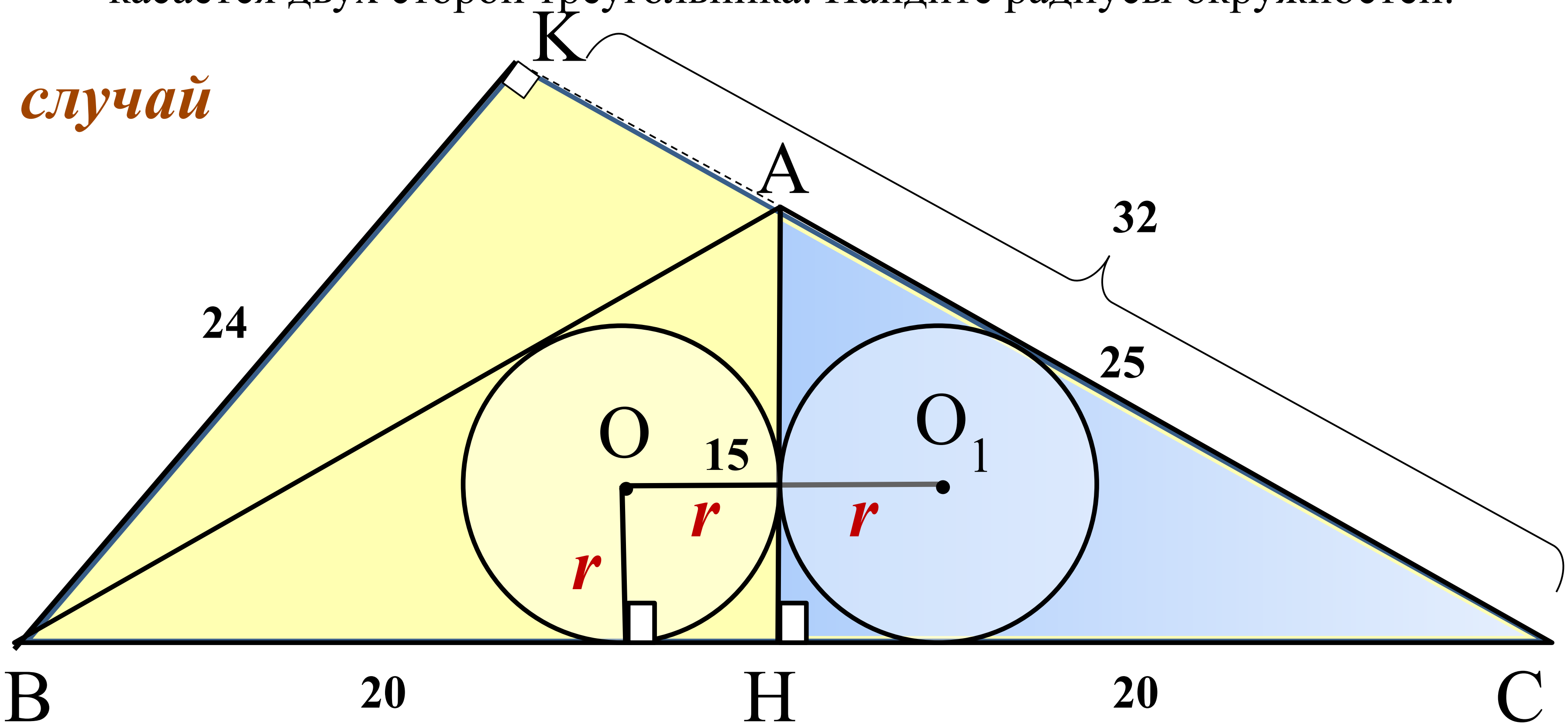
Сборник задач по планиметрии.

C4

ЗАДАЧА №1. Основание равнобедренного треугольника равно 40, а высота, опущенная на боковую сторону равна 24. Внутри треугольника расположены две равные касающиеся окружности, каждая из которых касается двух сторон треугольника. Найдите радиусы окружностей.

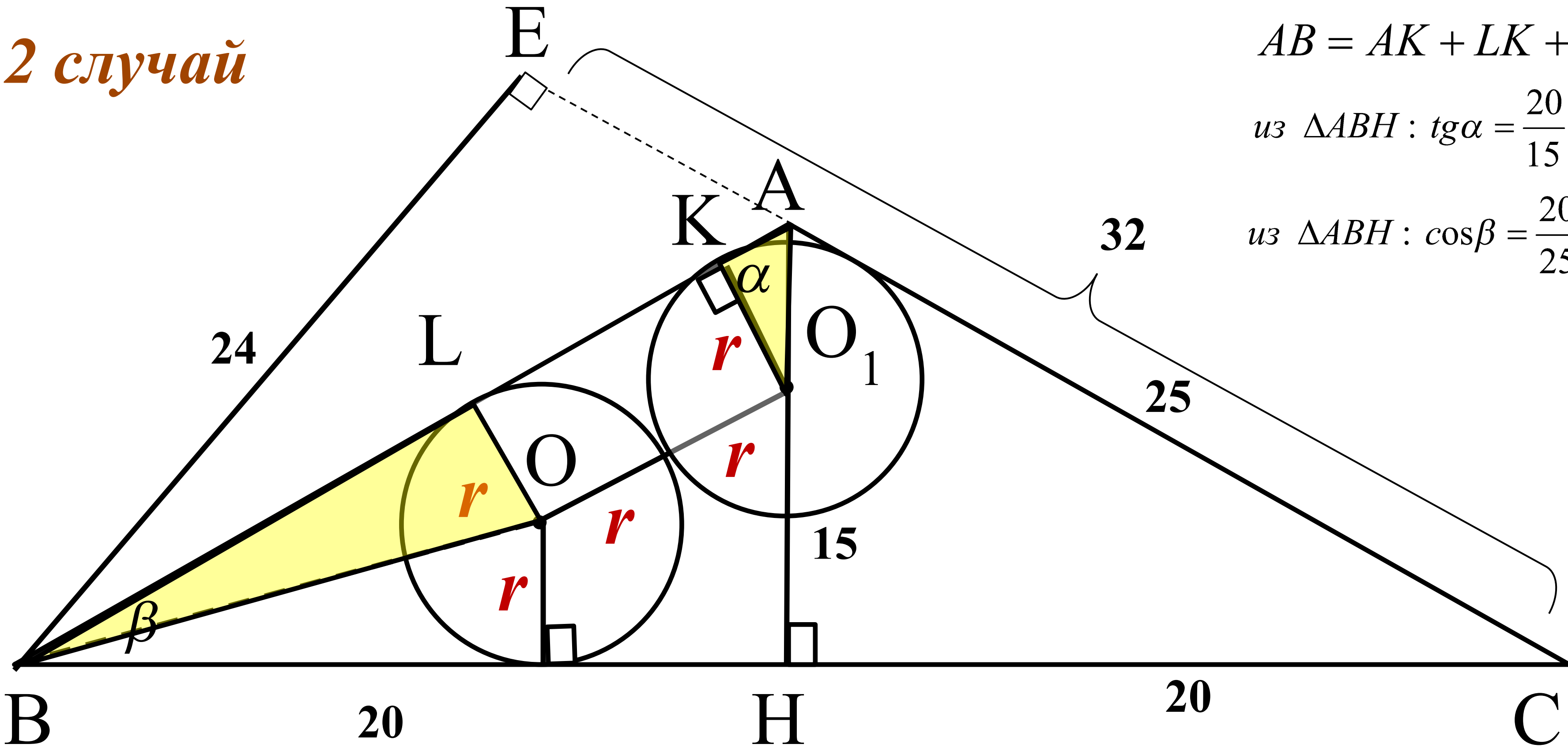
1 случай



$$\Delta BKC \propto \Delta AHC, \Rightarrow \frac{AH}{BK} = \frac{AC}{BC} = \frac{HC}{KC}, \quad \frac{AH}{24} = \frac{AC}{40} = \frac{20}{32}, \Rightarrow AH = 15,\ AC = 25$$

$$S_{\Delta ABH} = \frac{1}{2} 20 \cdot 15 = 150, \qquad p_{\Delta ABH} = \frac{15 + 20 + 25}{2} = 30, \qquad r = \frac{150}{30} = 5.$$

2 случай



$$AB = AK + LK + LB$$

$$из\ \Delta ABH:\ tg\alpha = \frac{20}{15} = \frac{4}{3}$$

$$из\ \Delta ABH:\ \cos\beta = \frac{20}{25} = \frac{4}{5}$$

$$\left.\begin{aligned} AK &= \frac{O_1K}{tg\alpha} = \frac{3r}{4}, \\ LK &= 2r, \\ BL &= \frac{OL}{tg\frac{\beta}{2}} = 3r, \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{3r}{4} + 2r + 3r = 25 \quad \Rightarrow r = \frac{100}{23}$$

$$2\cos^2\frac{\beta}{2} - 1 = \frac{4}{5}, \Rightarrow \cos\frac{\angle B}{2} = \frac{3}{\sqrt{10}}, \Rightarrow \sin\frac{\angle B}{2} = \frac{1}{\sqrt{10}}, \Rightarrow tg\frac{\angle B}{2} = \frac{1}{3}$$

Ответ: 5 или $\frac{100}{23}$

Задачи для самостоятельного решения

- Основание равнобедренного треугольника равно 5, а высота, опущенная на боковую сторону равна 3. Внутри треугольника расположены две равные касающиеся окружности, каждая из которых касается двух сторон треугольника. Найдите радиусы окружностей.

Ответ: $\frac{5}{8}$ или $\frac{25}{46}$

- Основание равнобедренного треугольника равно 5, а высота, опущенная на боковую сторону равна 4. Внутри треугольника расположены две равные касающиеся окружности, каждая из которых касается двух сторон треугольника. Найдите радиусы окружностей.

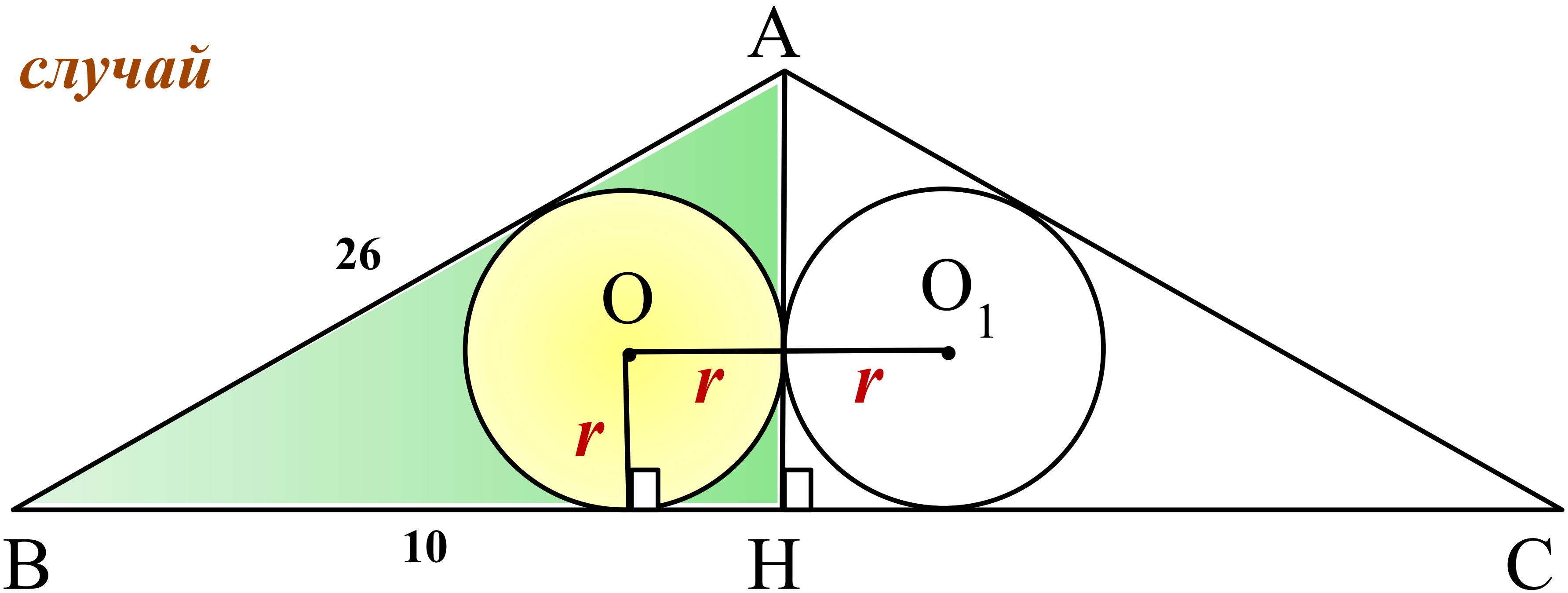
Ответ: $\frac{5}{6}$ или $\frac{25}{32}$

- Основание равнобедренного треугольника равно 80, а высота, опущенная на боковую сторону равна 64. Внутри треугольника расположены две равные касающиеся окружности, каждая из которых касается двух сторон треугольника. Найдите радиусы окружностей.

Ответ: $\frac{40}{3}$ или $\frac{25}{2}$

ЗАДАЧА №2. Дан треугольник со сторонами 26, 26 и 20. Внутри него расположены две равные касающиеся окружности, каждая из которых касается двух сторон треугольника. Найдите радиусы окружностей.

