Семінар: «Вектори»

Викладач: Мальцев Олександр Михайлович

Сума векторів

Сума 4 одиничних векторів дорівнює нулю. Доведіть, що їх можна розбити на дві пари протилежних векторів.

Розв'язок

Із цих векторів можна скласти опуклий чотирикутник. Довжини всіх сторін цього чотирикутника дорівнюють 1,тому він — ромб; пари його протилежних сторін – шукане розбиття.

Сума векторів

Нехай M та N - середини сторін AB и CD четирикутника ABCD. Доведіть, що якщо MN=(BC+AD)/2, то ABCD - трапеція.

Розв'язок

Запишемо векторні рівності $\overline{MN} = \overline{MB} + \overline{BC} + \overline{CN}$ $\overline{MN} = \overline{MA} + \overline{AD} + \overline{DN}$

Складемо ці рівності, зазначивши, що $\overline{MA} = -\overline{MB}$ та $\overline{CN} = -\overline{DN}$, отримуємо: $\overline{MN} = \left(\overline{BC} + \overline{AD}\right)/2$. Оскільки довжина суми векторів не перевищує суми довжин ветокрів, то MN завжди не більше, ніж (BC+AD)/2. Кріме того, рівність досягається тільки у випадку, коли вектори BC и AD колінеарні, тобто коли ABCD - трапеція с основами BC і AD.

Скалярний добуток

Доведіть, що коли діагоналі чотирикутника *ABCD* перпендикулярні, то і діагоналі будь-якого іншого чотирикутника з такими ж довжинами сторін перпендикулярні.

Розв'язок

Нехай $\mathbf{a} = \overline{AB}$, $\mathbf{b} = \overline{BC}$, $\mathbf{c} = \overline{CD}$ і $\mathbf{d} = \overline{DA}$.

Достатньо перевірити, що $AC \perp BD$, коли $a^2 + c^2 = b^2 + d^2$. Ясно, что $d^2 = |\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}|^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2[(\mathbf{a},\mathbf{b}) + (\mathbf{b},\mathbf{c}) + (\mathbf{c},\mathbf{a})]$.

Тому умова $AC \perp BD$, тобто $0 = (\mathbf{a}+\mathbf{b},\mathbf{b}+\mathbf{c}) = b^2 + (\mathbf{b},\mathbf{c}) + (\mathbf{a},\mathbf{c}) + (\mathbf{a},\mathbf{b})$, еквівалентна тому, що $d^2 = a^2 + b^2 + c^2 - 2b^2$.

Обертання

Из произвольной внутренней точки O выпуклого *n*-угольника опущены перпендикуляры на стороны (или их продолжения). На каждом перпендикуляре от точки O по направлению к стороне построен вектор, длина которого равна половине длины той стороны, на которую опущен перпендикуляр. Определить сумму построенных векторов.

Решение: Если мы повернём указанные векторы на 90° и умножим их на 2, то они превратятся в векторы сторон многоугольника. Сумма векторов сторон многоугольника равна , поэтому сумма исходных векторов тоже равна

Конец