Символы математической логики

Кванторы

$\forall$ - общности

$\exists$ - существования

Связки

$\wedge$ - конъюнкция (и)

$\vee$ - дизъюнкция (или)

$\rightarrow$ - импликация (если…, то…)

$\equiv$ - эквиваленция (если и только если…, то…

$\neg$ - отрицание (неверно, что…)

Понятие множества

Под ***множеством*** понимается совокупность некоторых объектов. Объекты, которые образуют множество, называются ***элементами*** или точками, этого множества.

Множества обозначаются прописными буквами, а их элементы – строчными.

$a \in A$ - принадлежит

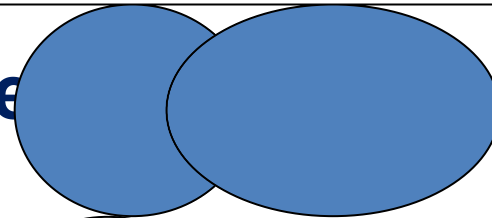
$a \notin A$ - не принадлежит

$A \subset B$ - подмножество

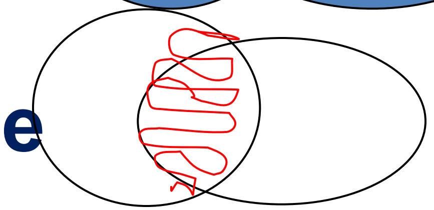
$\varnothing$ - пустое множество

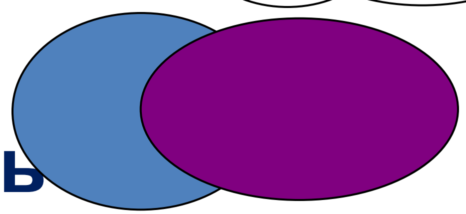
Операции над множествами

$A \cup B$-**объединение**



$A \cap B$ **-пересечение**





$A \setminus B$ **-разность**

Пример. Даны множества $A = \{1;3;6;8\}\, и\; B = \{2;4;6;8\}$

Найти объединение, пересечение и разность множеств $A\, и\; B.$

Последовательность. Предел последовательности.

- **Определение 1.** Если по некоторому закону каждому натуральному числу $n \in N$ поставлено в соответствие вполне определенное число a_n, то говорят, что дана числовая последовательность $\{a_n\}$:

$$a_1, a_2, \ldots .a_n, \ldots$$

словами, числовая последовательность эта функция натурального аргумента $a_n = f(n)$.

$a_1, a_2, \ldots .a_n, \ldots$ называются членами последовательности, а число a_n – общим членом.

Пример. $a_n = (-1)^n / (2n+1)$.

- **Определение 2.** Число A называется пределом числовой последовательности $\{a_n\}$, если для любого сколь угодно малого положительного числа $\varepsilon > 0$, найдется такой номер N , зависящий от ε, $N = N(\varepsilon)$, что для всех членов последовательности с номерами $n > N$ справедливо $|a_n - A| < \varepsilon.$

Предел числовой последовательности обозначается

$$\lim_{n\to\infty} a_n = A \quad \text{или} \quad a_n \to \infty \quad при\ n \to \infty.$$

Последовательность, имеющая предел, называется сходящейся, а в противном случае - расходящейся.

Функция. Способы задания функции.

- **Определение 3**. Если каждому элементу ***x*** из множества ***X*** по некоторому правилу соответствует единственный элемент ***y*** из множества ***Y*** , то говорят, что на множестве ***X*** задана функция $y = f(x)$ переменной x . При этом множество ***X*** называется областью определения функции, а множество ***Y* –** областью значений функции.

***x*-** называется независимой переменной или аргументом, ***y* -** зависимой переменно, буква ***f* –** обозначает закон соответствия.

Существует несколько способов задания функции.

- **Аналитический способ,** если функция задана формулой вида $y = f(x)$.
- **Табличный способ,** если функция задана в виде таблицы.
- **Графический способ,** если функция изображена в виде в виде графика-множества точек (x, y) плоскости, абсциссой которых есть значения аргумента x, о ординаты - соответствующие им значения функции y.
- **Словесный способ,** если функция описана правилом ее составления, например функция Дирихле: $f(x) = 1,$ если $x -$ рационально; и $f(x) = 0,$ если $x -$ нерационально.