1 случай

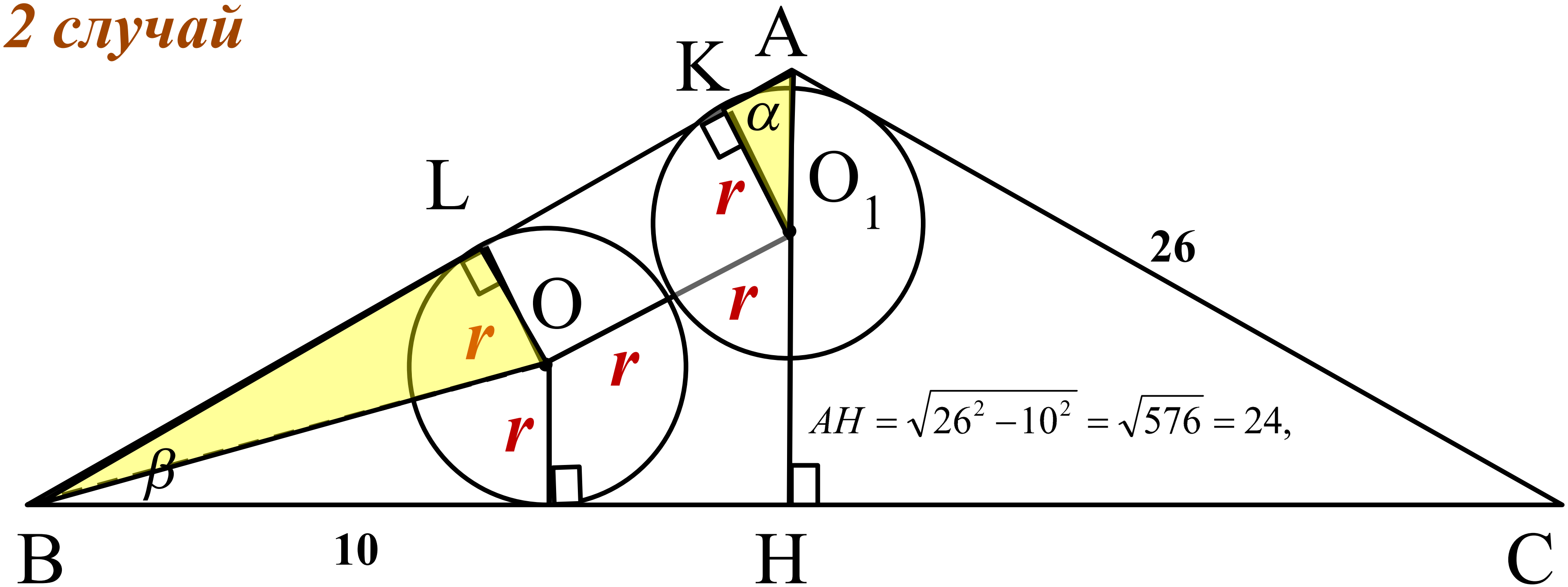


$$AH = \sqrt{26^2 - 10^2} = \sqrt{576} = 24,$$

$$S_{\Delta ABH} = \frac{1}{2} 10 \cdot 24 = 120, \qquad p_{\Delta ABH} = \frac{10 + 24 + 26}{2} = 30,$$

$$r = \frac{120}{30} = 4.$$

2 случай



$$AB = AK + LK + LB$$

из $\Delta ABH:\ tg\alpha = \frac{10}{24} = \frac{5}{12}$

из $\Delta ABH:\ \cos\beta = \frac{10}{26} = \frac{5}{13}$

$$\left.\begin{aligned} AK &= \frac{O_1K}{tg\alpha} = \frac{12r}{5}, \\ LK &= 2r, \\ BL &= \frac{OL}{tg\frac{\beta}{2}} = \frac{3r}{2}, \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{12r}{5} + 2r + \frac{3r}{2} = 26 \quad \Rightarrow r = \frac{260}{59}$$

$$2\cos^2\frac{\beta}{2} - 1 = \frac{5}{13}, \Rightarrow \cos\frac{\angle B}{2} = \frac{3}{\sqrt{13}}, \Rightarrow \sin\frac{\angle B}{2} = \frac{2}{\sqrt{13}}, \Rightarrow tg\frac{\angle B}{2} = \frac{2}{3}$$

Ответ: 4 или $\frac{260}{59}$

Задачи для самостоятельного решения

- Дан треугольник со сторонами 115, 115 и 184. Внутри него расположены две равные касающиеся окружности, каждая из которых касается двух сторон треугольника. Найдите радиусы окружностей.

Ответ: 23 или 20

- Дан треугольник со сторонами 30, 30 и 36. Внутри него расположены две равные касающиеся окружности, каждая из которых касается двух сторон треугольника. Найдите радиусы окружностей.

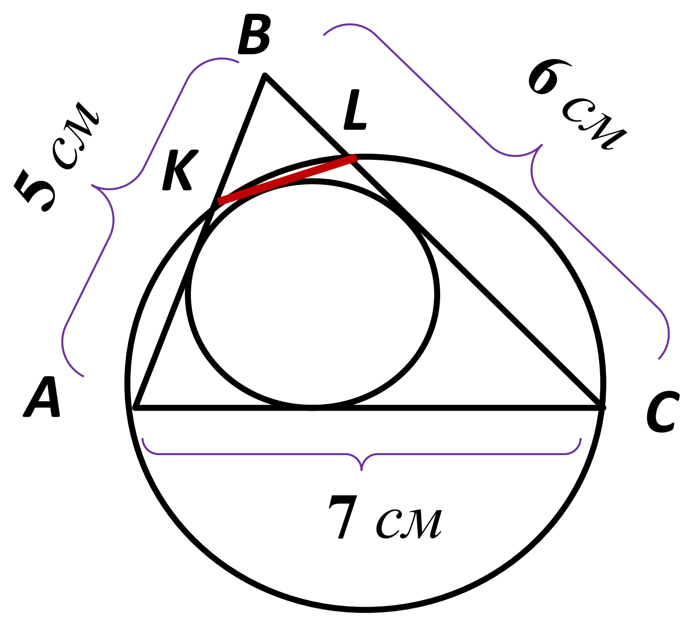
Ответ: 6 или $\frac{45}{8}$

- Дан треугольник со сторонами 13, 13 и 10. Внутри него расположены две равные касающиеся окружности, каждая из которых касается двух сторон треугольника. Найдите радиусы окружностей.

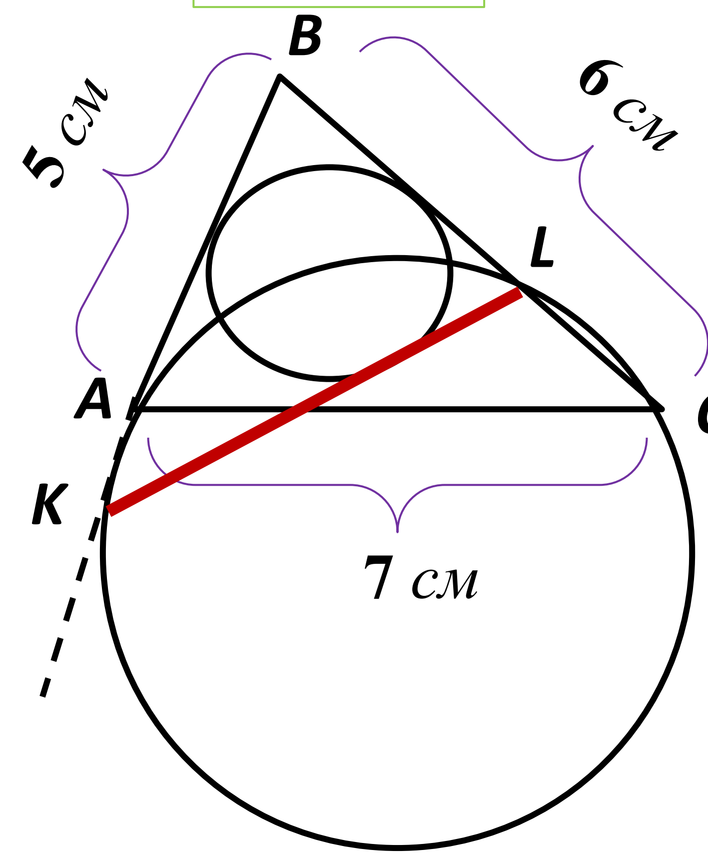
Ответ: 2 или $\frac{130}{59}$

ЗАДАЧА №3. В треугольнике ABC известны стороны: $AB=5$, $BC=6$, $AC=7$. Окружность, проходящая через точки A и C, пересекает прямые BA и BC соответственно в точках K и L, отличных от вершин треугольника. Отрезок KL касается окружности, вписанной в треугольник ABC. Найдите длину отрезка KL.

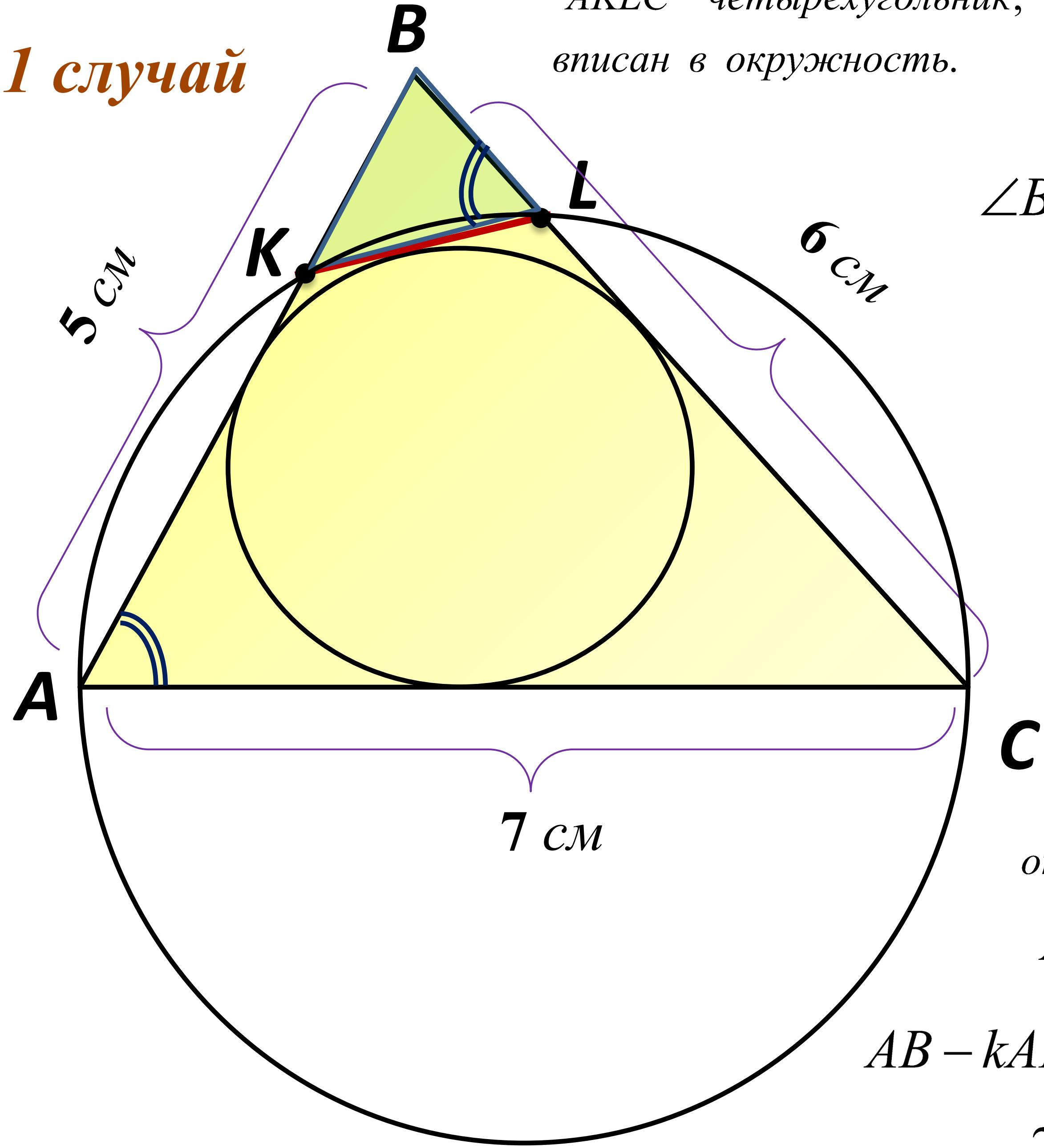
1 Случай



2 Случай



1 случай



$AKLC$ – четырехугольник, вписан в окружность.

