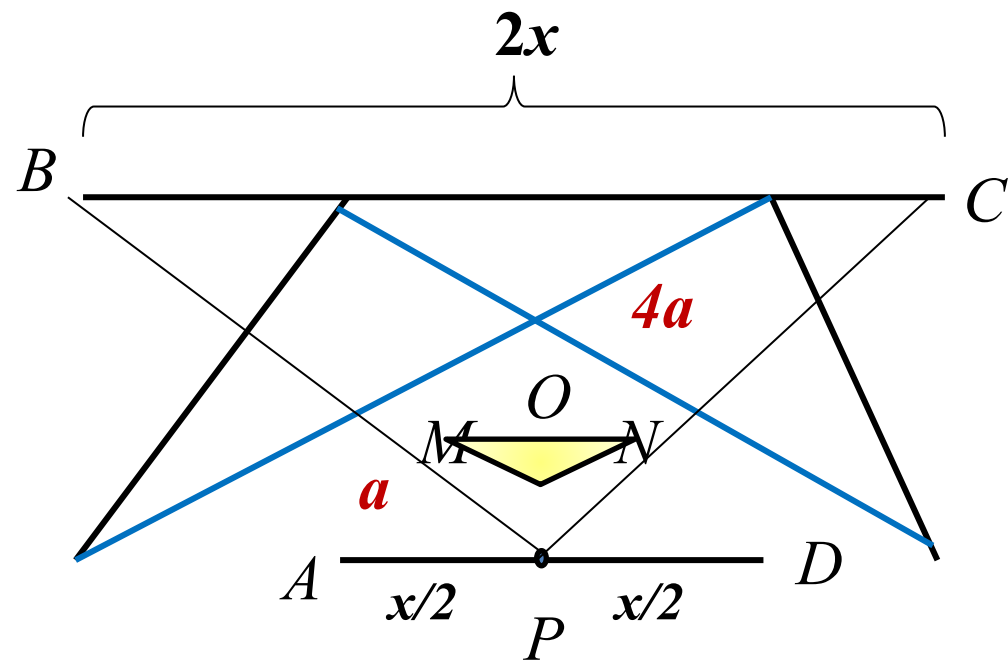
$$\frac{MN}{AD} = \frac{OM}{OA} = \frac{ON}{OD}$$

$$\frac{MN}{2x} = \frac{a}{4a}, \Rightarrow MN = \frac{x}{2}.$$

$$\triangle BOC \sim \triangle AOD, k = \frac{1}{2}, \Rightarrow h_{\triangle AOD} = \frac{2}{3}h. \Rightarrow h_{\triangle MON} = \frac{h}{6},$$

$$S = \frac{1}{2} \cdot \frac{x}{2} \cdot \frac{h}{6} = \frac{90}{24} = \frac{15}{4}.$$

2 Случай



$$S = \frac{1}{2}(x + 2x)h = 135, \quad \Rightarrow hx = 90$$

$$\triangle BOC \sim \triangle AOD, \quad k = 2, \Rightarrow h_{\triangle AOD} = \frac{1}{3}h.$$

$$\triangle BMC \sim \triangle AMP, \quad k = 4$$

$$\triangle ACP \sim \triangle MCN, \quad k = \frac{5}{4}$$

$$\frac{MN}{\frac{x}{2}} = \frac{4}{5}, \Rightarrow MN = \frac{2x}{5}.$$

$$\triangle AOD \sim \triangle MON, \quad k = \frac{5}{2}$$

$$\frac{\frac{h}{3}}{h_{\triangle MON}} = \frac{5}{2}, \Rightarrow h_{\triangle MON} = \frac{2h}{15},$$