- Функция может быть задана программой, вычисляющей ее значения с помощью компьютера.

Основные свойства функций.

1. Четность и нечетность. Функция $y = f(x)$ называется ***четной***, если для любых значений x из любой области определения $f(-x) = f(x)$, и ***нечетной***, если $f(-x) = -f(x)$.

Функция, не являющаяся ни четной, ни нечетной, называется функцией ***общего вида***.

График четной функции симметричен относительно оси ординат.

График нечетной функции симметричен относительно начала координат.

- **2. Монотонность.** Функция $y = f(x)$ называется возрастающей (убывающей) на промежутке ***X***, если большему значению аргумента из этого промежутка соответствует большее (меньшее) значение функции.

  Функции возрастающие или убывающие называются ***монотонными.***

- **3. Ограниченность.** Функция $y = f(x)$ называется ***ограниченной*** на промежутке ***X***, если существует такое положительное число $M > 0$, что $|f(x)| \leq M$ для любого $x \in X$.

  В противном случае функция называется ***неограниченной.***

- **4. Периодичность.** Функция $y = f(x)$ называется ***периодической*** с периодом $T \neq 0$, если для любых x из области определения функции $f(x+T) = f(x)$.

Основные элементарные функции

- **1)** ***Степенная функция:*** $y = x^{\alpha}$, где

Ее область определения и множество значений зависят от α .

Например:

а) $y = x^2$: $D\left(x^2\right) = (-\infty;+\infty)$, $E\left(x^2\right) = [0;+\infty)$

б) $y = \sqrt{x}$: $D\left(\sqrt{x}\right) = [0;+\infty)$, $E(\sqrt{x}) = [0;+\infty)$

в) $y = x^3$: $D\left(x^3\right) = (-\infty;+\infty)$, $E\left(x^3\right) = (-\infty;+\infty)$.

- **2. Показательная функция:** $y = a^x$, где

$a > 0, a \neq 1; \quad D(a^x) = (-\infty; +\infty), \quad E(a^x) = (0; +\infty).$

3) Логарифмическая функция: $y = \log_a x$, где

$a > 0, a \neq 1;$

4) Тригонометрические функции:

а) $y = \sin x$: $D(\sin x) = (-\infty; +\infty), E(\sin x) = [-1; 1];$

б) $y = \cos x$: $D(\cos x) = (-\infty; +\infty), E(\cos x) = [-1; 1];$

в) $y = tg\ x$: $D(tg\ x) = \left\{ x \middle| x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z \right\}, E(tg\ x) = R;$

г) $y = ctg\ x$: $D(ctg\ x) = \{ x \mid x \neq \pi n, n \in Z \}, \ E(ctg\ x) = R.$

• 5) ***Обратные тригонометрические функции***:

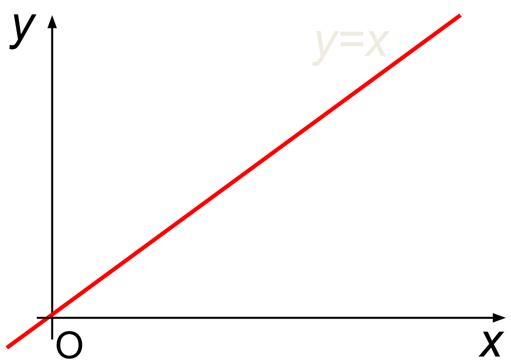
а) $y = \arcsin x: D(\arcsin x) = [-1;1]\ E(\arcsin x) = \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right];$

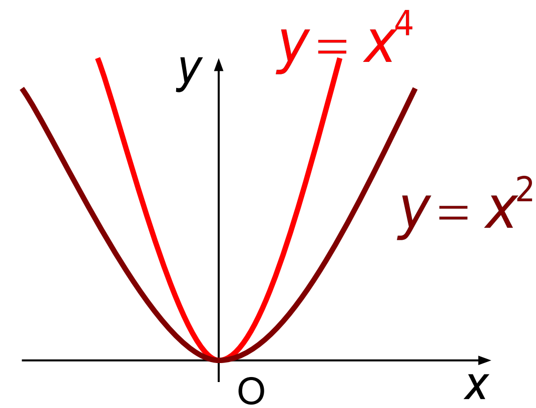
б) $y = \arccos x: D(\arccos x) = [-1;1]\ E(\arccos x) = [0;\pi];$