$$\Delta ABC \backsim \Delta KBL$$

$\angle B$ – общий;

$$\angle BAC = \angle KLB = 180^0 - \angle KLC;$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{KL}{AC} = \frac{BK}{BC} = \frac{BL}{AB} = k$$

$$\Downarrow$$

$$KL = k \cdot AC;$$

$$BK = k \cdot BC;$$

$$BL = k \cdot BA$$

Т.к. $AKLC$ – четырехугольник, описанный около окружности, то

$$AK + LC = AC + KL$$

$$AB - kAB + BC - kBC = AC + kAC$$

$$k = \frac{2}{9}, \Rightarrow KL = 7 \cdot \frac{2}{9} = \frac{14}{9}.$$

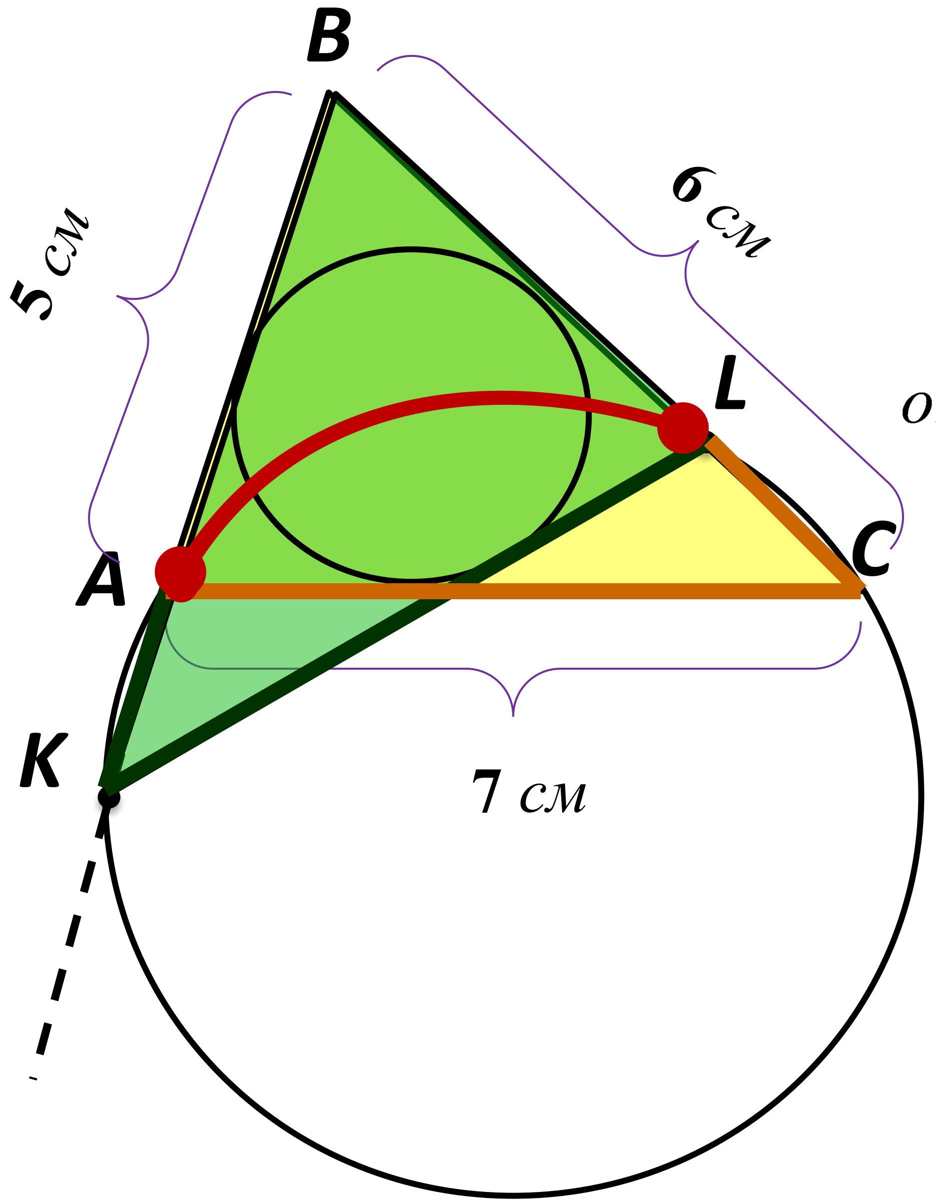
2 случай

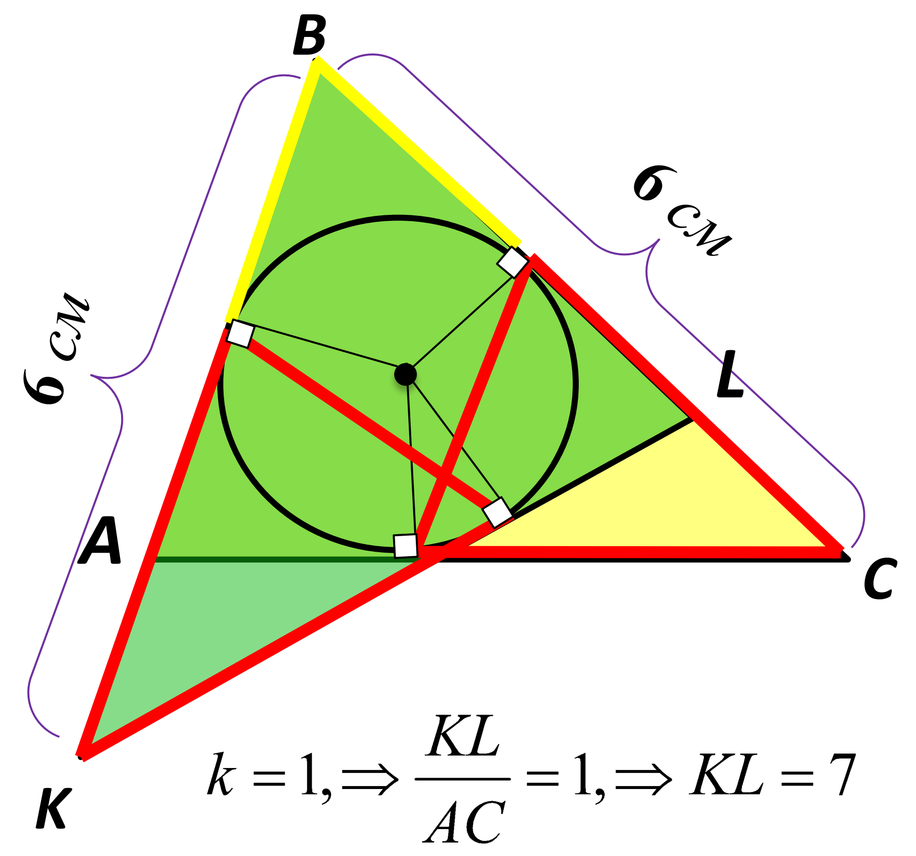
$\Delta ABC \infty \Delta KBL:\ \angle B - общий;\ \angle BKL = \angle ACB = \frac{1}{2} \cup AL$

$\Downarrow$

$$\frac{KL}{AC} = \frac{BK}{BC} = \frac{BL}{AB} = k$$

$т.\ к.\ \Delta ABC\ и\ \Delta KBL\ описаны\ около\ одной\ окружности$





$$k = 1, \Rightarrow \frac{KL}{AC} = 1, \Rightarrow KL = 7$$

Задачи для самостоятельного решения

- В треугольнике ABC известны стороны: $AB = 4$, $BC = 6$, $AC = 5$. Окружность, проходящая через точки A и C, пересекает прямые BA и BC соответственно в точках K и L, отличных от вершин треугольника. Отрезок KL касается окружности, вписанной в треугольник ABC. Найдите длину отрезка KL.

Ответ: $\frac{5}{3}$ или 5

- В треугольнике ABC известны стороны: $AB = 7$, $BC = 10$, $AC = 8$. Окружность, проходящая через точки A и C, пересекает прямые BA и BC соответственно в точках K и L, отличных от вершин треугольника. Отрезок KL касается окружности, вписанной в треугольник ABC. Найдите длину отрезка KL.

Ответ: $\frac{72}{25}$ или 8

- В треугольнике ABC известны стороны: $AB = 5$, $BC = 7$, $AC = 8$. Окружность, проходящая через точки A и C, пересекает прямые BA и BC соответственно в точках K и L, отличных от вершин треугольника. Отрезок KL касается окружности, вписанной в треугольник ABC. Найдите длину отрезка KL.

Ответ: $\frac{8}{5}$ или 8

Задачи для самостоятельного решения

- В треугольнике ABC известны стороны: $AB = 9$, $BC = 10$, $AC = 11$. Окружность, проходящая через точки A и C, пересекает прямые BA и BC соответственно в точках K и L, отличных от вершин треугольника. Отрезок KL касается окружности, вписанной в треугольник ABC. Найдите длину отрезка KL.

Ответ: $\frac{44}{15}$ или 11

- В треугольнике ABC известны стороны: $AB = 8$, $BC = 10$, $AC = 11$. Окружность, проходящая через точки A и C, пересекает прямые BA и BC соответственно в точках K и L, отличных от вершин треугольника. Отрезок KL касается окружности, вписанной в треугольник ABC. Найдите длину отрезка KL.

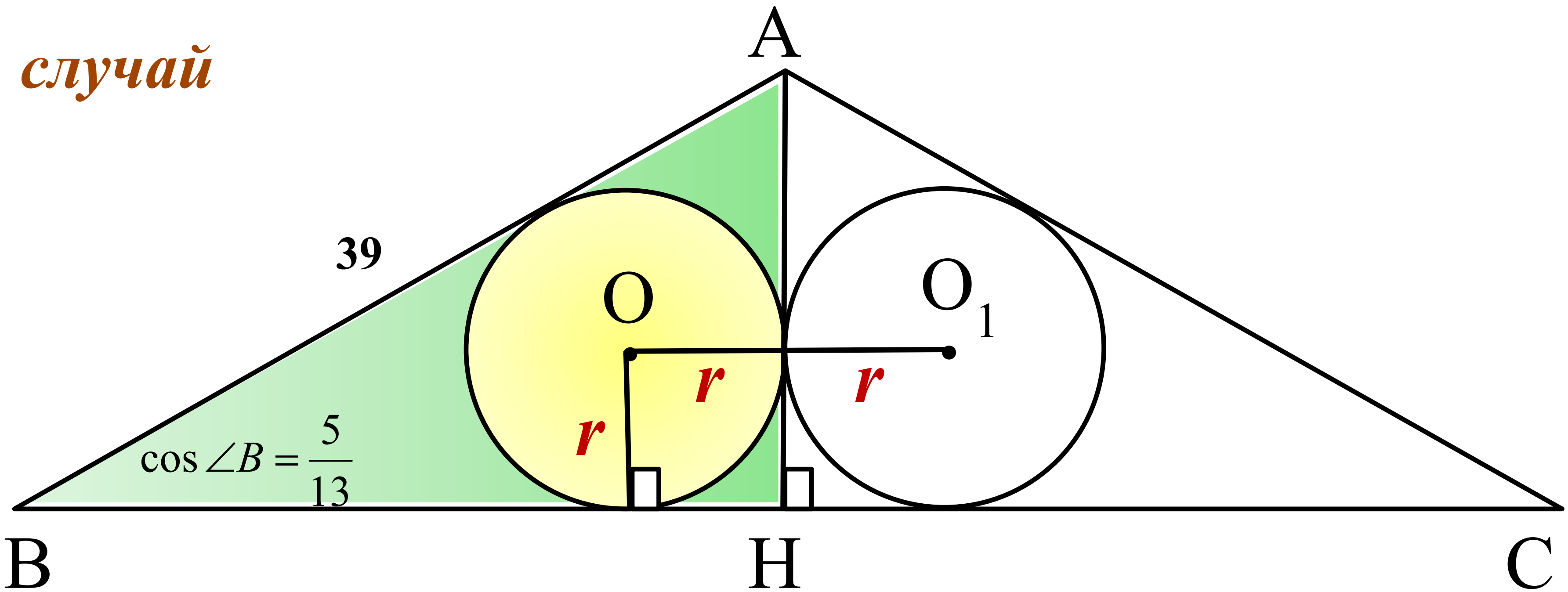
Ответ: $\frac{77}{29}$ или 11

- В треугольнике ABC известны стороны: $AB = 7$, $BC = 9$, $AC = 10$. Окружность, проходящая через точки A и C, пересекает прямые BA и BC соответственно в точках K и L, отличных от вершин треугольника. Отрезок KL касается окружности, вписанной в треугольник ABC. Найдите длину отрезка KL.

Ответ: $\frac{30}{13}$ или 10

ЗАДАЧА №4. Косинус угла при основании равнобедренного треугольника равен 5/13, а боковая сторона равна 39. Внутри треугольника расположены две равные касающиеся окружности, каждая из которых касается двух сторон треугольника. Найдите радиусы окружностей.

1 случай

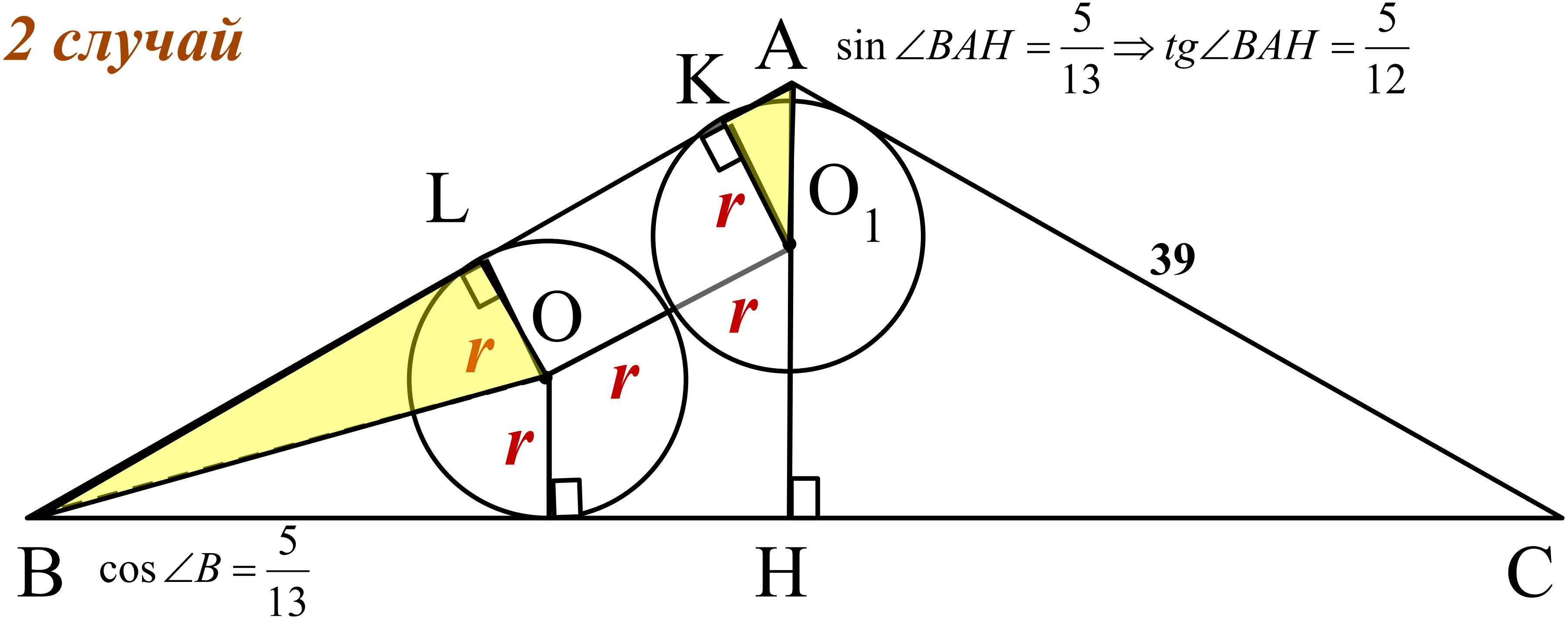


$$BH = AB \cdot \cos\angle B = 15, \qquad AH = \sqrt{AB^2 - BH^2} = \sqrt{39^2 - 15^2} = 36,$$

$$S_{\Delta ABH} = \frac{1}{2} 15 \cdot 36 = 270, \qquad p_{\Delta ABH} = \frac{15 + 39 + 36}{2} = 45,$$

$$r = \frac{270}{45} = 6.$$

2 случай



$$\sin\angle BAH=\frac{5}{13}\Rightarrow tg\angle BAH=\frac{5}{12}$$

$$\cos\angle B=\frac{5}{13}$$

$$AB=AK+LK+LB$$

$$\left.\begin{aligned}
&AK=\frac{O_1K}{tg\angle BAH}=\frac{12r}{5},\\
&LK=2r,\\
&BL=\frac{OL}{tg\dfrac{\angle B}{2}}=\frac{3r}{2},
\end{aligned}\right\}\Rightarrow\frac{12r}{5}+2r+\frac{3r}{2}=39\quad\Rightarrow r=\frac{390}{59}$$

$$2\cos^2\frac{\angle B}{2}-1=\frac{5}{13},\Rightarrow\cos\frac{\angle B}{2}=\frac{3}{\sqrt{13}},\Rightarrow\sin\frac{\angle B}{2}=\frac{2}{\sqrt{13}},\Rightarrow tg\frac{\angle B}{2}=\frac{2}{3}$$

