

# Элементы символической ЛОГИКИ

## Лекция 7

# Символическая логика

она же **символическая**

формируется в XIX веке,

благодаря

Готлобу **Фреге** и Бертрану **Расселу**

состоит в обширном использовании  
символов для привычных логических  
форм, **которые делают логическое  
рассуждение более сжатым и  
наглядным**

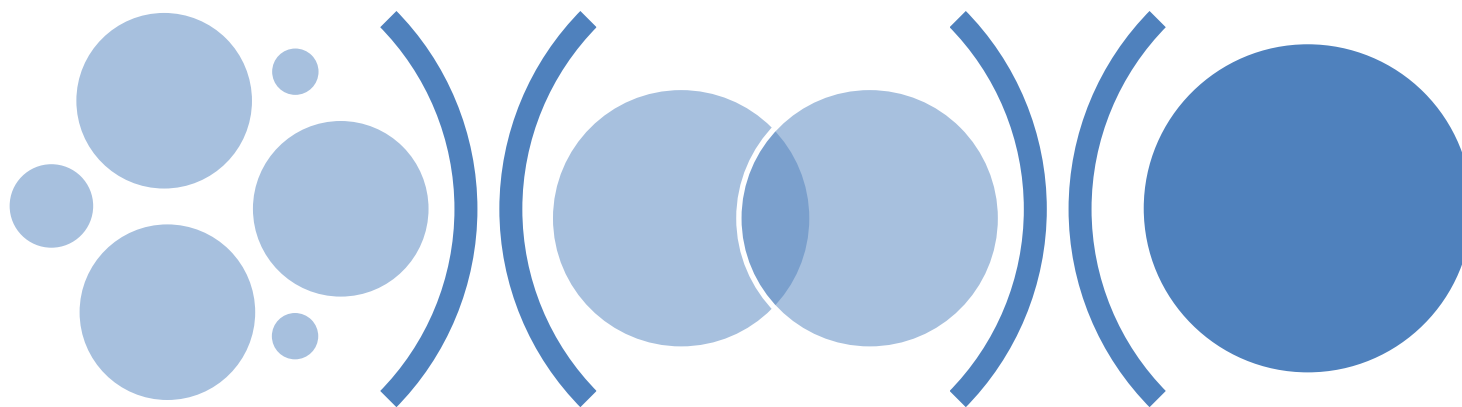
```
graph TD; A[Символическая логика] --- B[Логика высказываний]; A --- C[Логика предикатов];
```

Символическая логика

Логика  
высказываний

Логика  
предикатов

# Логика высказываний



Простые  
высказывани  
я и юнкторы

Сложные  
высказывани  
я

Выводы

# Высказывание

**мысль, выраженная  
повествовательным предложением,  
которая может быть истинной или  
ложной**

# Формальный аппарат

$A, B, C, \dots$  – пропозициональные переменные (формулы), отражающие независимый факт;

$\neg$  – унарная связка-юнктор;

$\wedge, \vee, \oplus, \dots$  – бинарные связки-юнкторы;

$()$  – технические знаки;

$(A \wedge B), (\neg A), \dots$  – формулы.

# Юнкторы логики

## высказывающий

отрицание	НЕ-	$\neg, \sim$
конъюнкция	И	$\wedge, \&$
адъюнкция	ИЛИ	$\vee, +$
контраваленция	ЛИБО-ЛИБО	$\oplus, \otimes$
импликация	ЕСЛИ - ТО	$\rightarrow, \supset$
эквиваленция	ЕСЛИ И ТОЛЬКО ЕСЛИ	$\leftrightarrow, \equiv$

# Преобразование конъюнкции

## В дизъюнкцию

$$(A \wedge B) = \neg(\neg A \vee \neg B)$$

## В импликацию

$$(A \wedge B) = \neg(A \rightarrow \neg B)$$



# Преобразование дизъюнкции

## В конъюнкцию

$$(A \vee B) = \neg(\neg A \wedge \neg B)$$

## В импликацию

$$(A \vee B) = (\neg A \rightarrow B)$$

# Преобразование импликации

## В КОНЪЮНКЦИЮ

$$(A \rightarrow B) = \neg(A \wedge \neg B)$$

## В ДИЗЪЮНКЦИЮ

$$(A \rightarrow B) = (\neg A \vee B)$$

# Преобразование строгой ДИЗЪЮНКЦИИ В КОНЪЮНКЦИЮ

$$(A \oplus B) = (A \vee B) \wedge (\neg A \vee \neg B)$$

- Формулы
  - тождественно-истинные (**законы**)
    - истинные при всех наборах истинностных значений переменных
  - тождественно-ложные (**противоречия**)
    - ложные при всех наборах истинностных значений переменных
  - выполнимые (нейтральные)
    - то истинные, то ложные при различных наборах истинностных значений входящих в них переменных

# Правило подстановки

**любую буквенную переменную в символическом выражении можно заменять на произвольную формулу**

Например,

$$(p \vee \neg p)$$

$$p = (a \leftrightarrow b)$$

$$((a \leftrightarrow b) \vee \neg(a \leftrightarrow b))$$

# Законы символической логики

- дистрибутивности
- ассоциативности
- коммутативности
- двойственности
- контрапозиции
- импортации
- экспортации
- транспозиции
- исключения
- поглощения
- выявления