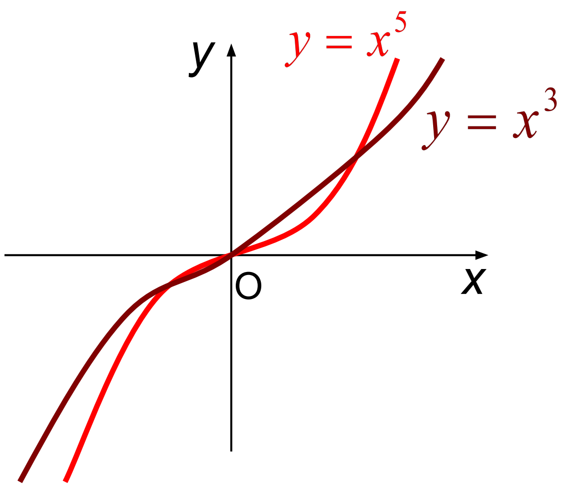
в) $y = arctg\,x: D(arctg\,x) = (-\infty;+\infty)\ E(arctg\,x) = \left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right);$

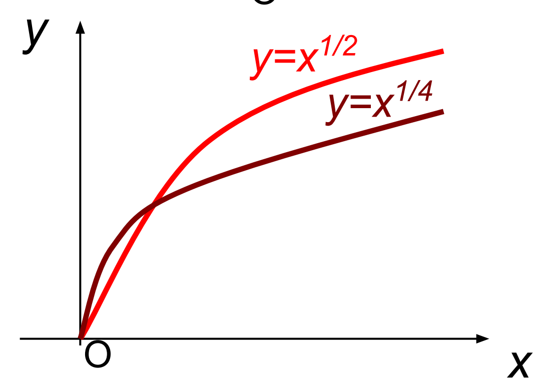
г) $y = arcctg\,x: D(arcctg\,x) = (-\infty;+\infty), E(arcctg\,x) = (0;\pi).$