Ответ: 6 или $\frac{390}{59}$

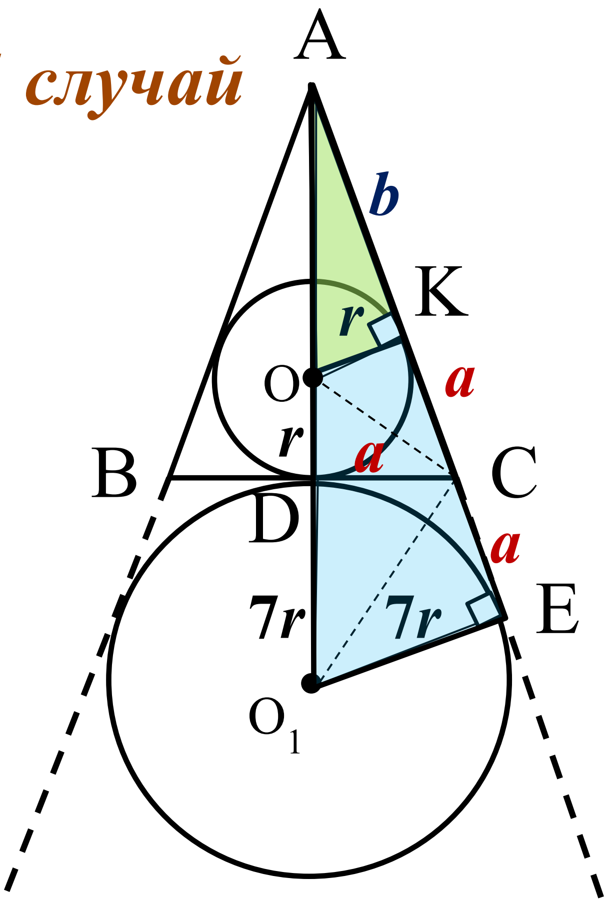
Задачи для самостоятельного решения

- Дан равнобедренный треугольник с основанием 16. Косинус одного из углов равен -7/25. Две равные окружности, касающиеся друг друга и двух сторон треугольника, вписаны в треугольник. Найти их радиусы.

Ответ: $\dfrac{16}{5}$ или $\dfrac{64}{23}$

ЗАДАЧА №5. В каком отношении точка касания вписанной в равнобедренный треугольник окружности делит его боковую сторону, если известно, что радиус окружности, касающейся стороны треугольника и продолжений двух других его сторон, в 7 раз больше радиуса вписанной окружности?

1 случай



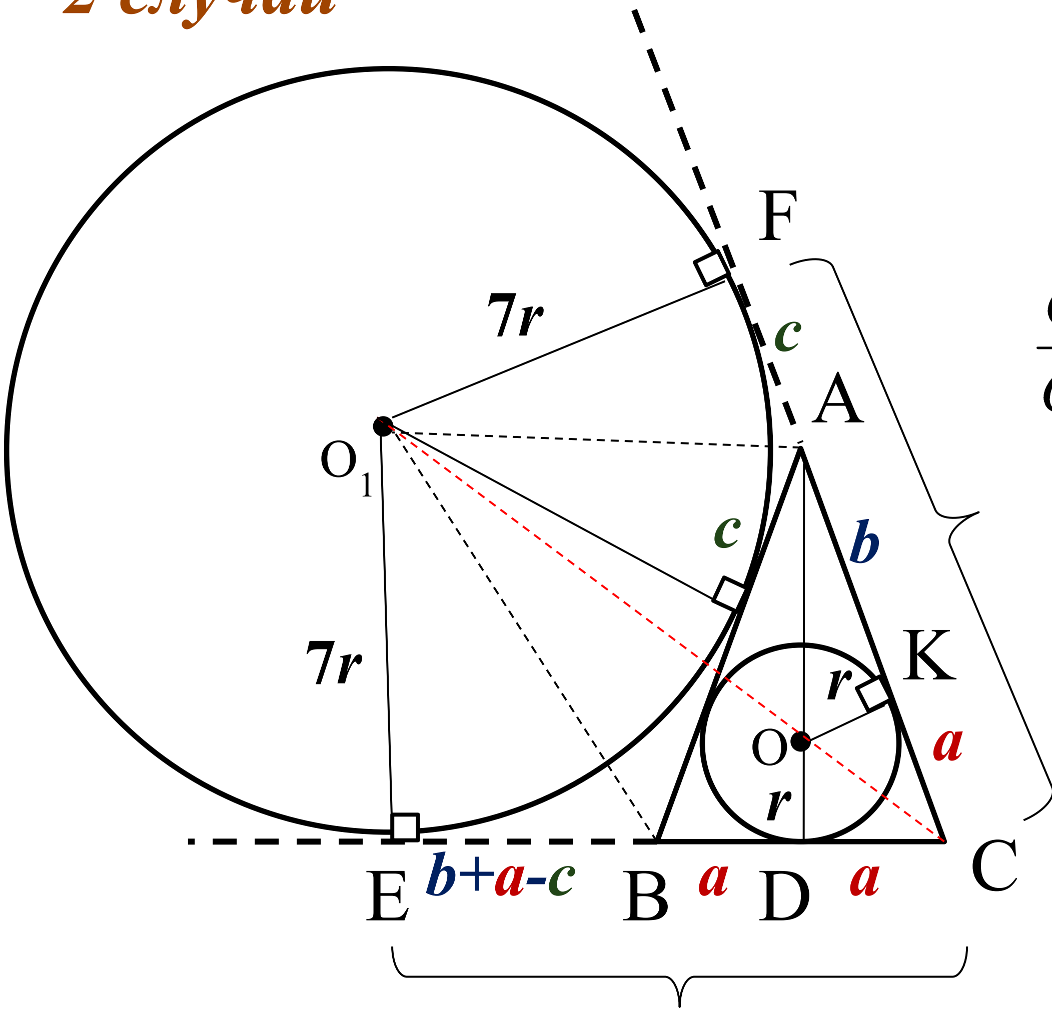
$$\Delta AOK \propto \Delta AO_1E,$$

$$\frac{OK}{O_1E}=\frac{AK}{AE}, \qquad \frac{r}{7r}=\frac{b}{b+2a},$$

$$\frac{b}{b+2a}=\frac{1}{7}, \quad 7b=b+2a, \quad 6b=2a, \quad a=3b$$

$$\frac{KC}{AK}=\frac{a}{b}=\frac{3b}{b}=3.$$

2 случай



$$c+b+a=3a+b-c$$

$$a=c$$

$$\Delta COK \propto \Delta CO_1F,$$

$$\frac{OK}{O_1E}=\frac{CK}{CF}, \qquad \frac{r}{7r}=\frac{a}{b+2a},$$

$$\frac{1}{7}=\frac{a}{b+2a},$$

$$7a=b+2a,$$

$$b=5a,$$

$$\frac{KC}{AK}=\frac{a}{b}=\frac{a}{5a}=\frac{1}{5}.$$

Задачи для самостоятельного решения

- В каком отношении точка касания вписанной в равнобедренный треугольник окружности делит его боковую сторону, если известно, что отношение радиусов его вписанной окружности и окружности, касающейся стороны треугольника и продолжений двух других сторон, равно 2/7?

Ответ: $\frac{5}{4}$ или $\frac{2}{3}$

- Дан равнобедренный треугольник. Найти угол при основании этого треугольника, если радиус вписанной окружности относится к радиусу окружности, касающейся одной из сторон и продолжений двух других сторон, как 1 : 4.

Ответ: $2arctg\frac{1}{2};\ 2arctg\frac{\sqrt{2}}{2}$

- В каком отношении точка касания вписанной в равнобедренный треугольник окружности делит его боковую сторону, если известно, что отношение радиусов его вписанной окружности и окружности, касающейся стороны треугольника и продолжений двух других его сторон, равно 1/5?

Ответ: 2 или $\frac{1}{3}$

- Найдите косинус угла при основании равнобедренного треугольника, если известно, что радиус его вписанной окружности в 6 раз меньше радиуса окружности, касающейся стороны и продолжений двух других сторон треугольника.

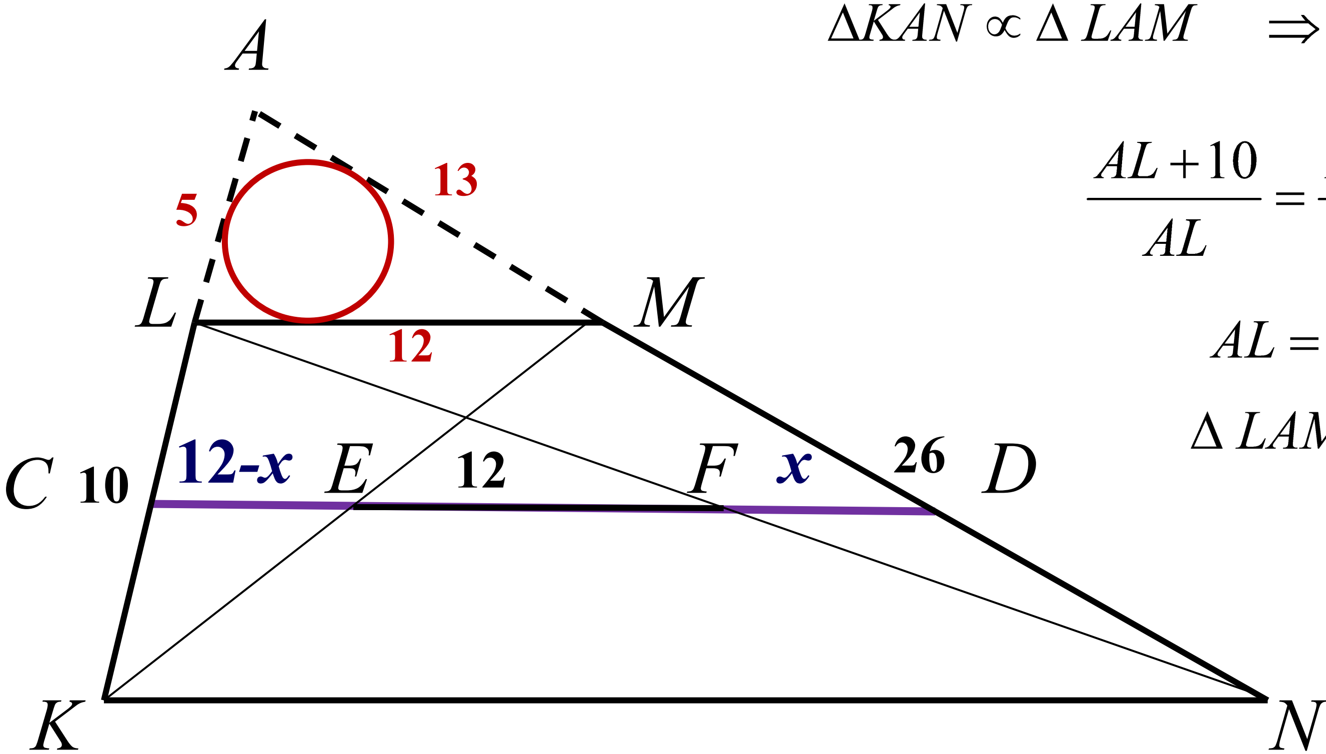
Ответ: $\frac{5}{7}$ или $\frac{1}{5}$

ЗАДАЧА №6. Боковые стороны KL и MN трапеции $KLMN$ равны 10 и 26 соответственно. Отрезок, соединяющий середины диагоналей, равен 12, средняя линия трапеции равна 24. Прямые KL и MN пересекаются в точке A. Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник ALM.

