# 8. Графы

# 8.1. Типы графов

Ориентированный граф

Неориентированный граф

# 8.1. Ориентированный граф

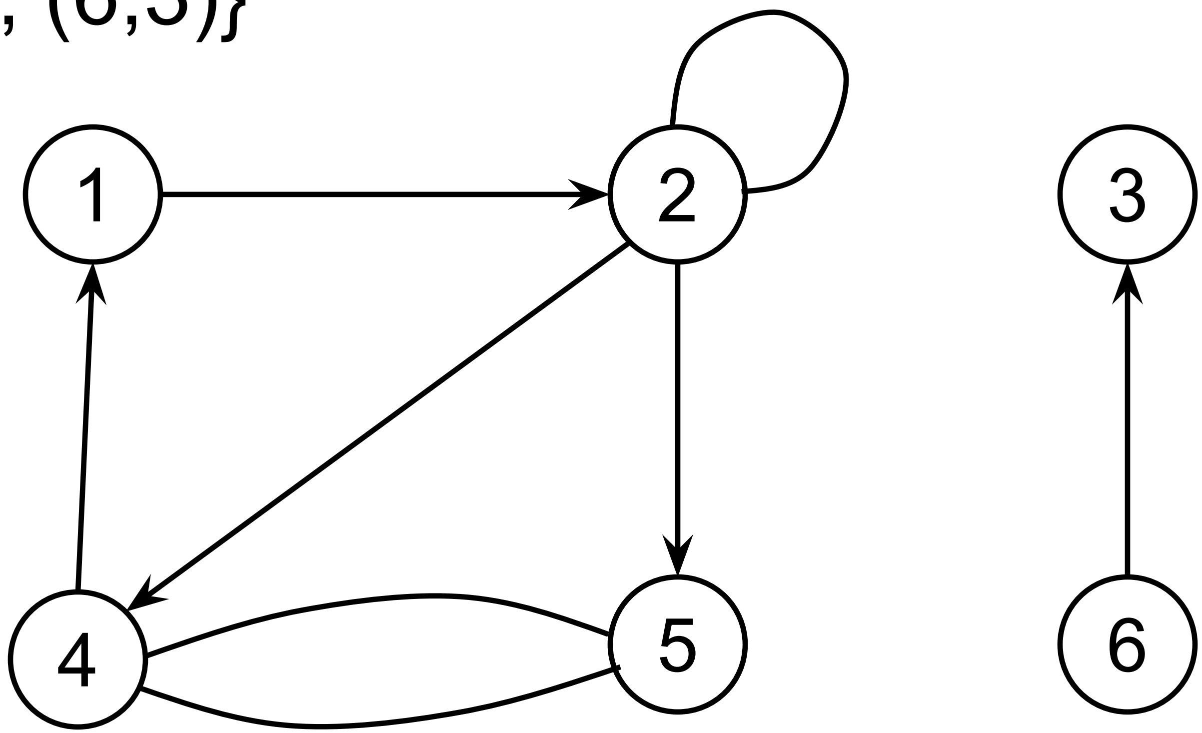
*Ориентированный граф* $G$ – пара $(V, E)$, где

$V$ – конечное множество вершин графа $G$, $V = \{v_i\}$, $i = 1, 2, \ldots, n$, $v_i$ – вершина графа

$E$ – множество ребер графа $G$; упорядоченные пары вершин из $V$, $E = \{e_i\}$, $e_i = (u, v)$, $u \in V$, $v \in V$, $e_i$ – ребро графа; выходит из вершины $u$ и входит в вершину $v$

# 8.1. Ориентированный граф

Пример: V = {1, 2, 3, 4, 5, 6},
E = {(1,2), (2,2), (2,4), (2,5), (4,1), (4,5), (5,4), (6,3)}



# 8.2. Неориентированный граф

*Неориентированный граф* $G$ – пара ($V$, $E$), где

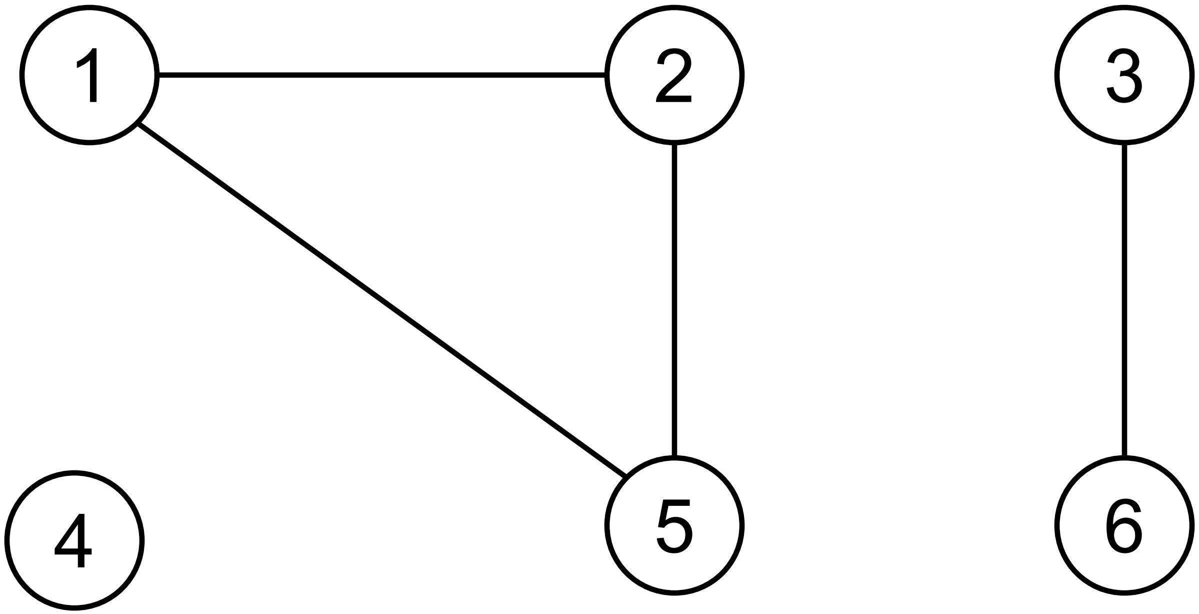
$V$ – конечное множество вершин графа $G$, $V = \{v_i\}$, $i = 1, 2, \ldots, n$, $v_i$ – вершина графа

$E$ – множество ребер графа $G$; неупорядоченные пары вершин из $V$, $E = \{e_i\}$, $e_i = (u, v)$, $u \in V$, $v \in V$, $u \neq v$