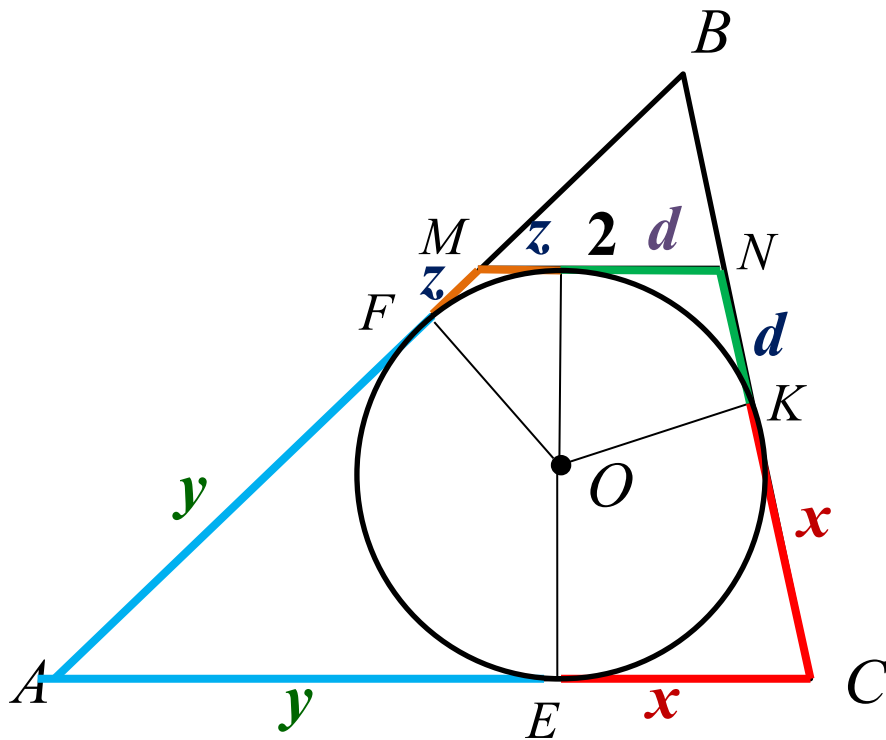
$$S = \frac{1}{2} \cdot \frac{2x}{5} \cdot \frac{2h}{15} = \frac{2 \cdot 90}{75} = \frac{12}{5}.$$

Задача для самостоятельного решения.

- Площадь трапеции $ABCD$ равна 810. Диагонали пересекаются в точке O . Отрезки, соединяющие середину P основания AD с вершинами B и C , пересекаются с диагоналями трапеции в точках M и N . Найдите площадь треугольника MON , если одно из оснований трапеции вдвое больше другого.

Ответ: 22,5 или 14,4

К окружности, вписанной в треугольник с периметром 18, проведена касательная параллельно основанию треугольника. Отрезок касательной между боковыми сторонами равен 2. Найдите основание треугольника.



$$\triangle MBN \propto ABC$$

$$\frac{MN}{AC} = \frac{P_{\triangle MBN}}{P_{\triangle ABC}}$$

$$\frac{2}{AC} = \frac{MB + BN + 2}{18}$$

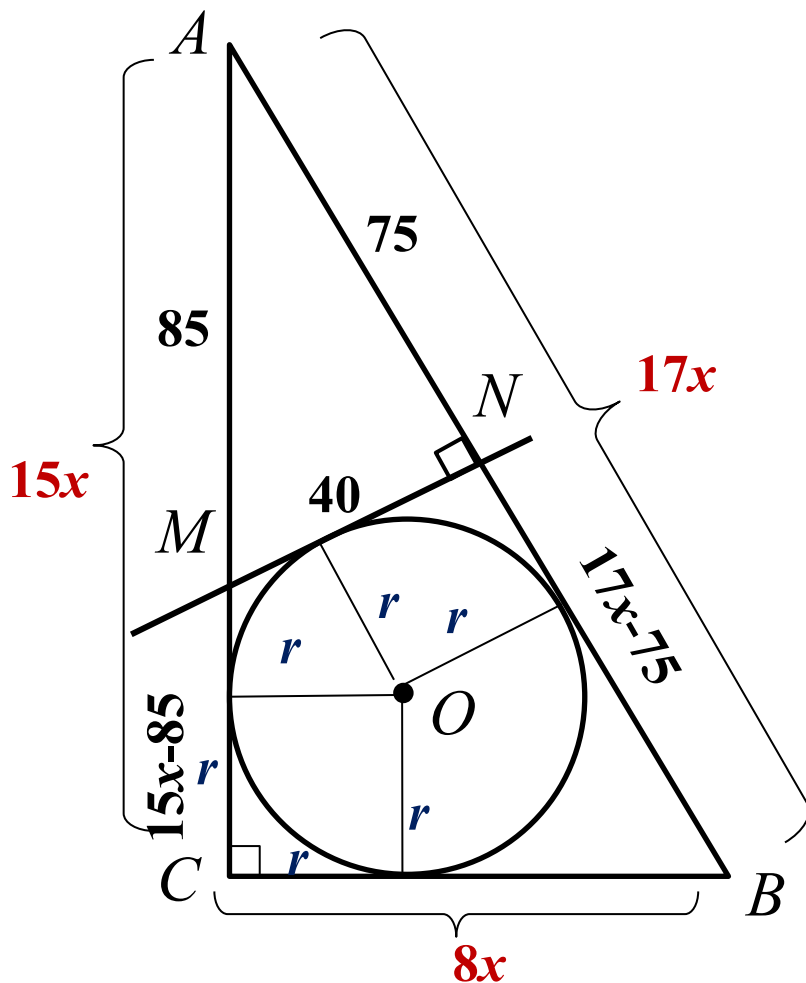
$$MB + BN + \underbrace{d + z}_{2} + \underbrace{2x + 2y}_{2AC} = 18$$