1 случай:

$$\left.\begin{aligned} &\text{из } \Delta LNM: \quad LM = 2x \\ &\text{из } \Delta LKM: \quad LM = 24 - 2x \end{aligned}\right\} \Rightarrow 24 - 2x = 2x$$

$$x = 6, \quad \Rightarrow LM = 12, \quad KN = 36$$



$$\Delta KAN \propto \Delta LAM \quad \Rightarrow \frac{AK}{AL} = \frac{AN}{AM} = \frac{KN}{LM}$$

$$\frac{AL+10}{AL} = \frac{AM+26}{AM} = \frac{36}{12}$$

$$AL = 5, \quad AM = 13.$$

ΔLAM – *прямоугольный*

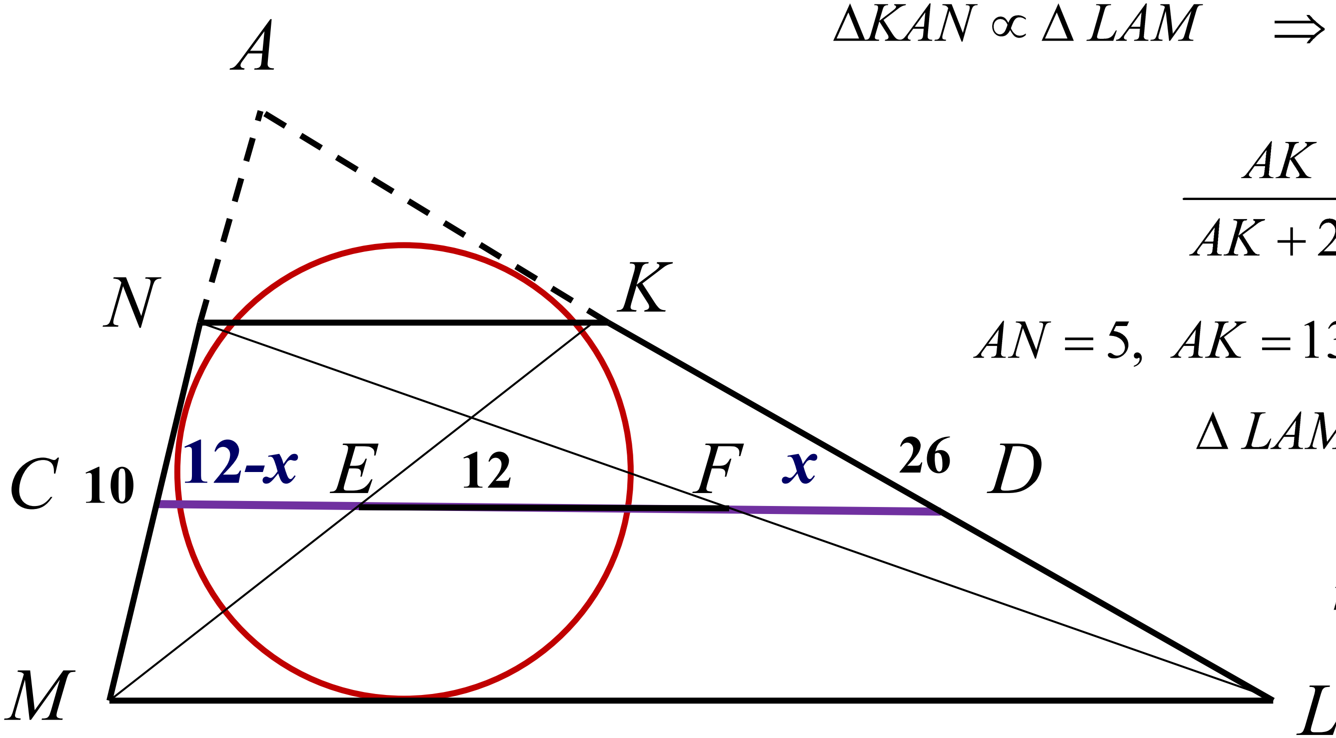
$$r = \frac{\frac{1}{2}\cdot 5\cdot 12}{\frac{1}{2}(5+12+13)} = 2$$

2 случай:

$$\left.\begin{aligned} &из\ \Delta NLK:\ \ NK = 2x \\ &из\ \Delta NMK:\ \ NK = 24-2x \end{aligned}\right\} \Rightarrow 24-2x = 2x$$

$$x = 6, \quad \Rightarrow NK = 12, \quad ML = 36$$

$$\Delta KAN \propto \Delta LAM \quad \Rightarrow \frac{AK}{AL} = \frac{AN}{AM} = \frac{KN}{LM}$$



$$\frac{AK}{AK+26} = \frac{AN}{AN+10} = \frac{12}{36}$$

$$AN = 5,\ AK = 13.\ \ AL = 39,\ AM = 15.$$

$$\Delta LAM - прямоугольный$$

$$r = \frac{\frac{1}{2}\cdot 15\cdot 36}{\frac{1}{2}(15+39+36)} = 6$$

ОТВЕТ: 2 или 6

Задачи для самостоятельного решения:

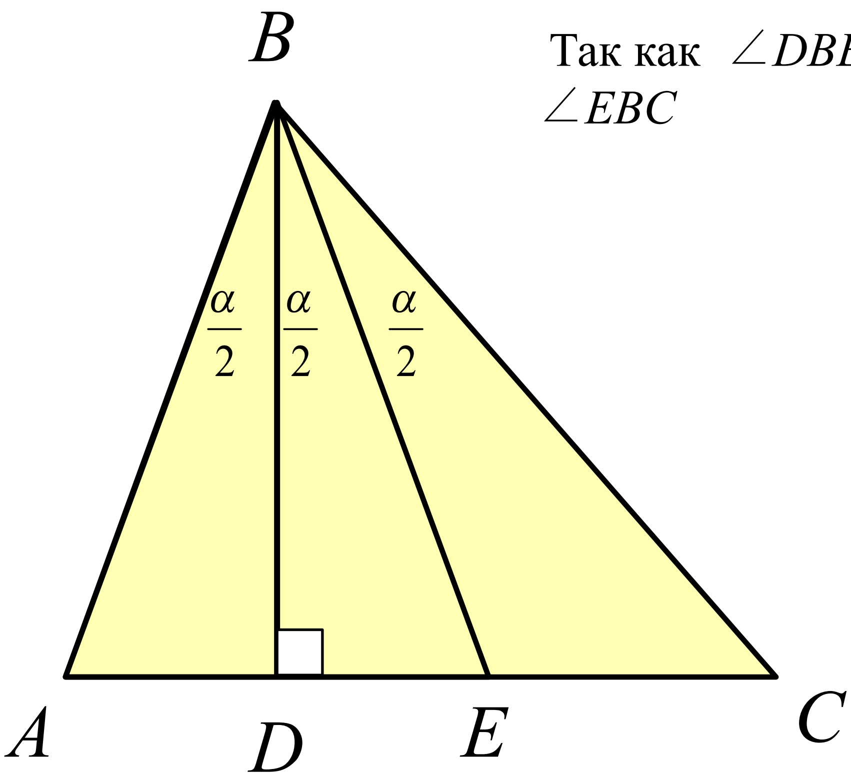
- Боковые стороны AB и CD трапеции $ABCD$ равны 6 и 8 соответственно. Отрезок, соединяющий середины диагоналей, равен 5, средняя линия трапеции равна 25. Прямые AB и CD пересекаются в точке M. Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник BMC.

***Ответ*:** 4 или 6

- Боковые стороны AB и CD трапеции $ABCD$ равны 7 и 24 соответственно. Отрезок, соединяющий середины диагоналей, равен 12.5, средняя линия трапеции равна 27.5. Прямые AB и CD пересекаются в точке M. Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник BMC.

***Ответ*:** 1,8 или 4,8

ЗАДАЧА №7. Дан треугольник ABC. Точка E на прямой AC выбрана так, что треугольник ABE, площадь которого равна 14, - равнобедренный с основанием AE и высотой BD. Найдите площадь треугольника ABC, если известно, что $\angle ABE = \angle CBD = \alpha$ и tg $\alpha = 24/7$.



Так как $\angle DBE = \angle EBC$

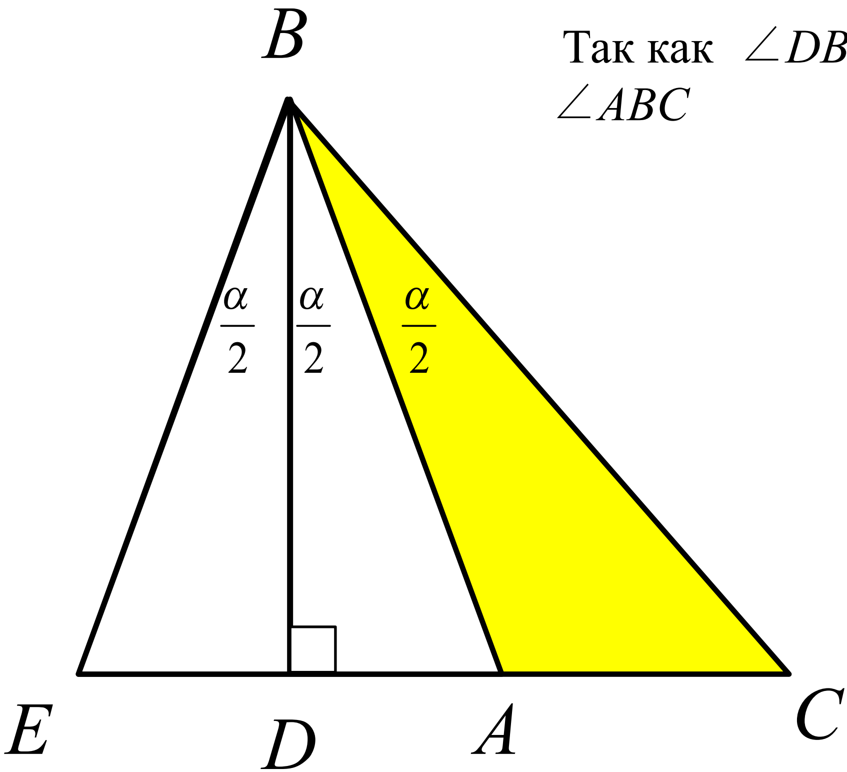
$$\frac{\Delta S_{DBE}}{\Delta S_{EBC}} = \frac{BD \cdot BE}{BE \cdot BC} = \frac{BD}{BC} = \cos\alpha$$

$$\Delta S_{EBC} = \frac{\Delta S_{DBE}}{\cos\alpha}$$

$$1 + tg^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha} \Rightarrow \cos\alpha = \frac{7}{25}$$

$$\Delta S_{EBC} = \frac{7 \cdot 25}{7} = 25$$

$$\Delta S_{ABC} = 14 + 25 = 39$$



Так как $\angle DBA = \angle ABC$

$$\frac{\Delta S_{DBA}}{\Delta S_{ABC}} = \frac{BD \cdot BA}{BA \cdot BC} = \frac{BD}{BC} = \cos\alpha$$

$$\Delta S_{ABC} = \frac{\Delta S_{DBA}}{\cos\alpha}$$

$$1 + tg^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha} \Rightarrow \cos\alpha = \frac{7}{25}$$

$$\Delta S_{ABC} = \frac{7 \cdot 25}{7} = 25$$

***Ответ*:** 25 или 39

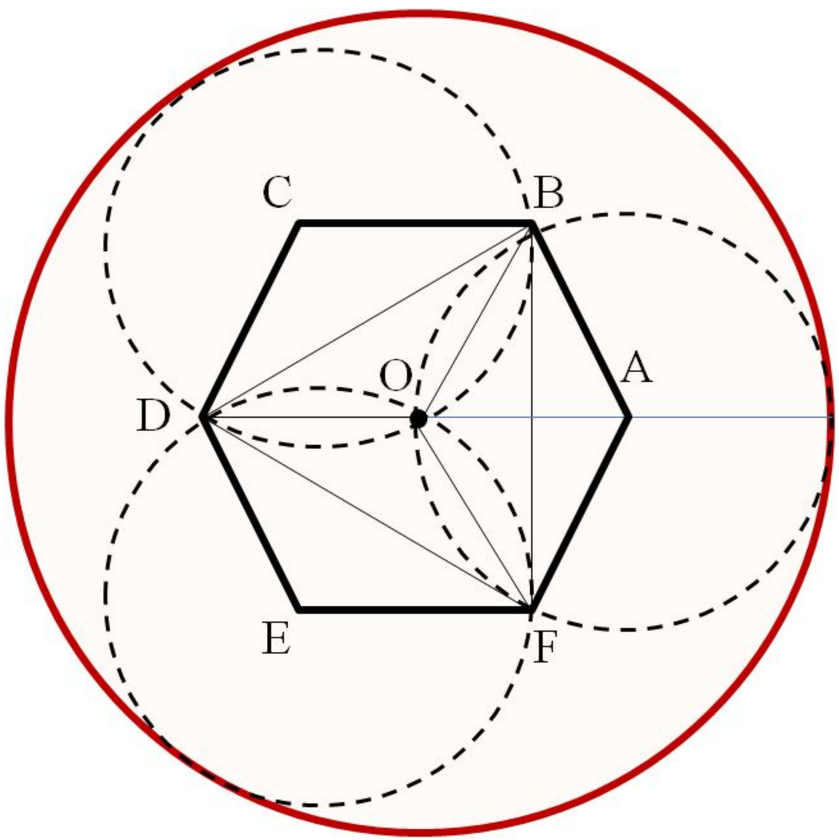
Задача для самостоятельного решения

- Дан треугольник ABC, площадь которого равна 55. Точка E на прямой AC выбрана так, что треугольник ABE - равнобедренный с основанием AE и высотой BD. Найдите площадь треугольника ABE, если известно, что $\angle ABE = \angle CBD = \alpha$ и $\mathrm{tg}\alpha = 4/3$.