$e_i$ – ребро графа; соединяет вершины $u$ и $v$

# 8.2. Неориентированный граф

Пример: $V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$,
$E = \{(1,2), (1,5), (2,5), (3,6)\}$



# 8.3. Определения

- Если ($u$, $v$) – ребро графа $G$, тогда вершина $u$ графа – *смежная* с вершиной $v$: $u$ □ $v$
- *Степень вершины* в неориентированном графе – число ребер, соединяющих ее с другими вершинами
- Вершина со степенью 0 – *изолированная*

# 8.3. Определения

- В ориентированном графе: *исходящая степень* – количество выходящих из вершины ребер, *входящая степень* – количество входящих в вершину ребер
- *Степень вершины* в ориентированном графе = исходящая степень + входящая степень

# 8.3. Определения

- *Путь (маршрут) длины $k$* от вершины $u$ к вершине $v$ в графе $G = (V, E)$ – последовательность вершин $\langle v_0, v_1, \ldots, v_k \rangle$ такая, что $u = v_0$, $v = v_k$ и $(v_{i-1}, v_i) \in E$ для $i = 1, 2, \ldots, k$
- *Длина пути* – количество составляющих его ребер

# 8.3. Определения

- Путь *содержит* вершины $v_0, v_1, \ldots, v_k$ и ребра $(v_0, v_1), (v_1, v_2), \ldots, (v_{k-1}, v_k)$
- Если имеется путь *p* из вершины *u* в вершину *v*, говорят, что вершина *u* *достижима* из вершины *v* по пути *p*
- Пусть является *простым*, если все вершины пути – различны

# 8.3. Определения

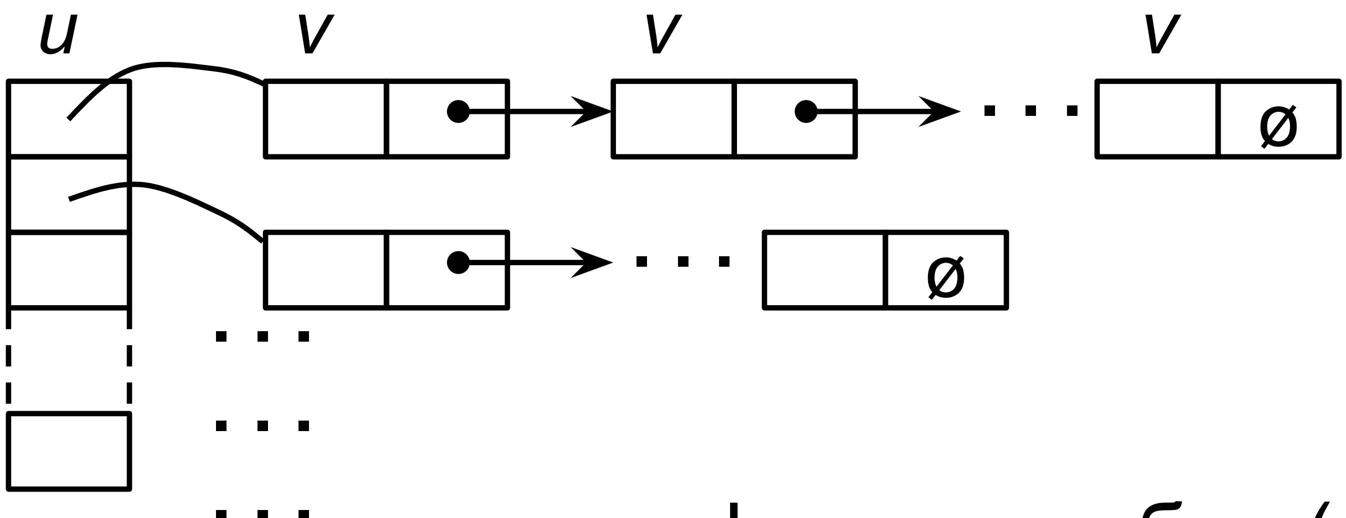
- В ориентированном графе путь $<v_0, v_1, \ldots, v_k>$ образует *цикл*, если $v_0 = v_k$; цикл *простой*, если все вершины $v_0, v_1, \ldots, v_{k-1}$ различны
- *Петля* – цикл с длиной 1
- В неориентированном графе путь $<v_0, v_1, \ldots, v_k>$ образует (*простой*) *цикл*, если $k \geq 3$, $v_0 = v_k$ и все вершины $v_0, v_1, \ldots, v_{k-1}$ различны
- Граф без циклов – *ациклический*

# 8.3. Определения

- *Взвешенный* граф – граф, с каждым ребром которого связан определенный вес, обычно определяемый *весовой функцией* $w: E \to R$