$$MB + BN = 16 - 2AC$$

$$\frac{2}{AC} = \frac{16 - 2AC + 2}{18}, \quad AC^2 - 9AC + 18 = 0, \quad AC = 3, \text{ или } AC = 6.$$

ЗАДАЧА №11. Прямая, перпендикулярная гипотенузе прямоугольного треугольника, отсекает от него четырехугольник, в который можно вписать окружность. Найти радиус окружности, если отрезок этой прямой, заключенной внутри треугольника, равен 40, а отношение катетов треугольника равно $15/8$.

1 Случай



$$\triangle AMN \sim \triangle ABC$$

$$\frac{MN}{CB} = \frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$$

$$\frac{40}{8x} = \frac{AM}{17x} = \frac{AN}{15x}$$

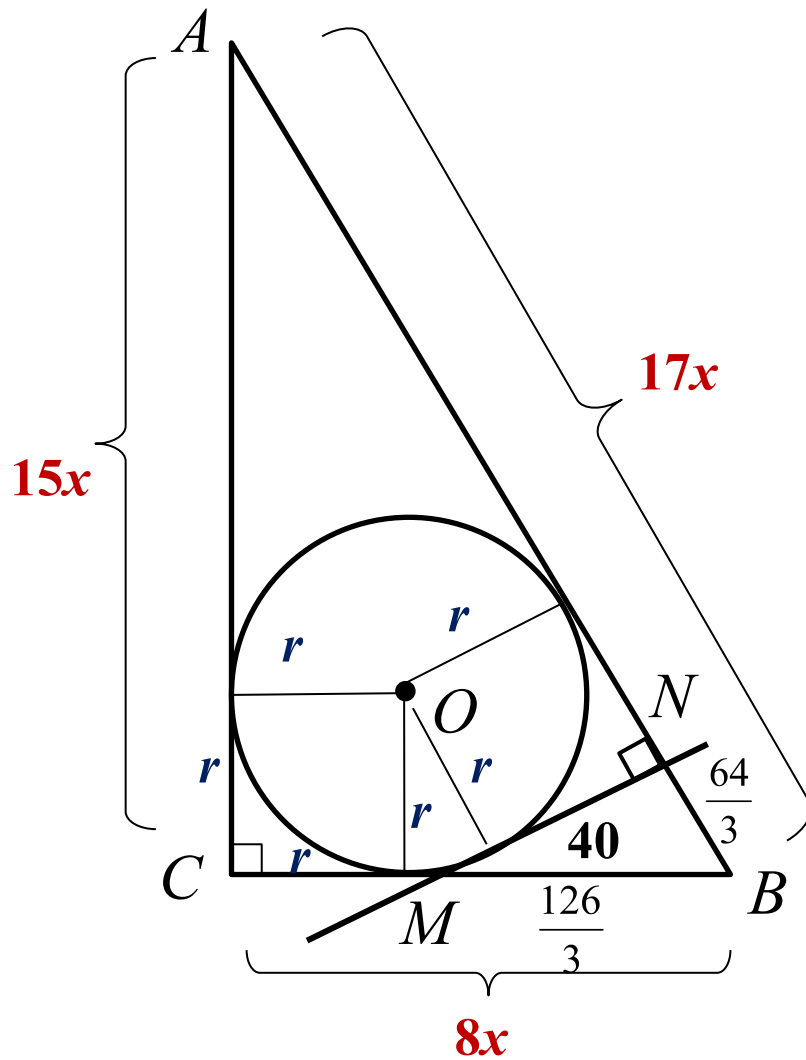
$$AM = 85, AN = 75$$

$$15x - 85 + 17x - 75 = 40 + 8x$$

$$24x = 200, \Rightarrow x = \frac{25}{3}$$

$$r = \frac{\frac{1}{2} \cdot 8x \cdot 15x}{\frac{1}{2} \cdot (8x + 15x + 17x)} = 3x, \Rightarrow r = 25.$$