- **Графики основных элементарных функций:**

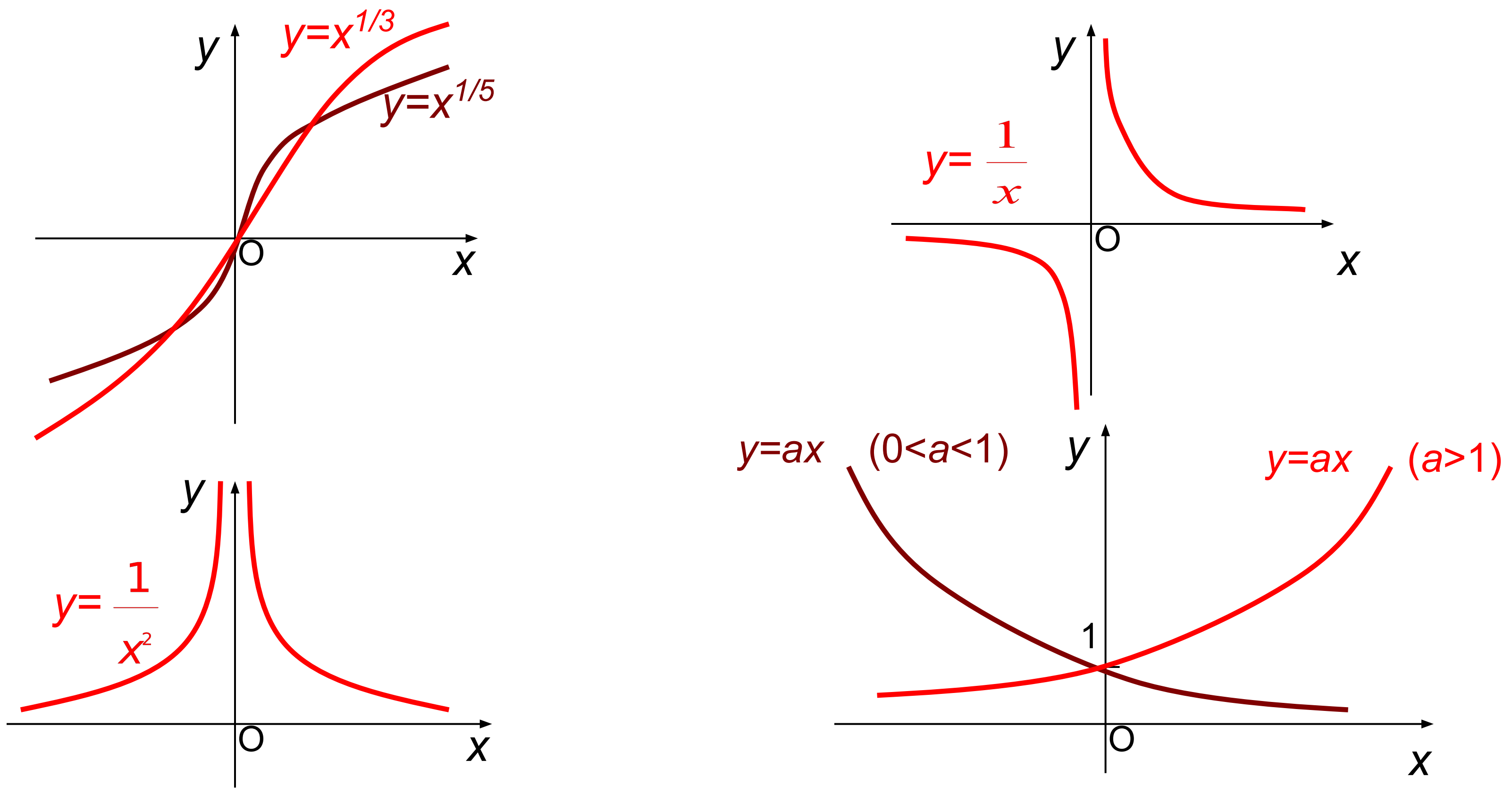






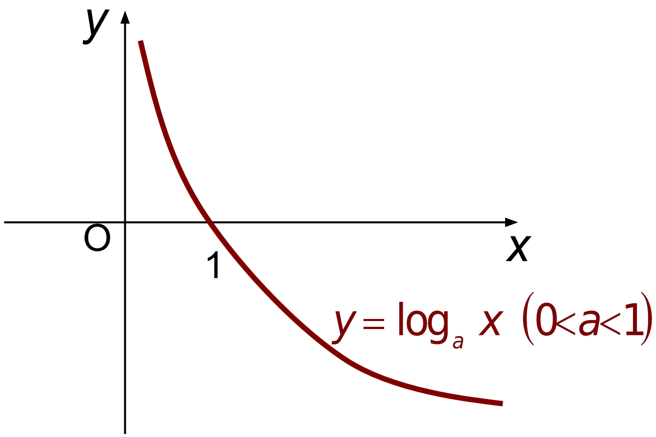


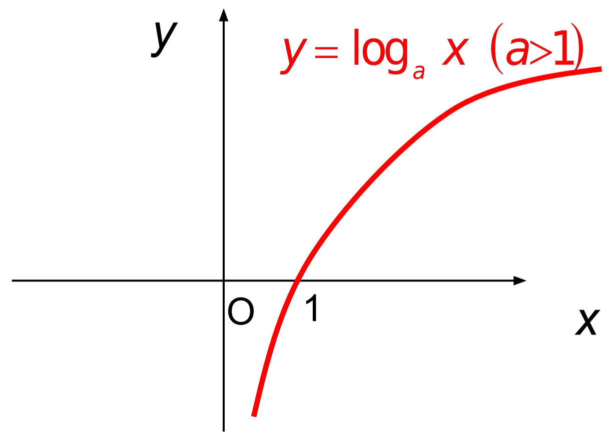
- Графики основных элементарных функций:

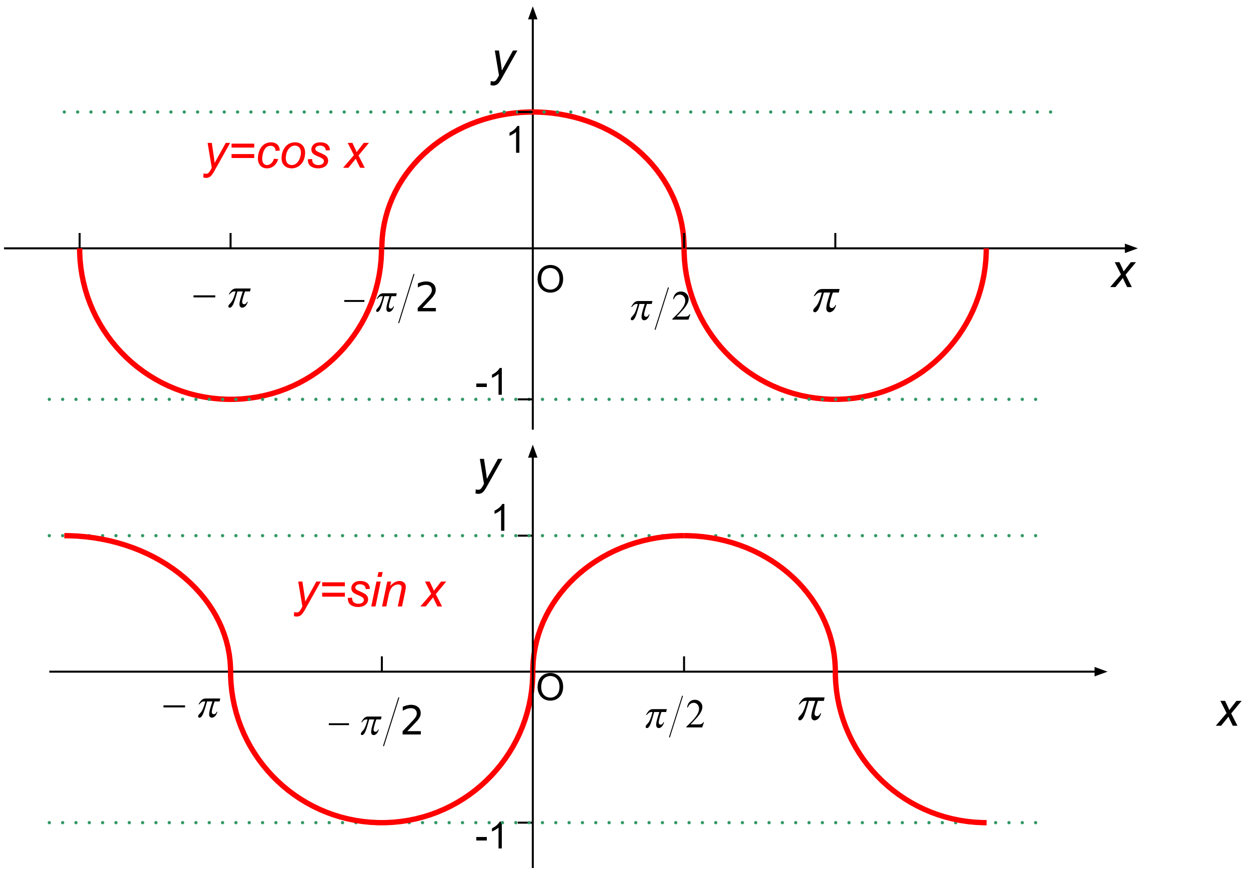


2. ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ФУНКЦИИ