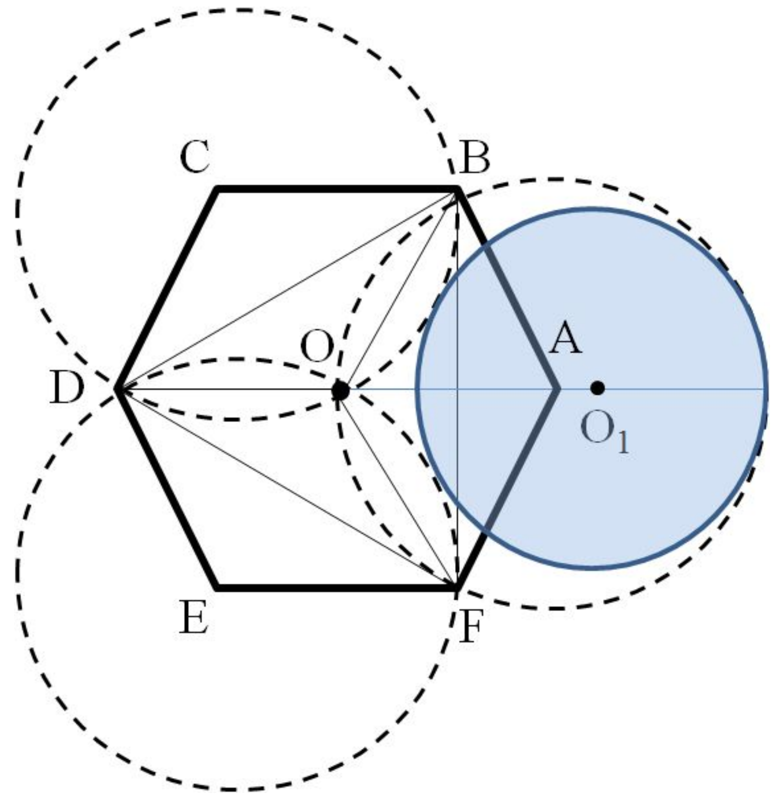
***Ответ*:** 30 или 66

ЗАДАЧА №8. Точка O- центр правильного шестиугольника *ABCDEF* со стороной 7. Найдите радиус окружности, касающейся окружностей , описанных около треугольников *BOD, DOF, BOF.*

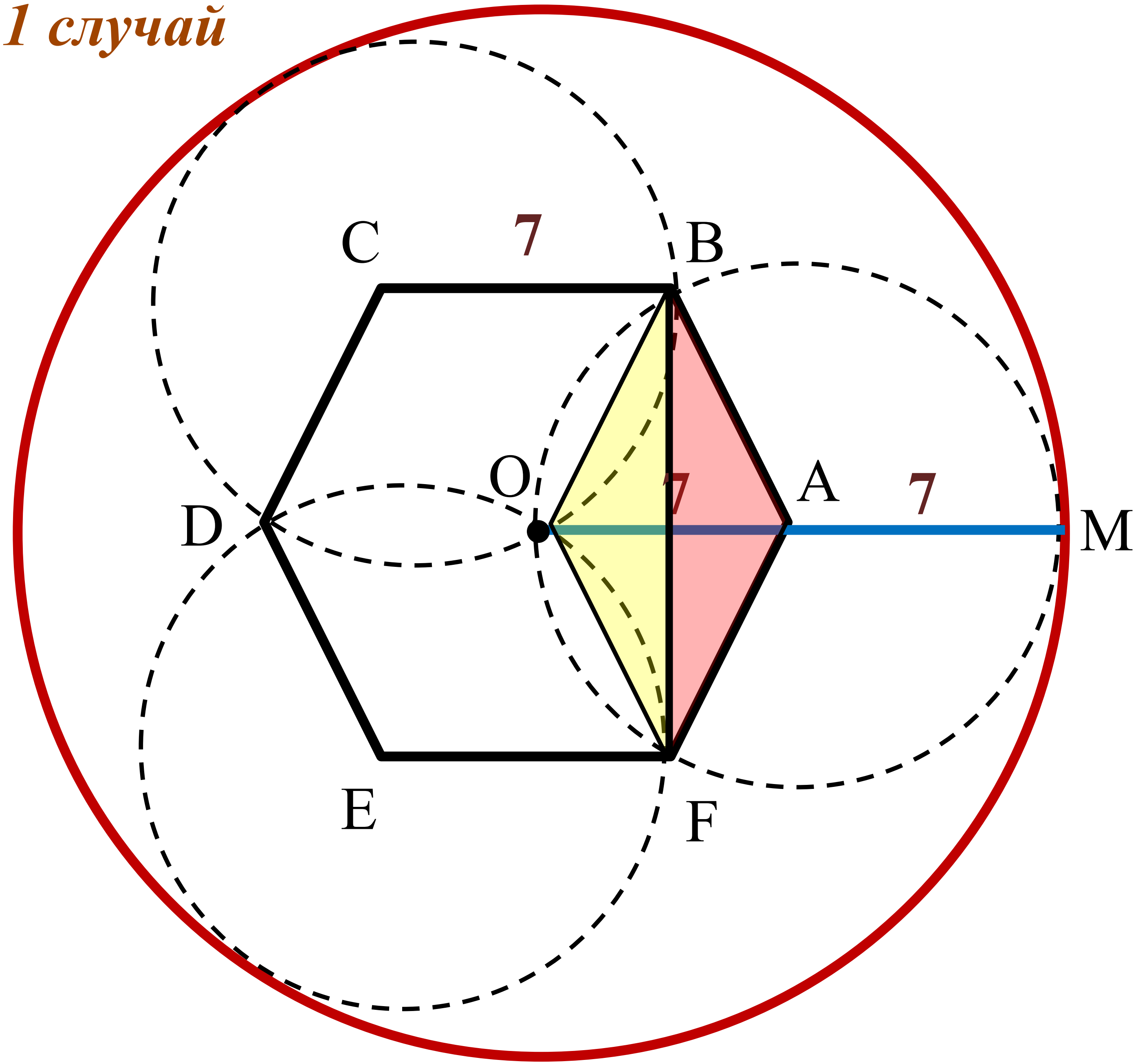
1 случай



2 случай

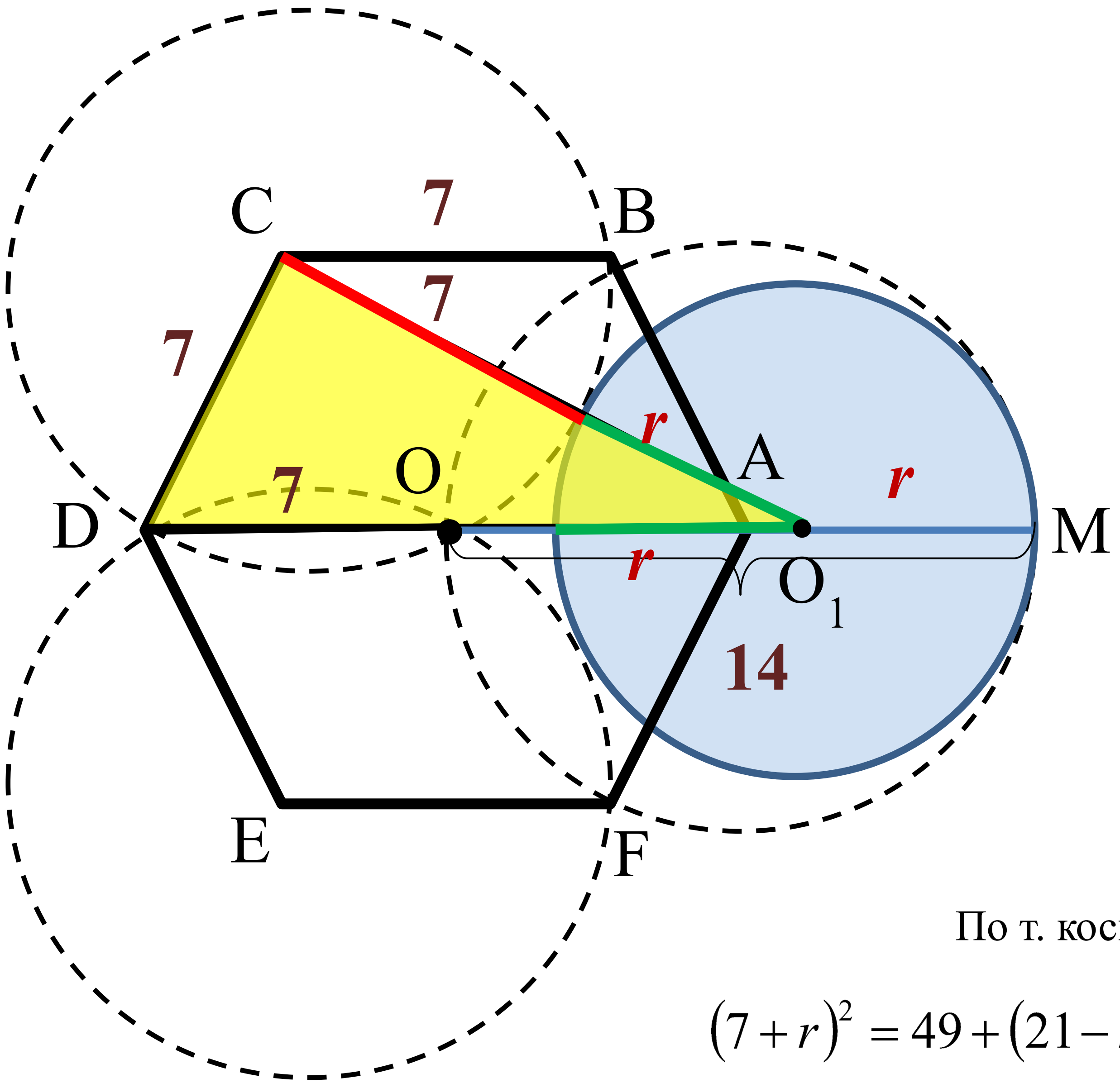


1 случай



$r = 14$

2 случай



$\triangle\ CDO_1$:

$DC=7$

$DO_1=21-r$

$CO_1=7+r$

$\angle\ CDO_1=60^0$

По т. косинусов:

$$(7+r)^2=49+(21-r)^2-14(21-r)\cos 60^0$$

$$r=6$$

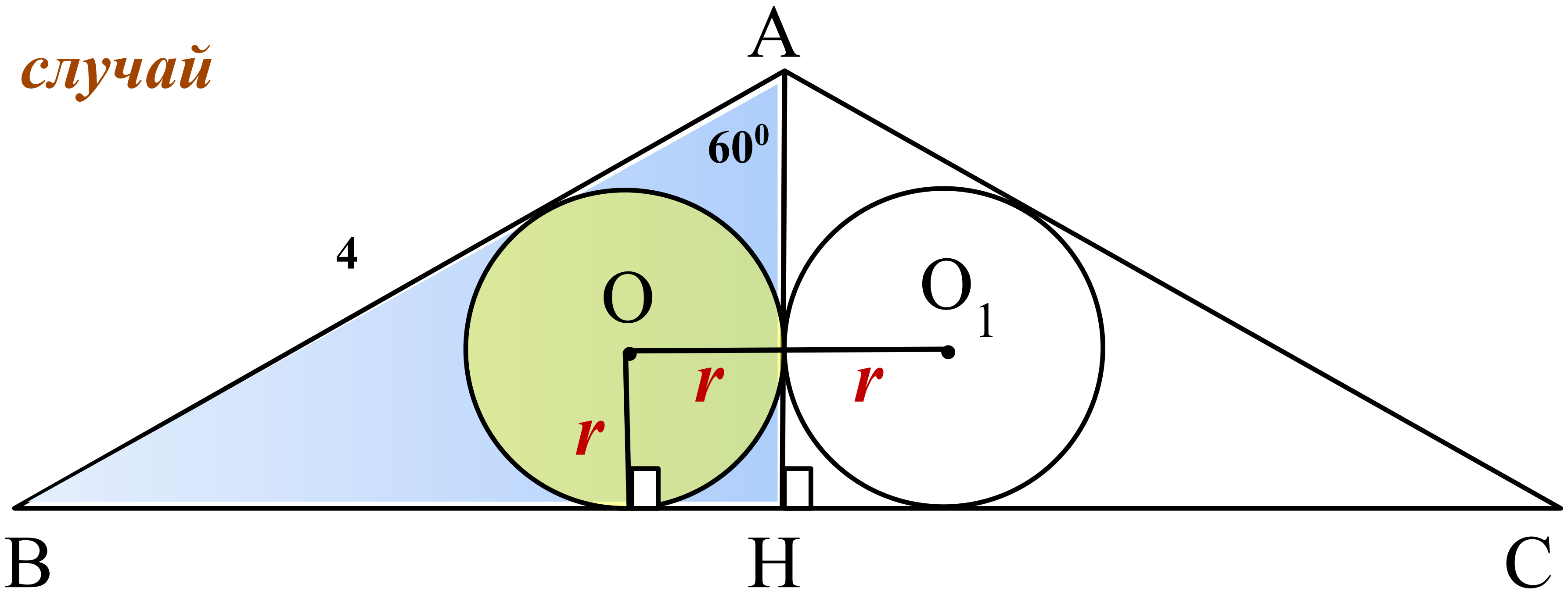
Задача для самостоятельного решения

- Точка O - центр правильного шестиугольника $ABCDEF$ со стороной . Найдите радиус окружности касающейся окружностей, описанных около треугольников AOB, COD , EOF .

***Ответ*:** 28 или 12

ЗАДАЧА №9. Дан равнобедренный треугольник с боковой стороной 4 и углом 120^0. Внутри него расположены две равные касающиеся окружности, каждая из которых касается двух сторон треугольника. Найдите радиусы окружностей.