2 Случай



$$\Delta BMN \propto ABC$$

$$\frac{MN}{AC} = \frac{MB}{AB} = \frac{NB}{BC}$$

$$\frac{40}{15x} = \frac{MB}{17x} = \frac{NB}{8x}$$

$$MB = \frac{136}{3}, \quad NB = \frac{64}{3}$$

$$8x - \frac{136}{3} + 17x - \frac{64}{3} = 40 + 15x$$

$$30x = 320, \Rightarrow x = \frac{32}{3}$$

$$r = \frac{\frac{1}{2} \cdot 8x \cdot 15x}{\frac{1}{2} \cdot (8x + 15x + 17x)} = 3x, \Rightarrow r = 32.$$

Задачи для самостоятельного решения.

- Прямая, перпендикулярная гипотенузе прямоугольного треугольника, отсекает от него четырехугольник, в который можно вписать окружность. Найти радиус окружности, если отрезок этой прямой, заключенной внутри треугольника, равен 10, а отношение катетов треугольника равно $5/12$.

Ответ: 6 или $\frac{25}{3}$

- Прямая, перпендикулярная гипотенузе прямоугольного треугольника, отсекает от него четырехугольник, в который можно вписать окружность. Найти радиус окружности, если отрезок этой прямой, заключенной внутри треугольника, равен 6, а отношение катетов треугольника равно $3/4$.

Ответ: 4 или 4,5

- Прямая, перпендикулярная гипотенузе прямоугольного треугольника, отсекает от него четырехугольник, в который можно вписать окружность. Найти площадь четырехугольника, если гипотенуза треугольника равна 10, а радиус окружности, равен 2.

Ответ: $\frac{50}{3}$ или $\frac{85}{6}$

Задачи для самостоятельного решения.

- Прямая, перпендикулярная гипотенузе прямоугольного треугольника, отсекает от него четырехугольник, в который можно вписать окружность. Найти радиус окружности, если отрезок этой прямой, заключенной внутри треугольника, равен 12, а косинус острого угла равен 0,6 .

Ответ: 8 или 9

- Прямая, перпендикулярная боковой стороне равнобедренного треугольника с основанием равным 12, отсекает от него четырехугольник, в который можно вписать окружность. Найти площадь четырехугольника, если радиус окружности равен 3.

Ответ: $46\frac{2}{7}$ или 42

- Прямая, перпендикулярная боковой стороне равнобедренного треугольника, отсекает от него четырехугольник, в который можно вписать окружность. Найти радиус окружности, если отрезок этой прямой, заключенной внутри треугольника, равен 24, а синус угла при основании равен 0,8 .

Ответ: 18 или 21

Задачи для самостоятельного решения.

- Прямая, перпендикулярная гипотенузе прямоугольного треугольника с катетами 6 и 8, отсекает от него четырехугольник, в который можно вписать окружность. Найти площадь этого четырехугольника.

Ответ: 18 или $21\frac{1}{3}$

- Прямая, перпендикулярная гипотенузе прямоугольного треугольника с катетами 5 и 12, отсекает от него четырехугольник, в который можно вписать окружность. Найти площадь этого четырехугольника.

Ответ: 28,8 или $16\frac{2}{3}$

- Прямая, перпендикулярная боковой стороне равнобедренного треугольника, отсекает от него четырехугольник, в который можно вписать окружность. Найти радиус окружности, если отрезок этой прямой, заключенной внутри треугольника, равен 20, а отношение боковой стороны треугольника к его основанию равно $13/10$.

Ответ: 18 или $21\frac{1}{3}$

- Прямая, перпендикулярная боковой стороне равнобедренного треугольника, отсекает от него четырехугольник, в который можно вписать окружность. Найти радиус окружности, если отрезок этой прямой, заключенной внутри треугольника, равен 6, а отношение боковой стороны треугольника к его основанию равно $5/6$.

Ответ: 4,5 или $\frac{21}{4}$

Задачи для самостоятельного решения.

- Прямая, перпендикулярная боковой стороне равнобедренного треугольника со сторонами равным и 10, 10, 12, отсекает от него четырехугольник, в который можно вписать окружность. Найти площадь четырехугольника.