# Закон ассоциативности

$$(A \wedge (B \wedge C)) = ((A \wedge B) \wedge C)$$

$$(A \vee (B \vee C)) = (A \vee B) \vee C)$$

# Закон коммутативности

$$(A \wedge B) = (B \wedge A)$$

$$(A \vee B) = (B \vee A)$$

# Закон дистрибутивности

## для двух переменных

$$(A \wedge (B \vee C)) = (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$$

$$(A \vee (B \wedge C)) = (A \vee B) \wedge (A \vee C)$$

## для большего количества переменных

$$(A \vee B) \wedge (C \vee D) = (A \wedge C) \vee (A \wedge D) \vee (B \wedge C) \vee (B \wedge D)$$

$$(A \wedge B) \vee (C \wedge D) = (A \vee C) \wedge (A \vee D) \wedge (B \vee C) \wedge (B \vee D)$$



# Закон двойственности

## для конъюнкции и дизъюнкции

$$(A \wedge B) = \neg(\neg A \vee \neg B)$$

$$(A \vee B) = \neg(\neg A \wedge \neg B)$$

## для эквивалентности и строгой дизъюнкции

$$(A \leftrightarrow B) = \neg(\neg B \oplus \neg A)$$

$$(A \oplus B) = \neg(\neg B \leftrightarrow \neg A)$$

# Закон контрапозиции

$$(A \rightarrow B) = (\neg A \rightarrow \neg B)$$

$$((A \wedge B) \rightarrow C) = (\neg C \rightarrow (\neg A \vee \neg B))$$

# Закон импортации

$$(A \rightarrow (B \rightarrow C)) = ((A \wedge B) \rightarrow C)$$

# Закон экспортации

$$((A \wedge B) \rightarrow C) = (A \rightarrow (B \rightarrow C))$$

# Закон транспозиции

$$((A \wedge B) \rightarrow C) = ((A \wedge \neg C) \rightarrow \neg B)$$

# Закон исключения

$$(A \vee B) \wedge (\neg A \vee B) \\ = B)$$

# Закон поглощения

$$(A \wedge (A \vee B)) = A$$

$$(A \vee (A \wedge B)) = A$$

# Закон выявления

$$(A \vee C) \wedge (B \vee \neg C) = (A \vee C) \wedge (B \vee \neg C) \wedge (A \vee B)$$

$$(A \wedge C) \vee (B \wedge \neg C) = (A \wedge C) \vee (B \wedge \neg C) \vee (A \wedge B)$$

# Логика предикатов

**результат реконструкции естественного  
языка**

**Здесь есть точные правила построения  
высказываний (формул)  
и сложных имен (термов)**

Этот язык предназначен для  
аксиоматического построения теорий, для  
анализа содержания высказываний  
естественного языка и выявления  
логических отношений между ними, для  
описания правил рассуждения, построения

выводов и доказательств

- Нелогические символы естественного языка
  - Предикатор
  - Предметные функторы
  - Имя

# Имена

**обозначают отдельный объект,  
бывают простые и сложные.**

**Простые** не содержат никакой информации об обозначаемых индивидах (имена собственные).

**Сложные** имена не только обозначают предмет, но и указывают на какие-либо его свойства

# Предметные функторы

**знаки так называемых предметных функций (функциональная константа)**

Наряду с математическими функциями «синус», «логарифм», «умножение» и т.п. сюда относятся такие особые характеристики предметов, как скорость, плотность, возраст, пол, профессия, агрегатное состояние, место жительства и др.



# Предикатор

**(предикатная константа)**

- выражение языка (слова и словосочетания), предметными значениями которого являются **свойства** (одноместные предикаторы) или **отношения** (многоместные предикаторы)

# Язык логики предикатов

$p, q,$   
 $r, p_1 \dots$  пропозициональные переменные (обозначают  
целые повествовательные предложения)

$a, b,$   
 $c, a_1 \dots$  предметные константы (обозначают единичные  
имена)

$x, y, z,$   
 $x_1 \dots$  предметные переменные (обозначают общие  
имена)

$P, Q,$   
 $R,$   
 $P_1 \dots$  предикатные символы (обозначают свойства и  
отношения)

$\neg, \wedge,$   
 $\vee,$   
 $\rightarrow \dots$  логические переменные (обозначают типы  
связи)

$\forall$  квантор всеобщности («все», «каждый»)

$\exists$  квантор существования («некоторые», «хотя бы

# Определение терма

- 1
  - любая предметная переменная и предметная константа – термы
- 2
  - если  $F$  – предметный функтор, а  $t_1, t_2, \dots, t_n$  –термы, то  $F^n(t_1, t_2, \dots, t_n)$  – это термы
- 3
  - термами являются только выражения, которые построены по пунктам 1 и 2