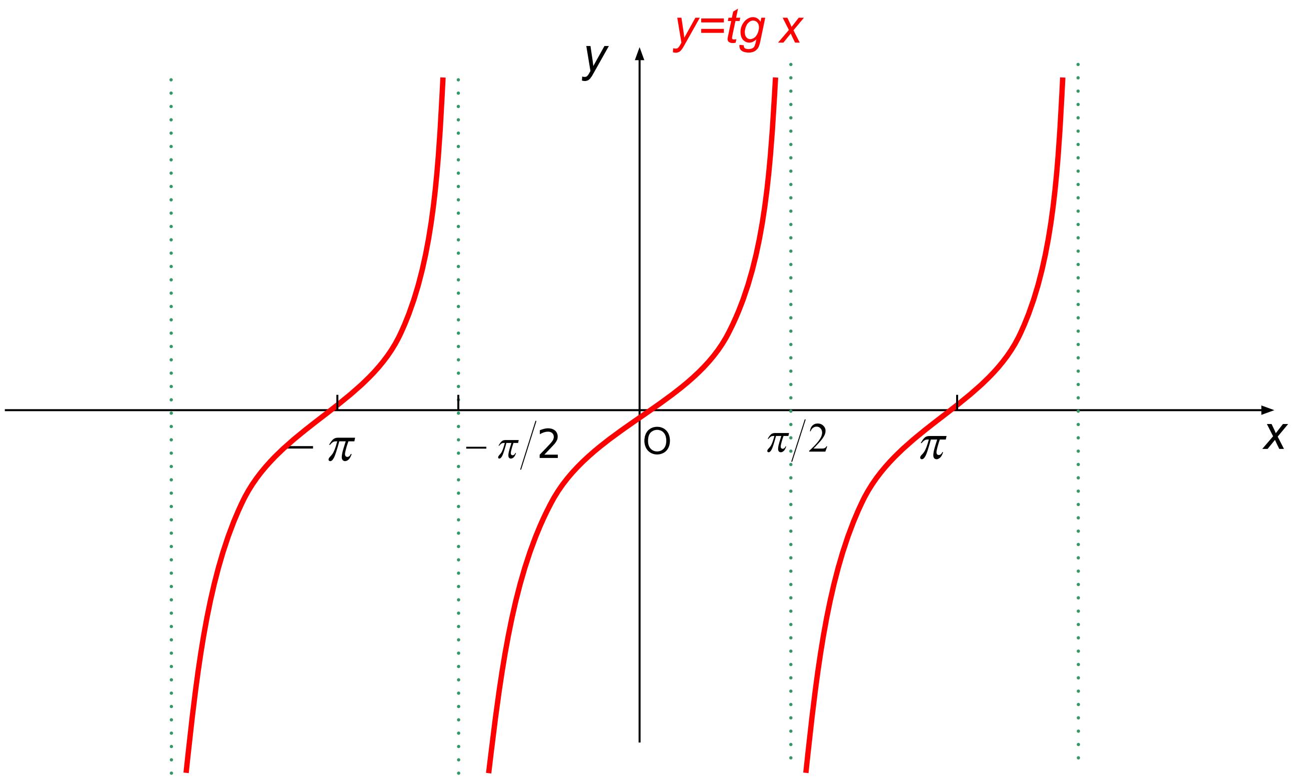
- Графики основных элементарных функций:

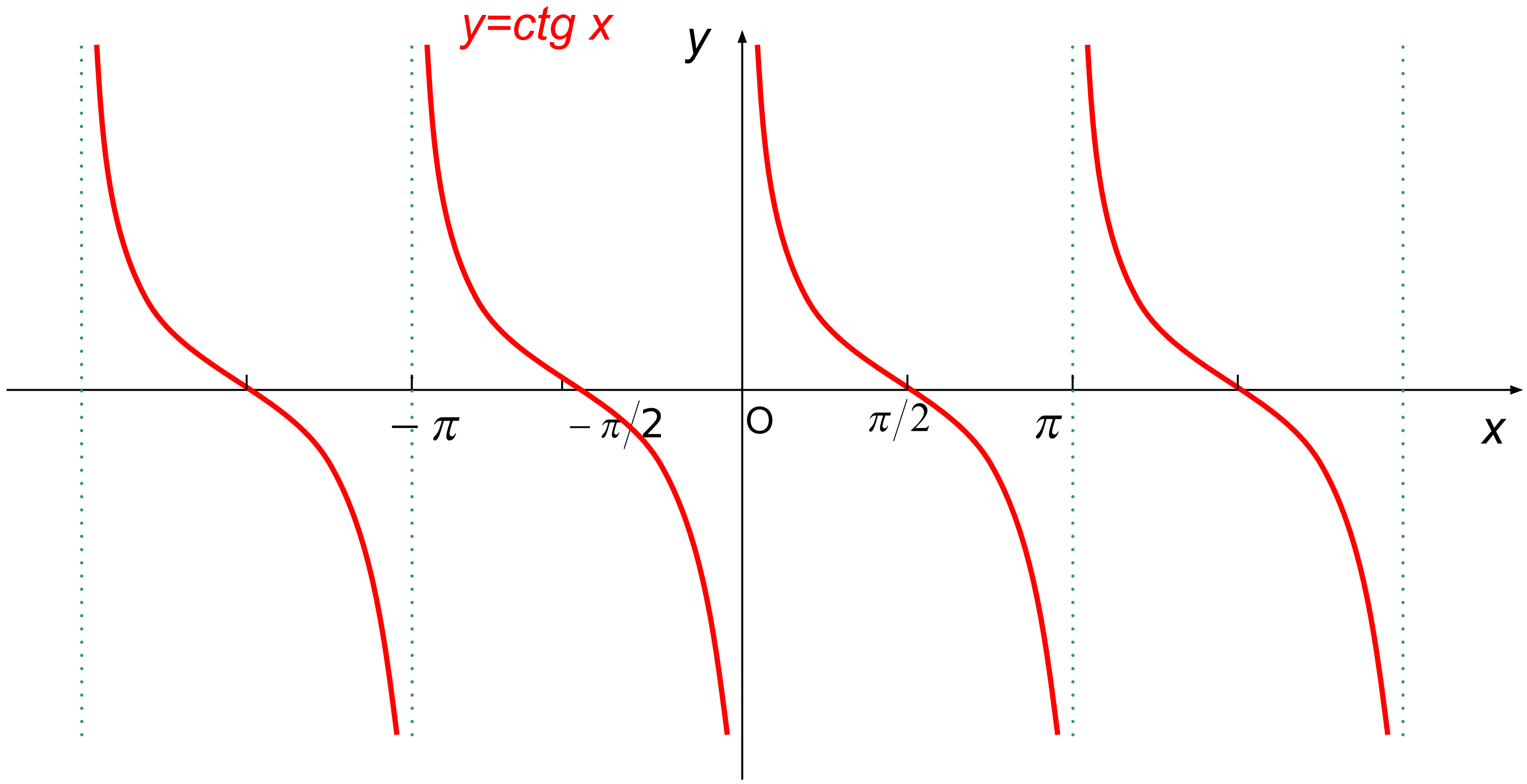




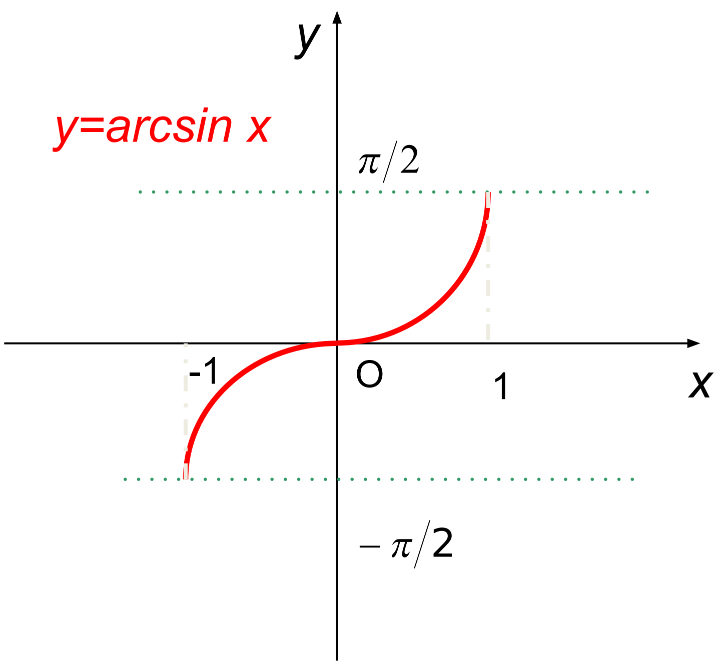


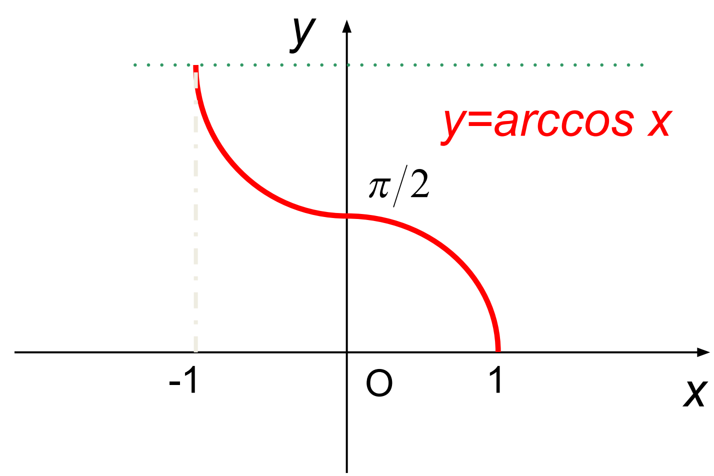
y
1
y=cos x
$-\pi$
$-\pi/2$
O
$\pi/2$
π
x
-1
y
1
y=sin x
$-\pi$
$-\pi/2$
O
$\pi/2$
π
x
-1

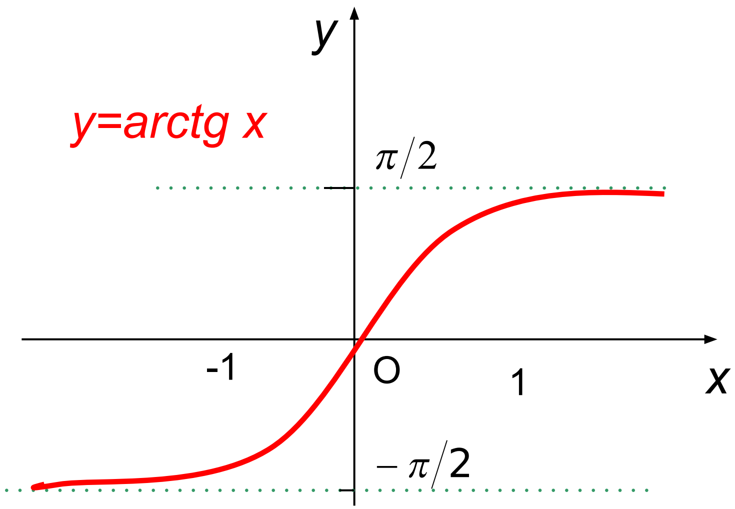