# 8.4. Представление графа

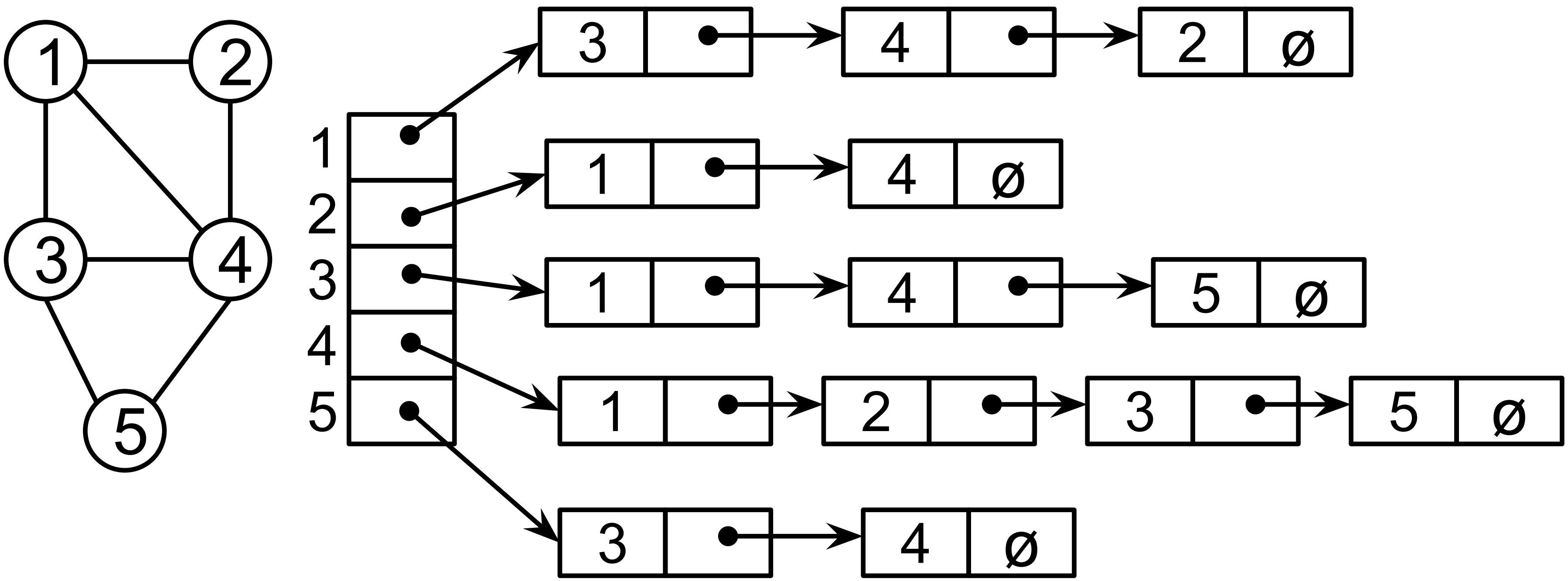
1. Набор списков смежных вершин




Для взвешенных графов вес ребра (*u*, *v*) хранится вместе с вершиной *v* в списке смежности *u*