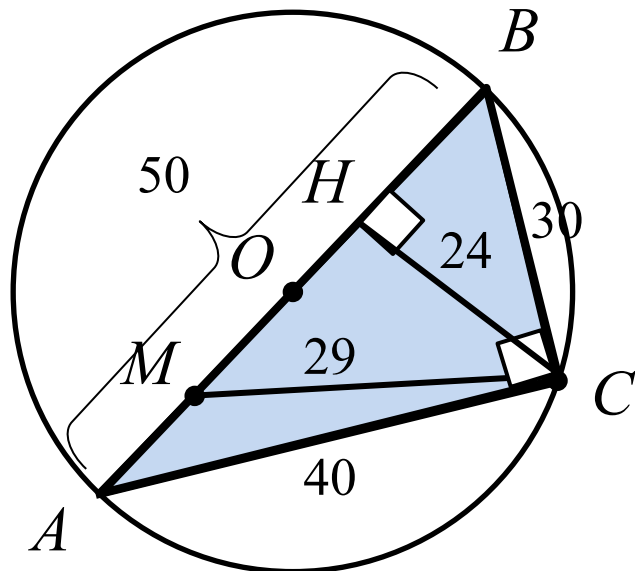
Ответ: $46\frac{2}{7}$ или 42

- Прямая, перпендикулярная боковой стороне равнобедренного треугольника со сторонами равным и 10, 13, 13, отсекает от него четырехугольник, в который можно вписать окружность. Найти площадь четырехугольника.

Ответ: $49\frac{1}{51}$ или $56\frac{2}{3}$

ЗАДАЧА №12. Точка M лежит на отрезке AB . На окружности с диаметром AB взята точка C , удаленная от точек A , M и B на расстояния 40, 29 и 30 соответственно. Найти площадь треугольника BMC .

1 Случай



$$HM = \sqrt{29^2 - 24^2} = \sqrt{265}$$

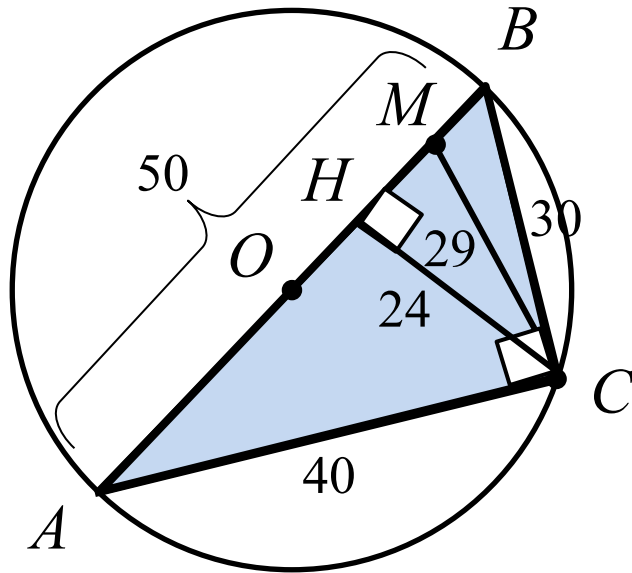
$$HB = \sqrt{30^2 - 24^2} = 18$$

$$S_{\triangle CHM} = \frac{1}{2} \cdot 24 \cdot \sqrt{265} = 12\sqrt{265}$$

$$S_{\triangle CHB} = \frac{1}{2} \cdot 24 \cdot 18 = 216$$

$$S_{\triangle CMB} = 12\sqrt{265} + 216$$

2 Случай



$$HM = \sqrt{29^2 - 24^2} = \sqrt{265}$$

$$HB = \sqrt{30^2 - 24^2} = 18$$

$$S_{\triangle CHM} = \frac{1}{2} \cdot 24 \cdot \sqrt{265} = 12\sqrt{265}$$

$$S_{\triangle CHB} = \frac{1}{2} \cdot 24 \cdot 18 = 216$$

$$S_{\triangle CMB} = 216 - 12\sqrt{265}$$

Задача для самостоятельного решения.

- Точка M лежит на отрезке AB . На окружности с диаметром AB взята точка C , удаленная от точек A, M и B на расстояния 20, 14 и 15 соответственно. Найти площадь треугольника BMC .

Ответ: $54 \pm 12\sqrt{13}$