y=tg x
y
x
O
− π
− π/2
π/2
π

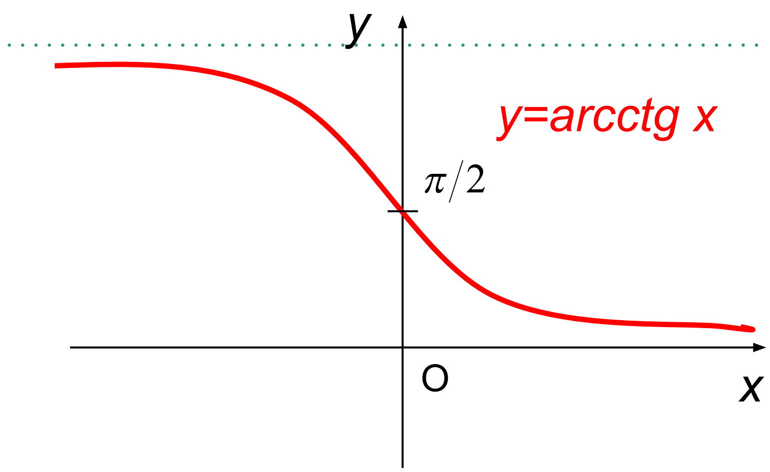


y=ctg x
y
x
O
− π
− π/2
π/2
π


y
y=arcsin x
π/2
-1
O
1
x
− π/2


y
y=arccos x
π/2
-1
O
1
x


y
y=arctg x
$\pi/2$
-1
O
1
x
$-\pi/2$


y
y=arcctg x
$\pi/2$
O
x