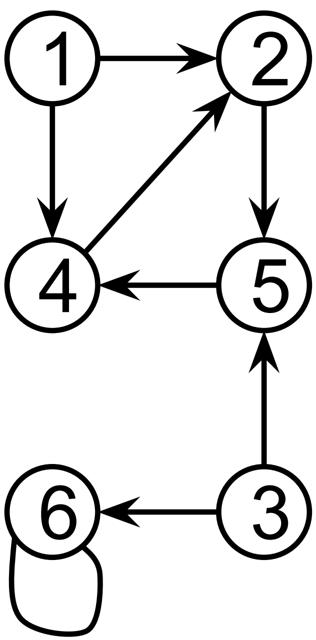
# 8.4. Представление графа

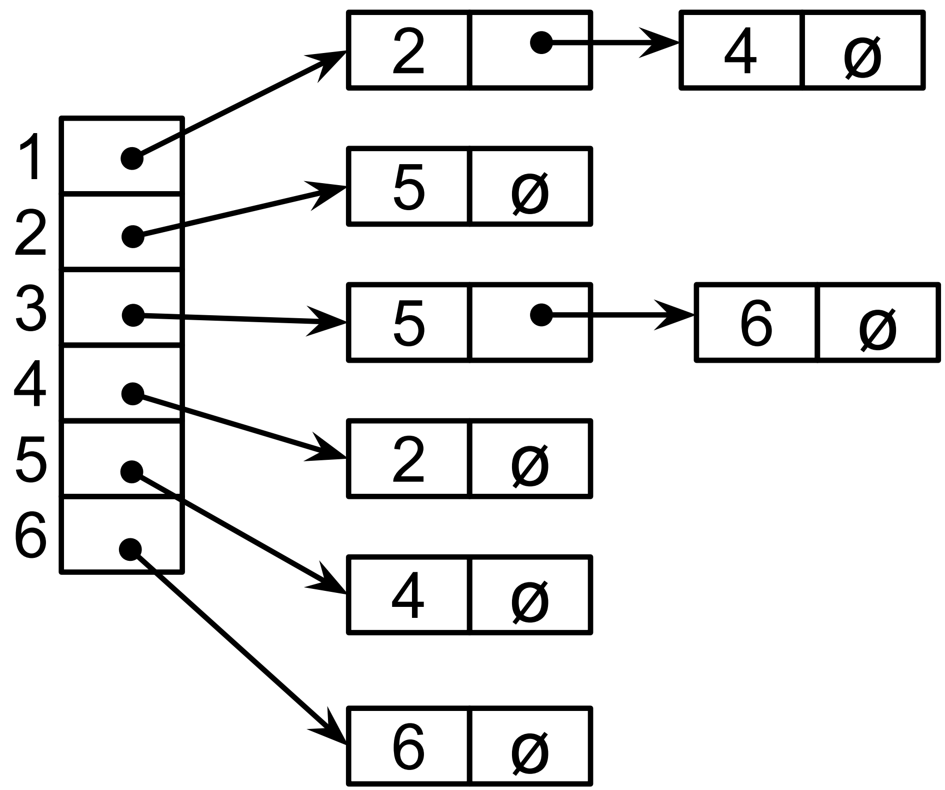
Пример – неориентированный граф



# 8.4. Представление графа

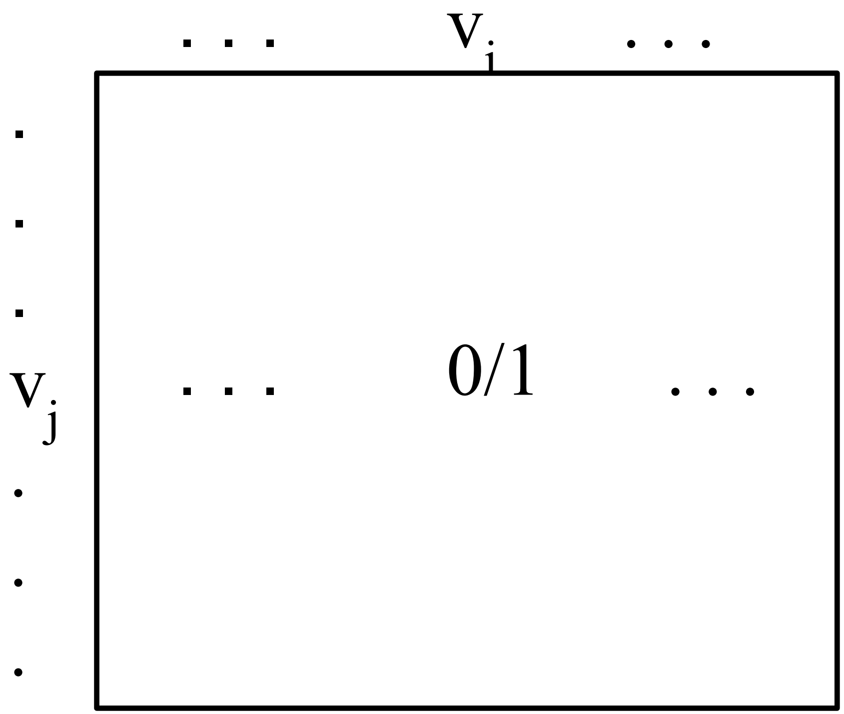
Пример – ориентированный граф



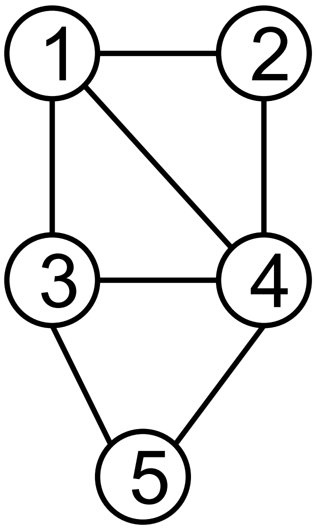
# 8.4. Представление графа

## 2. Матрица смежности



# 8.4. Представление графа

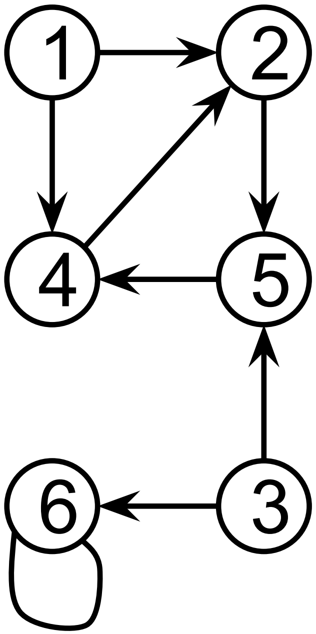
Пример – неориентированный граф




$$
\begin{array}{c|ccccc|}
 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\
\hline
1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\
2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
3 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
4 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\
5 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\
\hline
\end{array}
$$

# 8.4. Представление графа

Пример – ориентированный граф




| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 2 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 3 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 4 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 5 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 6 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |

# 8.5. Поиск в ширину

Один из простейших алгоритмов обхода графа

Задан граф $G = (V, E)$

Выделена исходная вершина $s$

Находятся все вершины, достижимые из $s$

Строится *дерево поиска в ширину* с корнем $s$

# 8.5. Поиск в ширину

Окрашивание вершин графа:

белые – еще не открытые вершины,

серые и черные – открытые вершины, которые обрабатываются по-разному:

вершины, смежные с черной, серые или черные;

вершины, смежные с серой, могут быть белыми

# 8.5. Поиск в ширину

Корень дерева – $s$

Сканируется список смежности открытой вершины $u$: если открывается белая вершина $v$, то вершина $v$ и ребро $(u, v)$ добавляются в дерево

$u$ – предшественник (или родитель) $v$ в дереве поиска вширь, $v$ – потомок $u$

# 8.5. Алгоритм поиска BFS(G, s)

Обозначения:

$Adj[u]$ – список смежности для вершины u

$color[u]$ – цвет вершины $u$

$pred[u]$ – предшественник вершины $u$; если предшественника нет, $pred[u]$ = $NULL$

$d[u]$ – расстояние от $s$ до вершины $u$

$Q$ – очередь для работы с множеством серых вершин

# 8.5. Алгоритм поиска BFS(G, s)

*Инициализация:*

Для каждой вершины $u \in V[G]$, кроме $s$ {

    $color[u]$ = белый

    $d[u] = \infty$

    $pred[u]$ = NULL

}

$color[s]$ = серый

$d[s] = 0$

$pred[s]$ = NULL

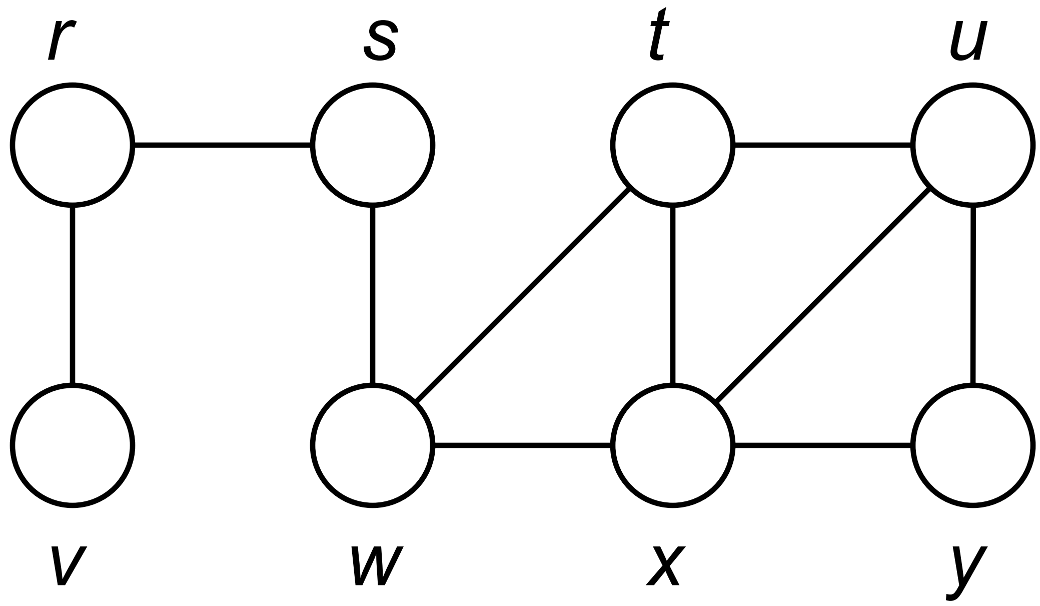
Записать $s$ в очередь $Q$

# 8.5. Алгоритм поиска BFS(G, s)

```
while Q не пуста {
    u = очередная вершина из Q
    для каждой v ∈ Adj[u]
        if color[v] = белый {
            color[v] = серый
            d[v] = d[u] + 1
            pred[v] = u
            Записать v в Q
        }
    color[u] = черный
}
```