# Пример

**a** – «Аполлон»

**v** – «Венера»

**f<sup>1</sup>** – «красавец»

**g<sup>2</sup>** – «молодой»

**f<sup>1</sup>(a)** – Аполлон – красавец.

**g<sup>2</sup>(a,v)** – Аполлон и Венера – молодые.

**g<sup>2</sup>(f<sup>1</sup>(a),v)** – Красавец Аполлон и Венера –  
молодые.

**f<sup>1</sup>(g<sup>2</sup>(a,v))** – Красавцы, молодые Аполлон и  
Венера.

# Определение формулы

1

если  $P^n$  –  $n$ -местный предикатор, а  $t_1, \dots, t_n$  –  
термы, то выражение  $P^n(t_1, \dots, t_n)$  –  
формула

2

если  $A$  и  $B$  – формулы, то  $\neg A$ ,  $(A \wedge B)$ ,  
 $(A \vee B)$ ,  $(A \rightarrow B)$ ,  $(A \leftrightarrow B)$  – формулы

3

если  $A$  формула,  $x$  – переменная,  
то  $\forall x(A)$  и  $\exists x(A)$  – формулы

4

формулы - только такие выражения,  
которые построены по пунктам 1 – 3

# Область действия квантора

Если формула **A** имеет вид  $\forall xB$  или  $\exists xB$ , то областью действия квантора  $\forall$  или  $\exists$  по переменной **x** является формула **B**

# Пример

«Если целое число больше 13, то его квадрат делится без остатка на 4 или на 5»

$$\forall x((Px \wedge Q_2(x, 13)) \rightarrow (R(g(x, x), 4) \vee R(g(x, x), 5))),$$

где

P - «быть целым числом»,

Q2 - «больше чем»,

R - «делится на»

# Некоторые законы логики предикатов

## 1. Взаимовыразимость кванторов

$$\forall x A \leftrightarrow \neg \exists x \neg A,$$

$$\exists x A \leftrightarrow \neg \forall x \neg A.$$

## 2. Отрицание кванторов

$$\neg \forall x A \leftrightarrow \exists x \neg A,$$

$$\neg \exists x A \leftrightarrow \forall x \neg A.$$

## 3. Перестановка кванторов

$$\forall x \forall y A \leftrightarrow \forall y \forall x A,$$

$$\exists x \exists y A \leftrightarrow \exists y \exists x A,$$

$$\exists x \forall y A \rightarrow \forall y \exists x A.$$



# Некоторые законы логики предикатов

## 4. Законы пронесения и вынесения кванторов

### а) конъюнкция

$$\forall a(A \wedge B) \leftrightarrow (\forall aA \wedge \forall aB);,$$

$$\exists a(A \wedge B) \rightarrow (\exists aA \wedge \exists aB),$$

### б) дизъюнкция

$$\exists a(A \vee B) \leftrightarrow (\exists aA \vee \exists aB),$$

$$(\forall aA \vee \forall aB) \rightarrow \forall a(A \vee B),$$

### в) импликация

$$\forall a(A \rightarrow B) \rightarrow (\forall aA \rightarrow \forall aB),$$

$$(\exists aA \rightarrow \exists aB) \rightarrow \exists a(A \rightarrow B).$$

# Примеры

**«Все люди интересуются строением космоса»,**

$$\forall x(P_1(x) \rightarrow Q_1(x, f(a)))$$

где  $P_1$  – «быть человеком»,  $Q_1$  – «интересоваться»,  
 $f$  – «строение ...»,  $a$  – «космос»

**«Некоторые звёзды не видны невооружённым глазом, но видны в телескоп»**

$$\exists x(P_2(x) \wedge \forall y \forall z((P_3(y) \wedge P_4(z)) \rightarrow (\neg Q_2(x, y) \wedge Q_2(x, z))))$$

где  $P_2$  – «быть звездой»,  $P_3$  – «быть невооружённым органом зрения»,  $P_4$  – «быть телескопом»,

# Исчисление естественного вывода

**порождение одних формул из других**

Здесь нет аксиом. Знание не истинное,  
а доказуемое.

# Правила вывода

1. Введение  
конъюнкции

$$\frac{}{A; B}$$

$$A \wedge B$$

2. Удаление конъюнкции

$$\frac{A \wedge B}{A}$$

$$A$$

$$\frac{A \wedge B}{B}$$

$$B$$

3. Введение

дизъюнкции

$$A$$

$$A \vee B$$

$$B$$

$$A \vee B$$

4. Удаление

дизъюнкции

$$A \vee B$$

$$\frac{A \rightarrow C}{B \rightarrow C}$$

$$B \rightarrow C$$

$$C$$

# Правила вывода

5. Введение импликации      6. Удаление импликации

[A] + гипотеза

:

B

---

A → B - гипотеза

A

A → B

---

B

7. Введение отрицания

[A] + гипотеза

:

B

¬B

---

¬A

8. Удаление отрицания

¬¬A

---

A

# Пример

«Семён сидит дома или разговаривает по телефону. Если он сидит дома, то он скучает. Он не разговаривает по телефону. Стало быть, он скучает».

(1)  $A \vee B$

(2)  $A \rightarrow C$

(3)  $\neg B$

(4)  $A$             1, 3, удаление адъюнкции

---

(5)  $C$             2, 4, modus ponens

**Спасибо за внимание**