1 случай



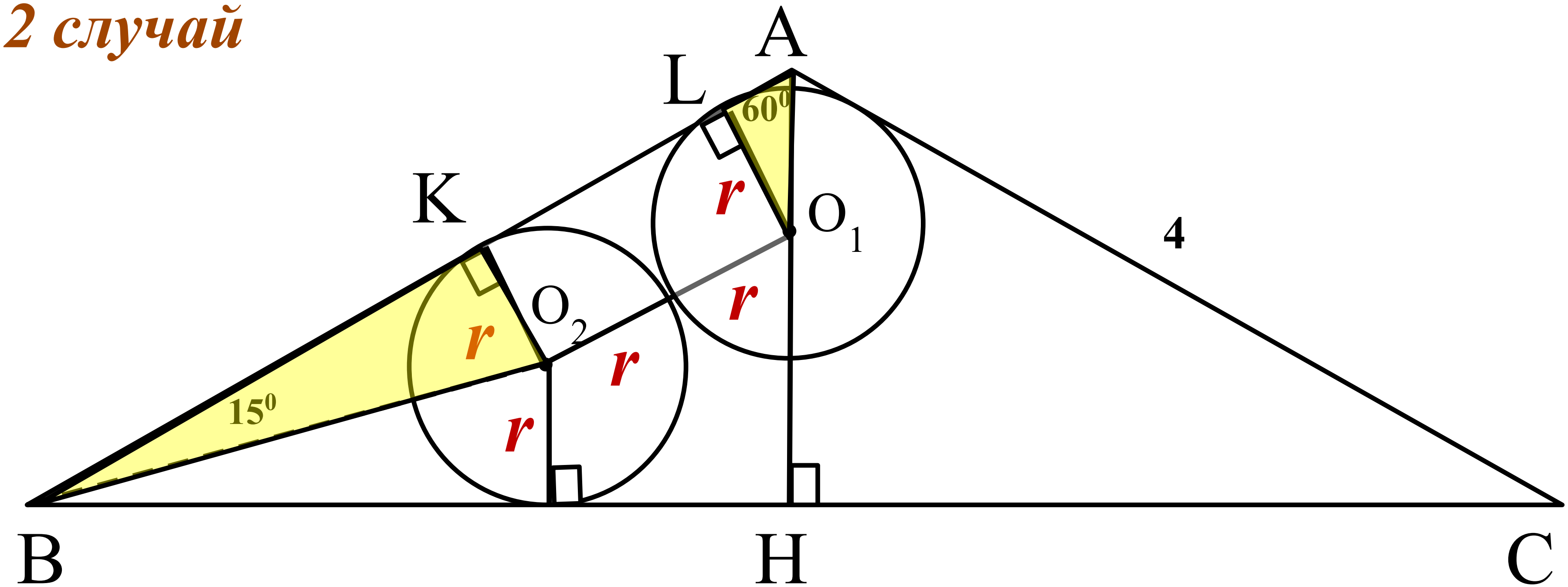
$$В \quad \Delta ABH: \quad AH = 2, BH = 2\sqrt{3}$$

$$S_{\Delta ABH} = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2\sqrt{3} = 2\sqrt{3}$$

$$p_{\Delta ABH} = \frac{1}{2}(2 + 2\sqrt{3} + 4) = 3 + \sqrt{3}$$

$$r = \frac{2\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}\left(3-\sqrt{3}\right)}{6} = \frac{6\left(\sqrt{3}-1\right)}{6} = \sqrt{3}-1$$

2 случай



$$AB = AL + LK + KB$$

$$\left.\begin{aligned} &B\quad \Delta\, AO_1L:\quad AL = \frac{r}{tg60^0} \Rightarrow AL = \frac{r\sqrt{3}}{3} \\ &B\quad \Delta\, BO_2K:\quad BK = \frac{r}{tg15^0} \Rightarrow BK = \frac{r}{2-\sqrt{3}} = r\left(2+\sqrt{3}\right) \\ &LK = 2r \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{r\sqrt{3}}{3} + 2r + r\left(2+\sqrt{3}\right) = 4$$

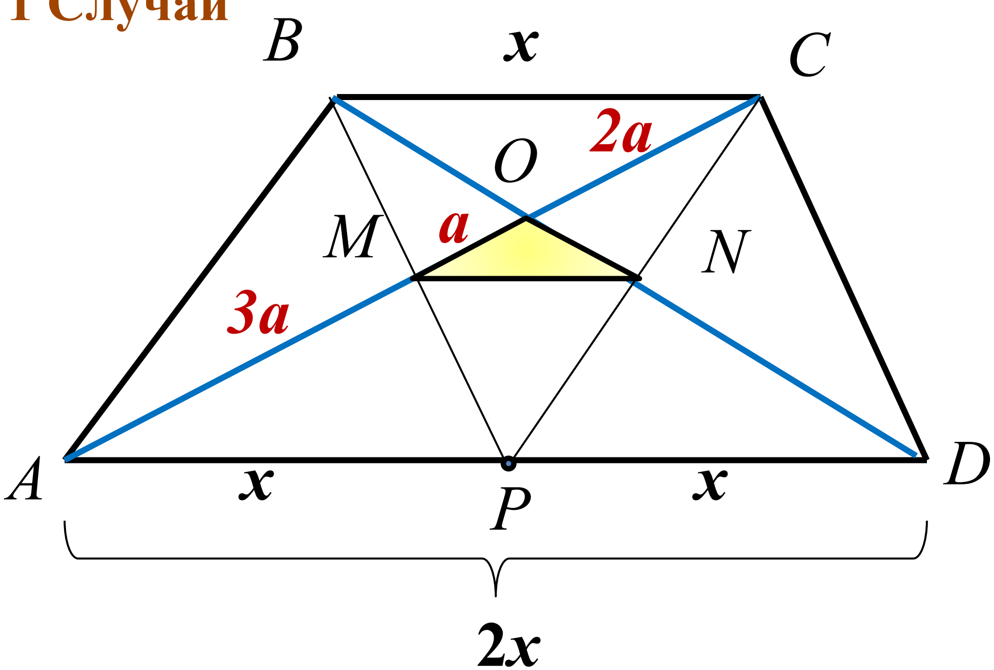
$$r = \frac{3-\sqrt{3}}{2}$$

$$tg15^0 = tg(45^0 - 30^0) = \frac{tg45^0 - tg30^0}{1 + tg45^0 tg30^0} = \frac{1 - \frac{1}{\sqrt{3}}}{1 + 1\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}} = 2 - \sqrt{3}$$

Ответ: $\sqrt{3} - 1$ или $\dfrac{3-\sqrt{3}}{2}$

ЗАДАЧА №10. Площадь трапеции $ABCD$ равна 135. Диагонали пересекаются в точке O. Отрезки, соединяющие середину P основания AD с вершинами B и C, пересекаются с диагоналями трапеции в точках M и N . Найдите площадь треугольника MON, если одно из оснований трапеции вдвое больше другого.

1 Случай



$$S = \frac{1}{2}(x + 2x)h = 135, \quad \Rightarrow hx = 90$$

M, N - середины диагоналей

OC - медиана

$\Delta MON \propto AOD$

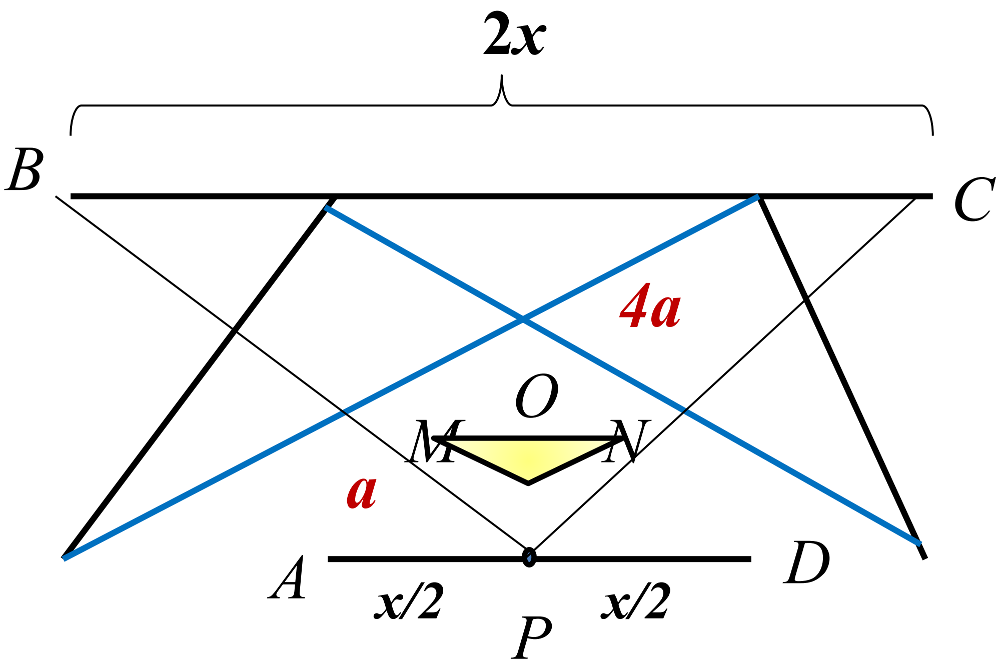
$$\frac{MN}{AD} = \frac{OM}{OA} = \frac{ON}{OD}$$

$$\frac{MN}{2x} = \frac{a}{4a}, \quad \Rightarrow MN = \frac{x}{2}.$$

$$\Delta BOC \propto AOD, \quad k = \frac{1}{2}, \quad \Rightarrow h_{\Delta AOD} = \frac{2}{3}h. \quad \Rightarrow h_{\Delta MON} = \frac{h}{6},$$

$$S = \frac{1}{2} \cdot \frac{x}{2} \cdot \frac{h}{6} = \frac{90}{24} = \frac{15}{4}.$$

2 Случай



$$S=\frac{1}{2}(x+2x)h=135,\qquad \Rightarrow hx=90$$

$$\Delta BOC \propto AOD,\quad k=2,\Rightarrow h_{\Delta AOD}=\frac{1}{3}h.$$

$$\Delta BMC \propto AMP,\quad k=4$$

$$\Delta ACP \propto MCN,\quad k=\frac{5}{4}$$

$$\frac{MN}{\frac{x}{2}}=\frac{4}{5},\ \Rightarrow MN=\frac{2x}{5}.$$

$$AOD \propto \Delta MON,\quad k=\frac{5}{2}$$

$$\frac{\frac{h}{3}}{h_{\Delta MON}}=\frac{5}{2},\ \Rightarrow h_{\Delta MON}=\frac{2h}{15},$$

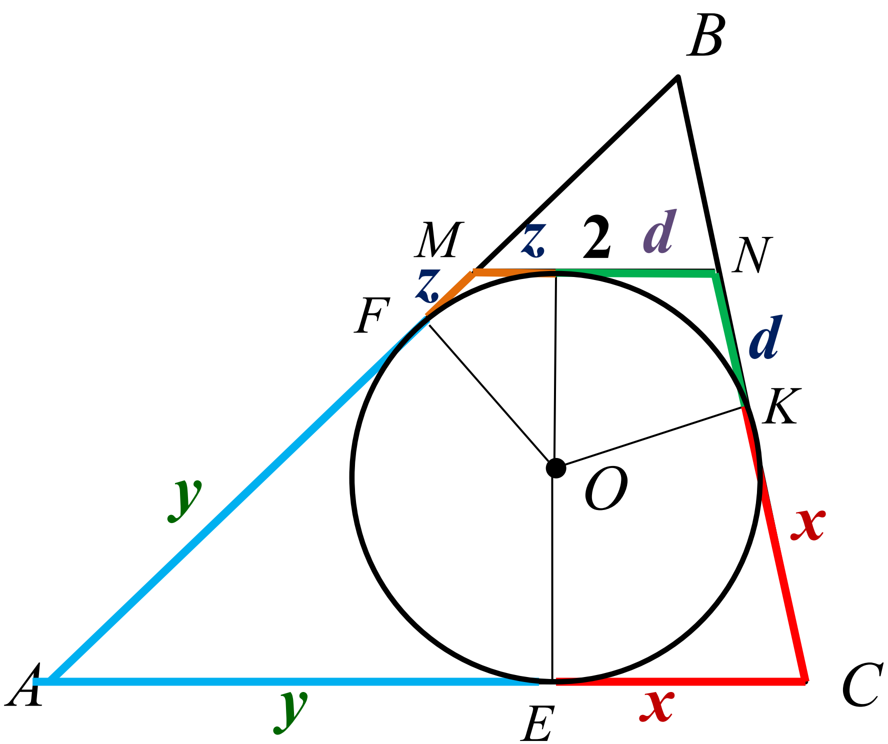
$$S=\frac{1}{2}\cdot\frac{2x}{5}\cdot\frac{2h}{15}=\frac{2\cdot 90}{75}=\frac{12}{5}.$$

Задача для самостоятельного решения.

- Площадь трапеции $ABCD$ равна 810. Диагонали пересекаются в точке O. Отрезки, соединяющие середину P основания AD с вершинами B и C, пересекаются с диагоналями трапеции в точках M и N. Найдите площадь треугольника MON, если одно из оснований трапеции вдвое больше другого.