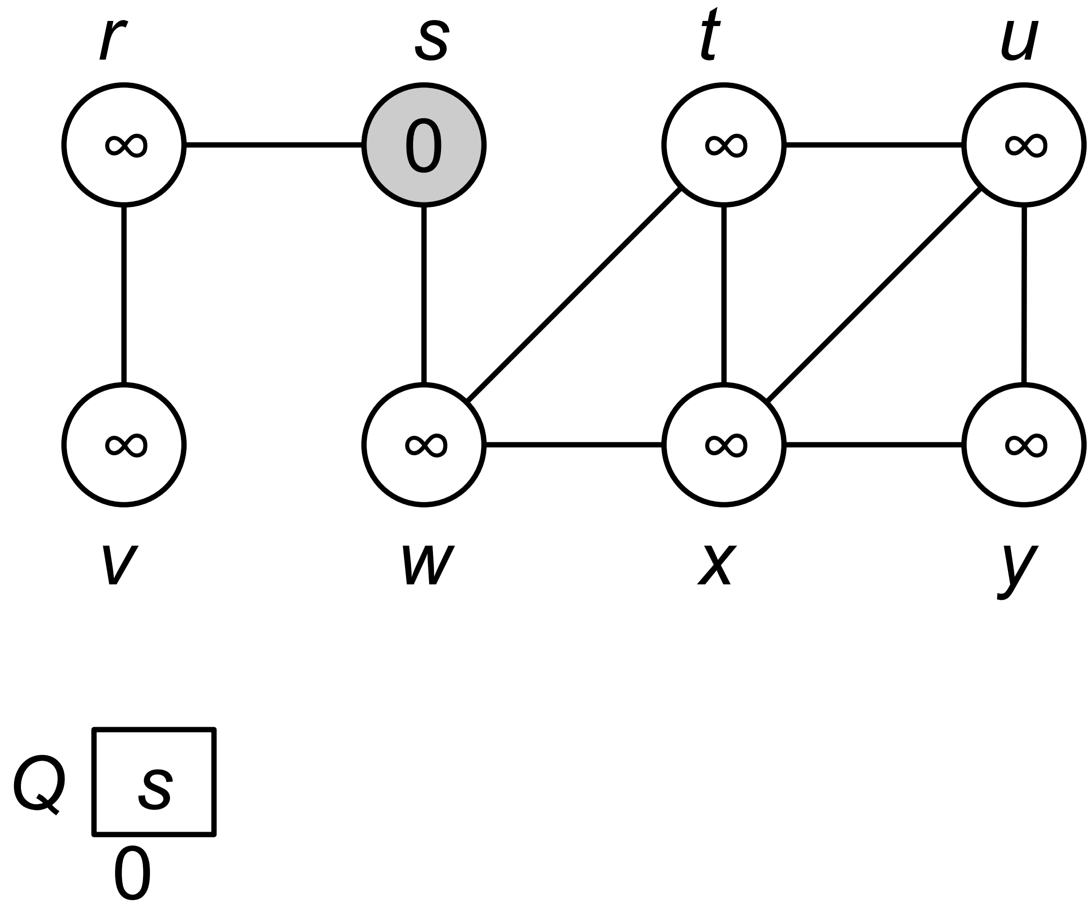
# 8.6. Пример

Исходный граф



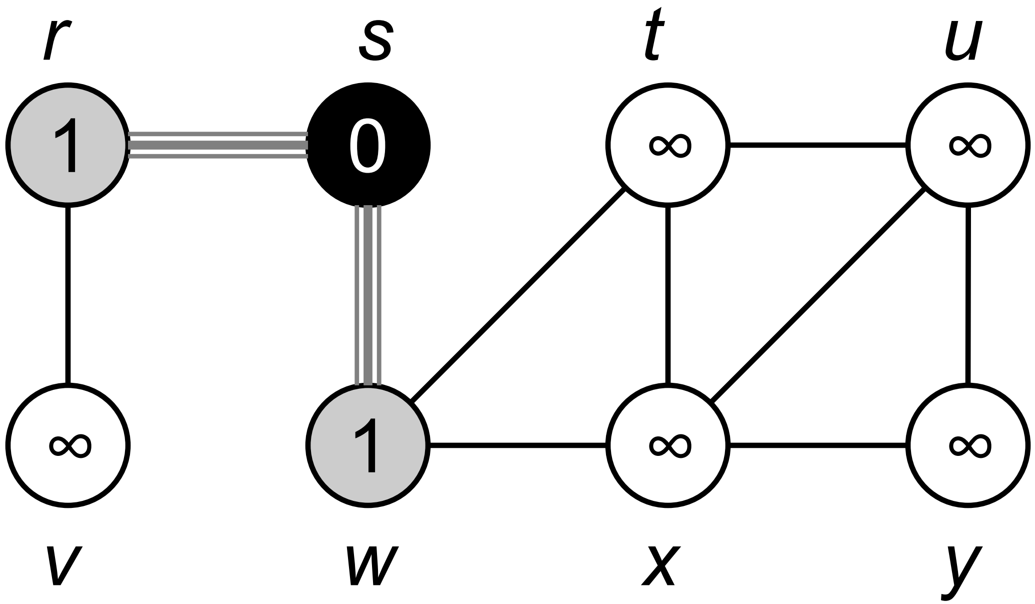
# 8.6. Пример

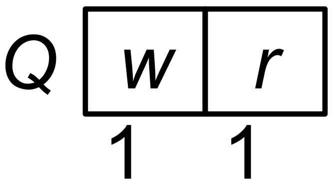
Инициализация



# 8.6. Пример

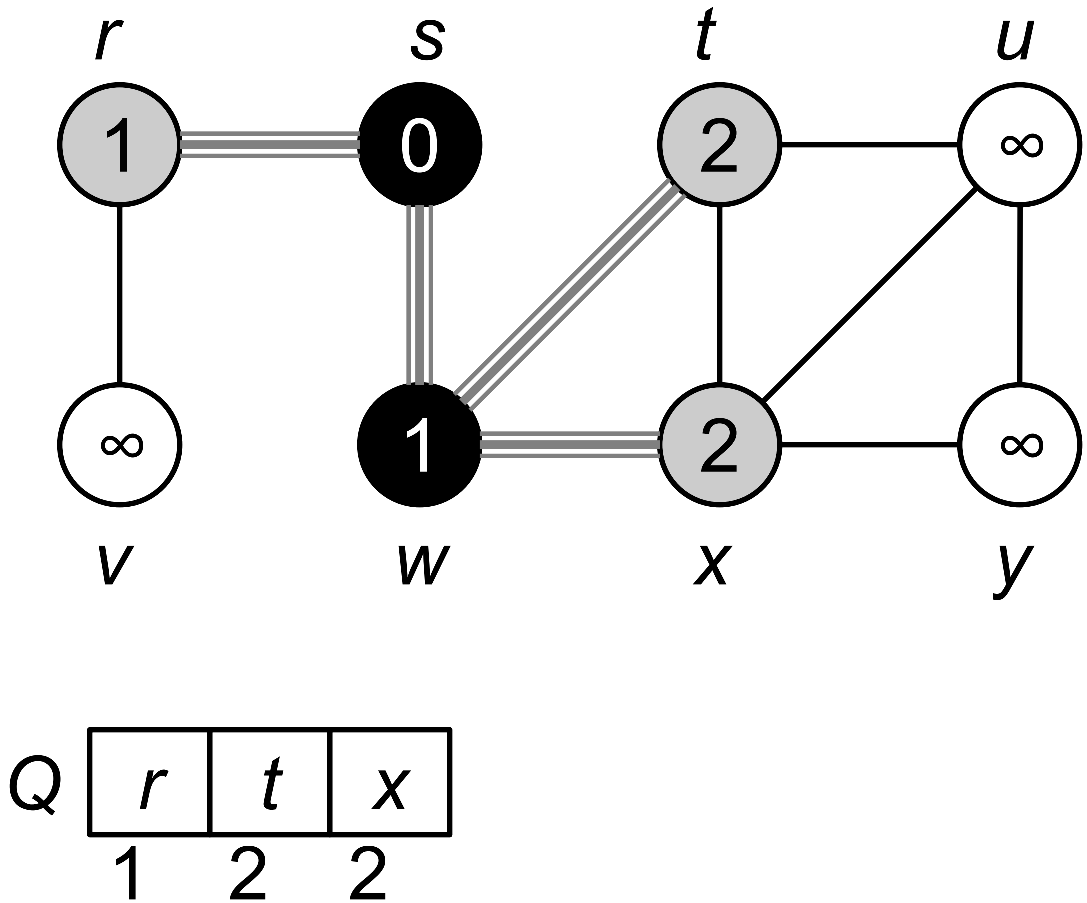
1-я итерация цикла while



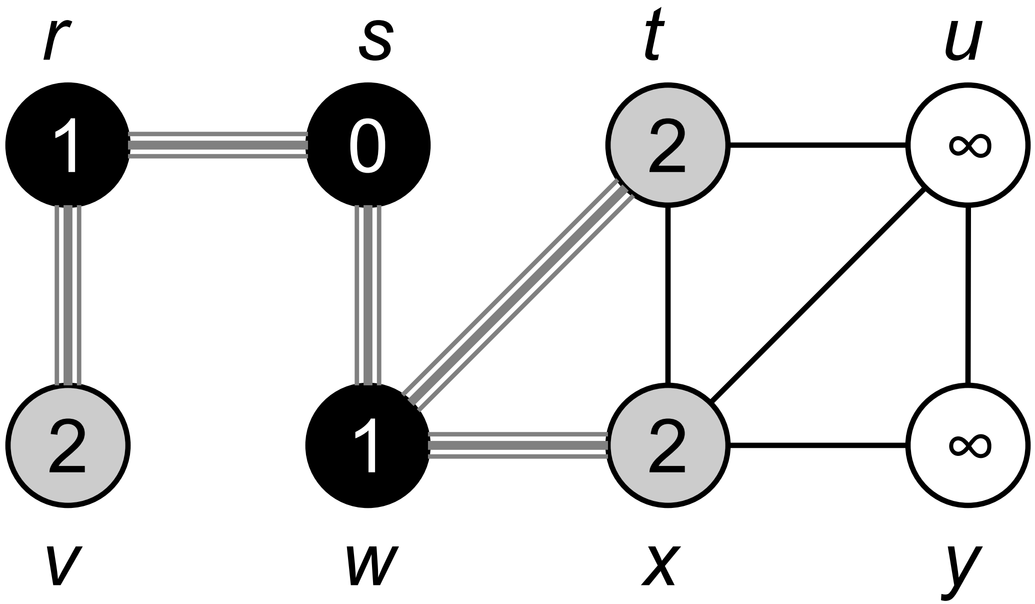
# 8.6. Пример

2-я итерация цикла while



# 8.6. Пример

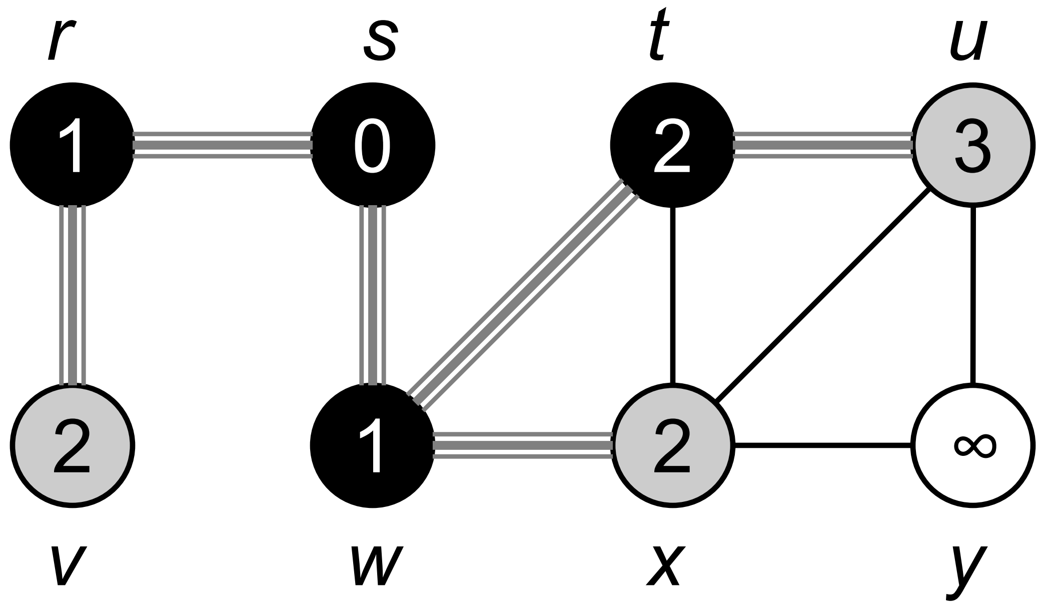
3-я итерация цикла while

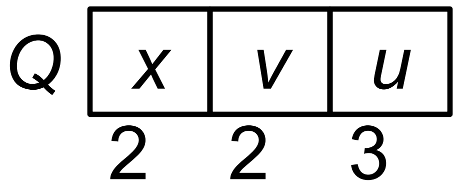



| Q | *t* | *x* | *v* |
|---|---|---|---|
| | 2 | 2 | 2 |

# 8.6. Пример

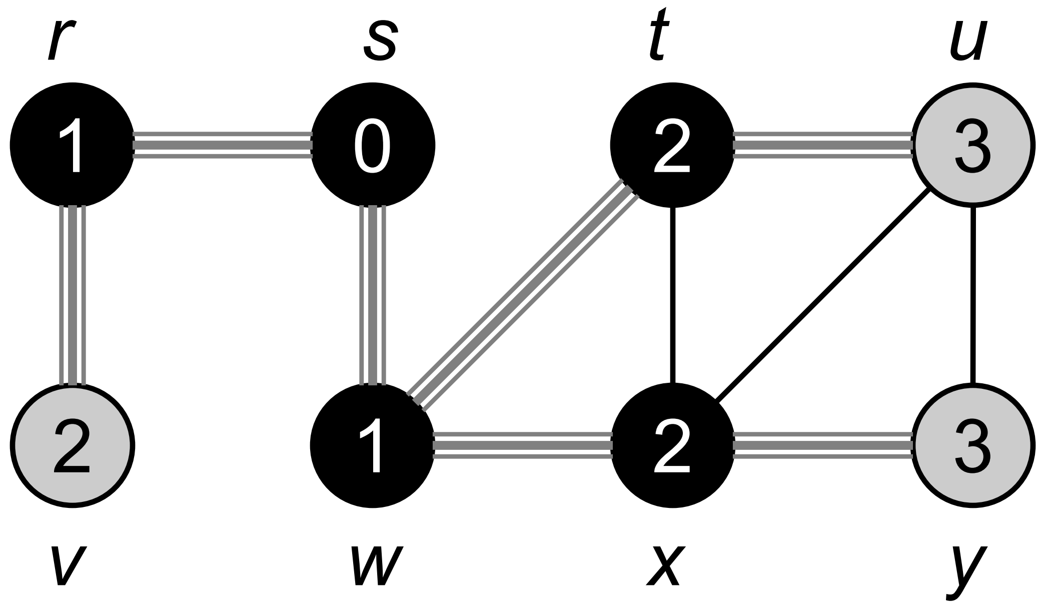
4-я итерация цикла while

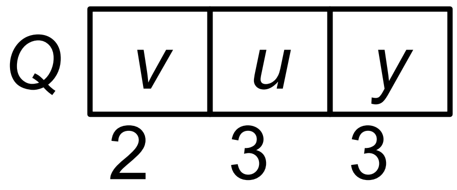


# 8.6. Пример

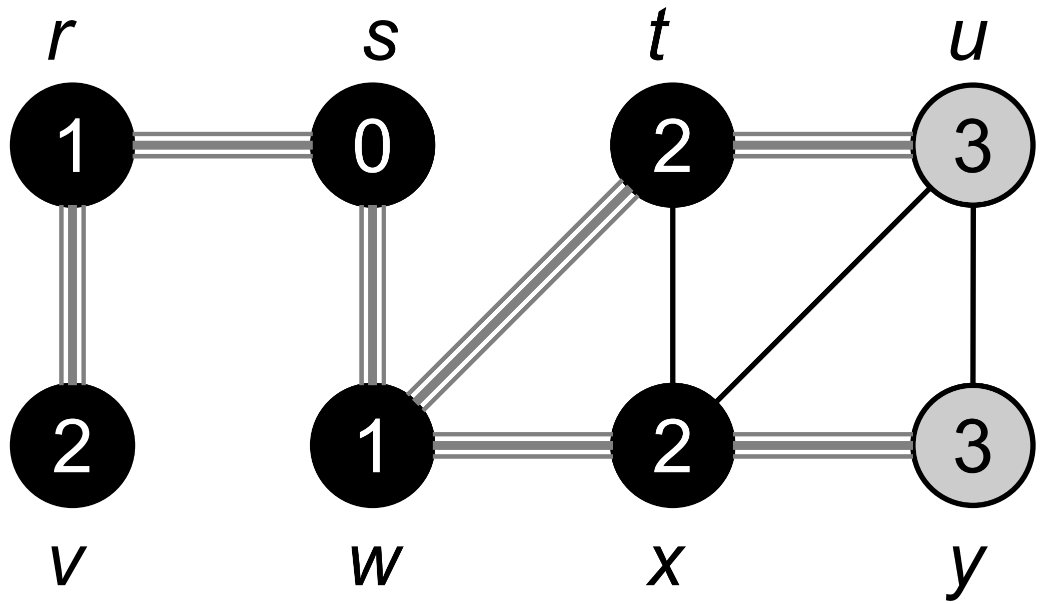