Ответ: 22,5 или 14,4

К окружности, вписанной в треугольник с периметром 18, проведена касательная параллельно основанию треугольника. Отрезок касательной между боковыми сторонами равен 2. Найдите основание треугольника.



$$\Delta MBN \propto ABC$$

$$\frac{MN}{AC} = \frac{P_{\Delta MBN}}{P_{\Delta ABC}}$$

$$\frac{2}{AC} = \frac{MB + BN + 2}{18}$$

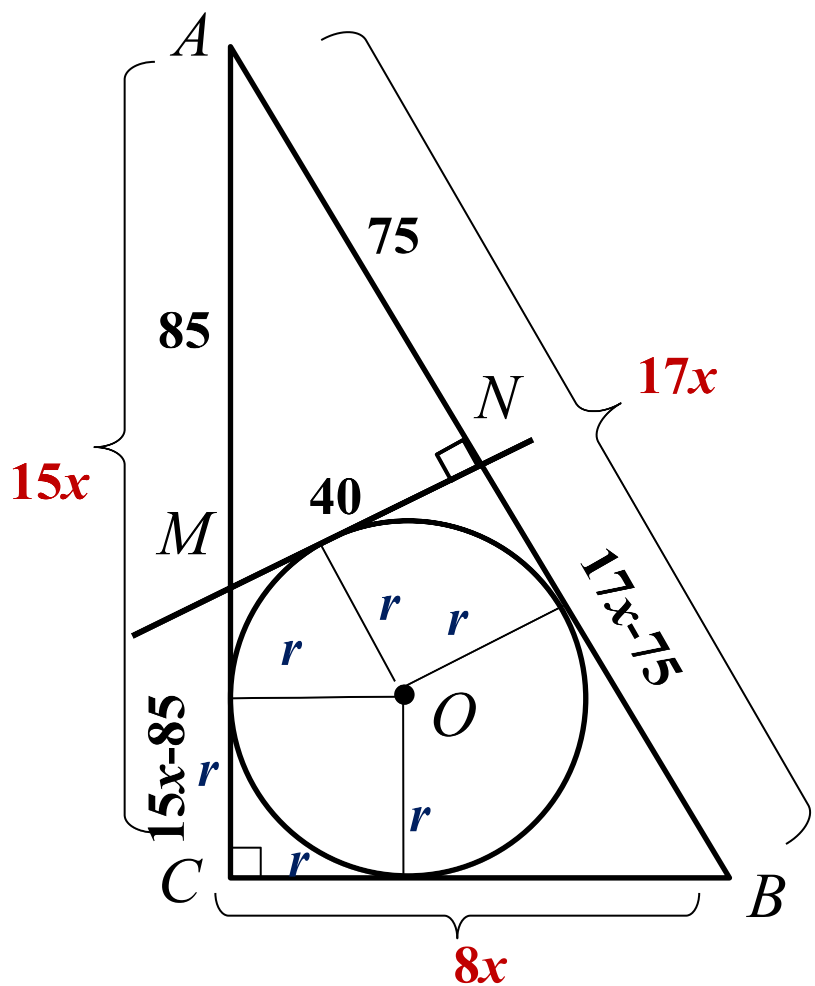
$$MB + BN + \underbrace{d + z}_{2} + \underbrace{2x + 2y}_{2AC} = 18$$

$$MB + BN = 16 - 2AC$$

$$\frac{2}{AC} = \frac{16 - 2AC + 2}{18}, \quad AC^2 - 9AC + 18 = 0, \qquad AC = 3, \; или \;\; AC = 6.$$

ЗАДАЧА №11. Прямая, перпендикулярная гипотенузе прямоугольного треугольника, отсекает от него четырехугольник, в который можно вписать окружность. Найти радиус окружности, если отрезок этой прямой, заключенной внутри треугольника, равен 40, а отношение катетов треугольника равно 15/8 .

1 Случай



$$\Delta AMN \propto ABC$$

$$\frac{MN}{CB} = \frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$$

$$\frac{40}{8x} = \frac{AM}{17x} = \frac{AN}{15x}$$

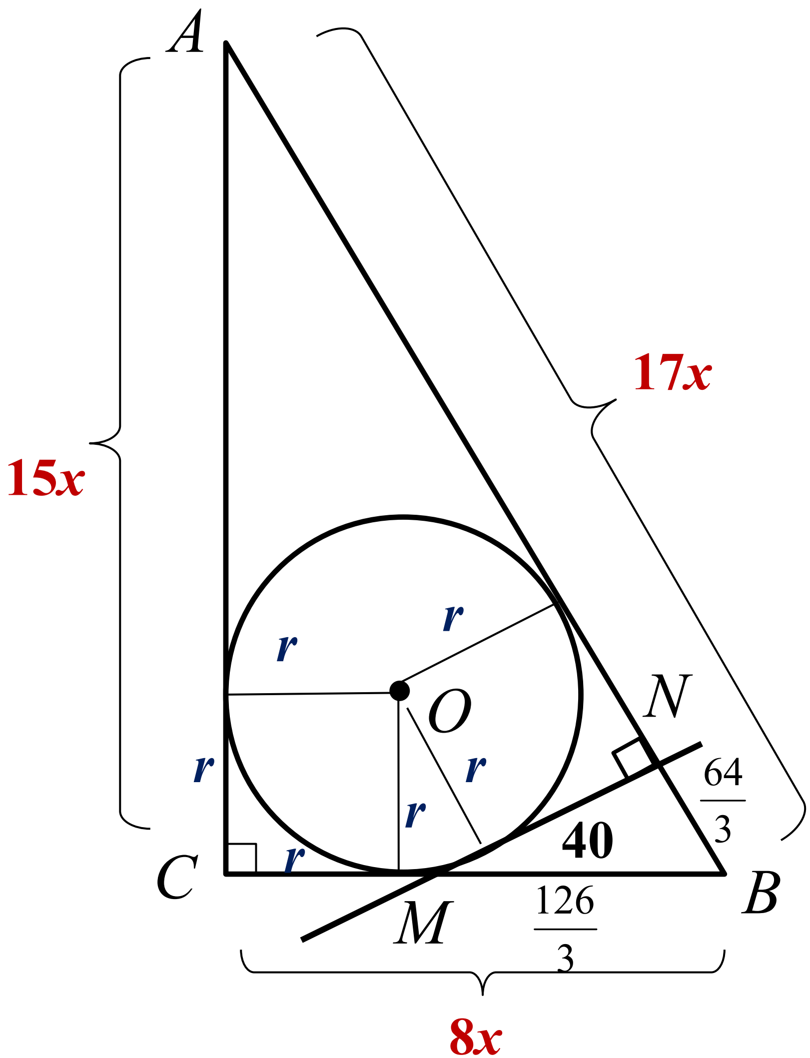
$$AM = 85,\ \ AN = 75$$

$$15x - 85 + 17x - 75 = 40 + 8x$$

$$24x = 200,\ \Rightarrow x = \frac{25}{3}$$

$$r = \frac{\frac{1}{2}\cdot 8x \cdot 15x}{\frac{1}{2}\cdot\left(8x + 15x + 17x\right)} = 3x, \Rightarrow r = 25.$$

2 Случай



$$\Delta BMN \propto ABC$$

$$\frac{MN}{AC} = \frac{MB}{AB} = \frac{NB}{BC}$$

$$\frac{40}{15x} = \frac{MB}{17x} = \frac{NB}{8x}$$

$$MB = \frac{136}{3}, \quad NB = \frac{64}{3}$$

$$8x - \frac{136}{3} + 17x - \frac{64}{3} = 40 + 15x$$

$$30x = 320, \Rightarrow x = \frac{32}{3}$$

$$r = \frac{\frac{1}{2} \cdot 8x \cdot 15x}{\frac{1}{2} \cdot (8x + 15x + 17x)} = 3x, \Rightarrow r = 32.$$

Задачи для самостоятельного решения.

- Прямая, перпендикулярная гипотенузе прямоугольного треугольника, отсекает от него четырехугольник, в который можно вписать окружность. Найти радиус окружности, если отрезок этой прямой, заключенной внутри треугольника, равен 10, а отношение катетов треугольника равно 5/12 .

Ответ: $6 \ или \ \frac{25}{3}$

- Прямая, перпендикулярная гипотенузе прямоугольного треугольника, отсекает от него четырехугольник, в который можно вписать окружность. Найти радиус окружности, если отрезок этой прямой, заключенной внутри треугольника, равен 6, а отношение катетов треугольника равно 3/4 .

Ответ: $4 \ или \ 4{,}5$

- Прямая, перпендикулярная гипотенузе прямоугольного треугольника, отсекает от него четырехугольник, в который можно вписать окружность. Найти площадь четырехугольника, если гипотенуза треугольника равна 10, а радиус окружности, равен 2 .

Ответ: $\frac{50}{3} \ или \ \frac{85}{6}$

Задачи для самостоятельного решения.

- Прямая, перпендикулярная гипотенузе прямоугольного треугольника, отсекает от него четырехугольник, в который можно вписать окружность. Найти радиус окружности, если отрезок этой прямой, заключенной внутри треугольника, равен 12, а косинус острого угла равен 0,6 .

Ответ: $8 \textit{ или } 9$

- Прямая, перпендикулярная боковой стороне равнобедренного треугольника с основанием равным 12, отсекает от него четырехугольник, в который можно вписать окружность. Найти площадь четырехугольника, если радиус окружности равен 3.

Ответ: $46\frac{2}{7} \textit{ или } 42$

- Прямая, перпендикулярная боковой стороне равнобедренного треугольника , отсекает от него четырехугольник, в который можно вписать окружность. Найти радиус окружности, если отрезок этой прямой, заключенной внутри треугольника, равен 24, а синус угла при основании равен 0,8 .

Ответ: $18 \textit{ или } 21$

Задачи для самостоятельного решения.

- Прямая, перпендикулярная гипотенузе прямоугольного треугольника с катетами 6 и 8, отсекает от него четырехугольник, в который можно вписать окружность. Найти площадь этого четырехугольника.

Ответ: $18 \text{ } или \text{ } 21\frac{1}{3}$

- Прямая, перпендикулярная гипотенузе прямоугольного треугольника с катетами 5 и 12, отсекает от него четырехугольник, в который можно вписать окружность. Найти площадь этого четырехугольника.

Ответ: $28{,}8 \text{ } или \text{ } 16\frac{2}{3}$

- Прямая, перпендикулярная боковой стороне равнобедренного треугольника, отсекает от него четырехугольник, в который можно вписать окружность. Найти радиус окружности, если отрезок этой прямой, заключенной внутри треугольника, равен 20, а отношение боковой стороны треугольника к его основанию равно 13/10 .

Ответ: $18 \text{ } или \text{ } 21\frac{1}{3}$

- Прямая, перпендикулярная боковой стороне равнобедренного треугольника, отсекает от него четырехугольник, в который можно вписать окружность. Найти радиус окружности, если отрезок этой прямой, заключенной внутри треугольника, равен 6, а отношение боковой стороны треугольника к его основанию равно 5/6.

Ответ: $4{,}5 \text{ } или \text{ } \frac{21}{4}$

Задачи для самостоятельного решения.

- Прямая, перпендикулярная боковой стороне равнобедренного треугольника со сторонами равным и 10, 10, 12, отсекает от него четырехугольник, в который можно вписать окружность. Найти площадь четырехугольника.

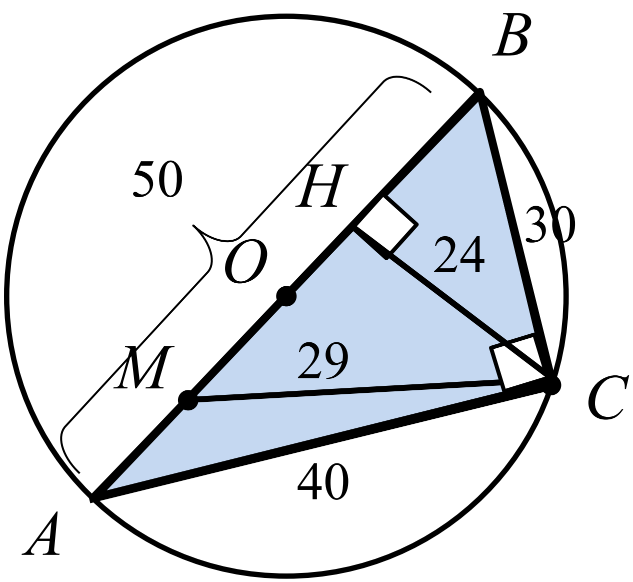
Ответ: $46\frac{2}{7}$ *или* 42

- Прямая, перпендикулярная боковой стороне равнобедренного треугольника со сторонами равным и 10, 13, 13, отсекает от него четырехугольник, в который можно вписать окружность. Найти площадь четырехугольника.

Ответ: $49\frac{1}{51}$ *или* $56\frac{2}{3}$

ЗАДАЧА №12. Точка M лежит на отрезке AB. На окружности с диаметром AB взята точка C, удаленная от точек A, M и B на расстояния 40, 29 и 30 соответственно. Найти площадь треугольника BMC.

1 Случай



$$HM = \sqrt{29^2 - 24^2} = \sqrt{265}$$

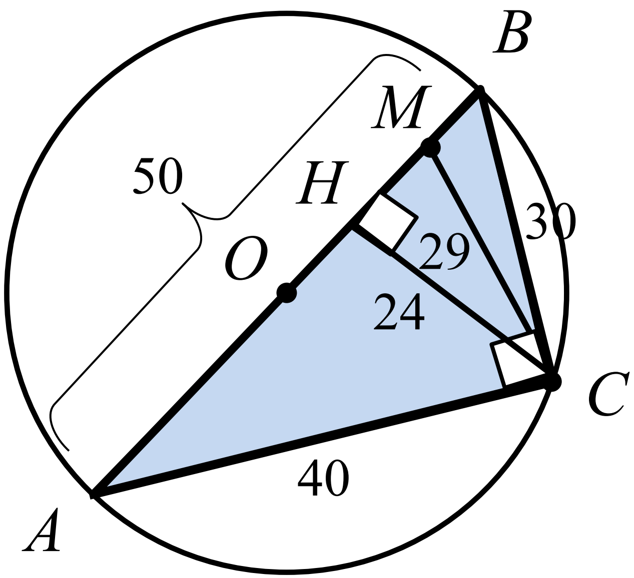
$$HB = \sqrt{30^2 - 24^2} = 18$$

$$S_{\Delta CHM} = \frac{1}{2} \cdot 24 \cdot \sqrt{265} = 12\sqrt{265}$$

$$S_{\Delta CHB} = \frac{1}{2} \cdot 24 \cdot 18 = 216$$

$$S_{\Delta CMB} = 12\sqrt{265} + 216$$

2 Случай



$$HM = \sqrt{29^2 - 24^2} = \sqrt{265}$$

$$HB = \sqrt{30^2 - 24^2} = 18$$

$$S_{\Delta CHM} = \frac{1}{2} \cdot 24 \cdot \sqrt{265} = 12\sqrt{265}$$

$$S_{\Delta CHB} = \frac{1}{2} \cdot 24 \cdot 18 = 216$$

$$S_{\Delta CMB} = 216 - 12\sqrt{265}$$

Задача для самостоятельного решения.

- Точка M лежит на отрезке AB. На окружности с диаметром AB взята точка C, удаленная от точек A,M и B на расстояния 20, 14 и 15 соответственно. Найти площадь треугольника BMC.

Ответ: $54 \pm 12\sqrt{13}$