5-я итерация цикла while

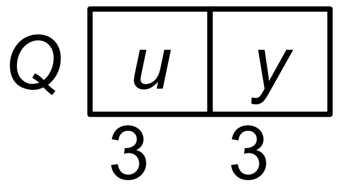


# 8.6. Пример

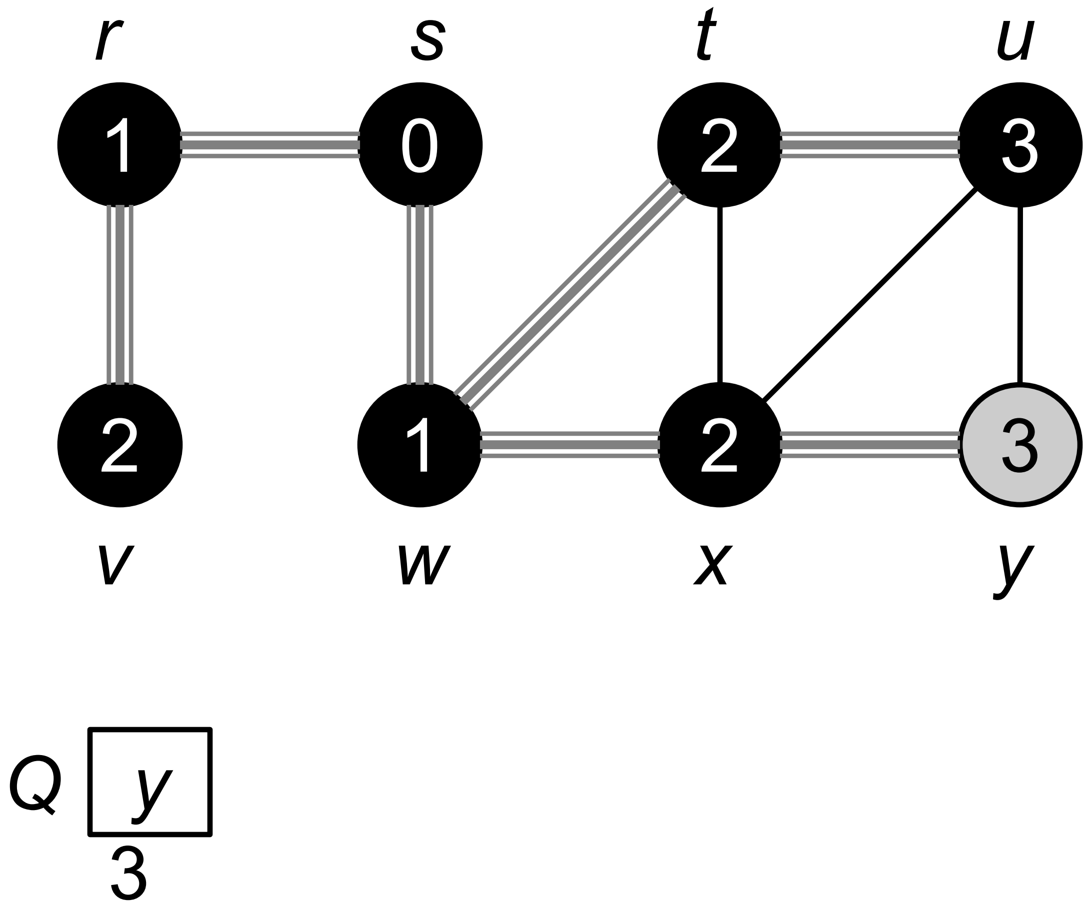
6-я итерация цикла while



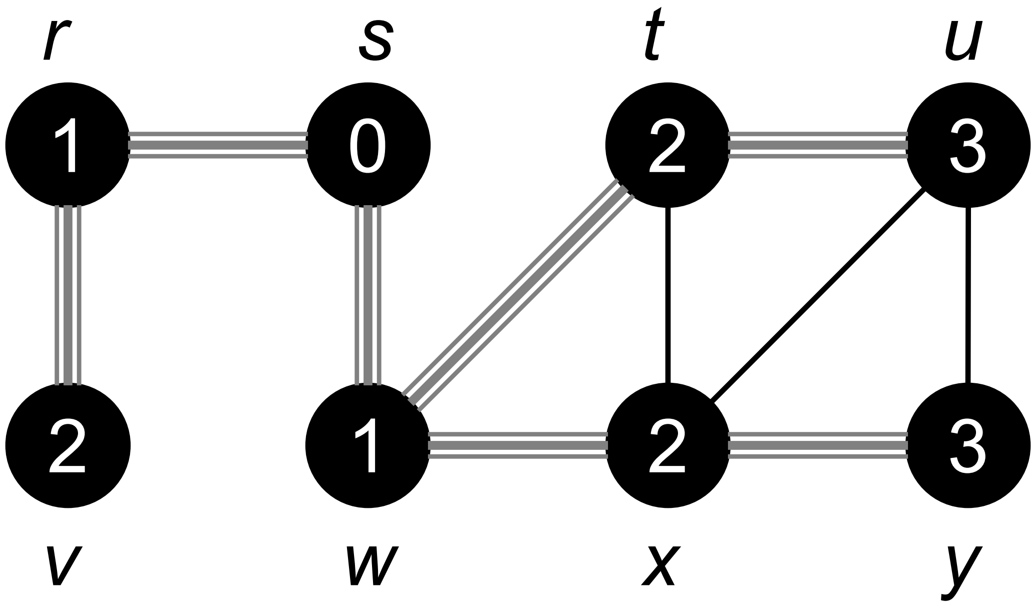
# 8.6. Пример

7-я итерация цикла while



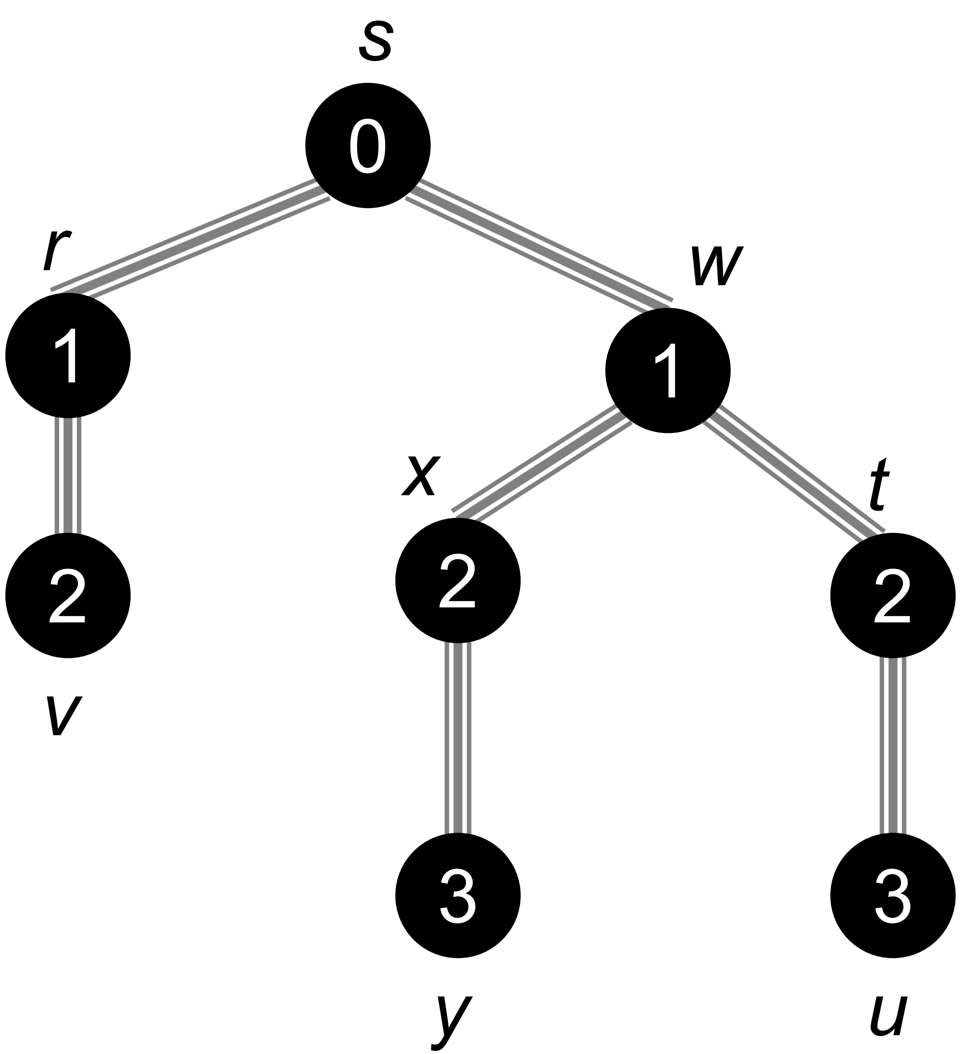
# 8.6. Пример

8-я итерация цикла while




*Q* Ø

# 8.6. Пример



# 8.7. Анализ алгоритма

Общее время операций с очередью – $O(V)$

Сумма длин всех списков смежности – $\Theta(E)$

Общее время сканирования списков – $O(E)$

Накладные расходы на инициализацию – $O(V)$

Общее время работы алгоритма BFS – $O(V + E)$

# 8.8.

# 8..

# 8..

# 8..

# 8..

# 8..

# 8..

# 8..

# 8..

# 8..

# 8..

# 8..

# 8..

# 8..

# 8..

# 8..

# 8..

# 8..