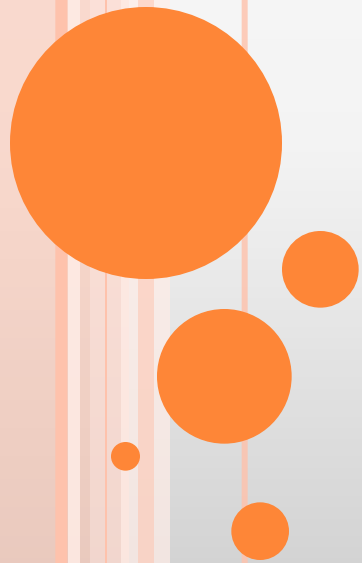


# СИСТЕМЫ ЭКОНОМЕТРИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ



# СИСТЕМА НЕЗАВИСИМЫХ УРАВНЕНИЙ

- Каждая зависимая переменная  $y$  рассматривается как функция одного и того же набора факторов  $x$ .

$$\left\{ \begin{array}{l} y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \square + a_{1m}x_m + \varepsilon_1, \\ y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \square + a_{2m}x_m + \varepsilon_2, \\ \square \square \square \square \square \square \square \square \square \square \square \square \square \square \square \\ y_n = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \square + a_{nm}x_m + \varepsilon_n. \end{array} \right.$$



# Система независимых уравнений

- Набор факторов в каждом уравнении может варьироваться. Так, модель вида

$$y_1 = f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$$

$$y_2 = f(x_1, x_3, x_4, x_5)$$

$$y_3 = f(x_2, x_3, x_5)$$

$$y_4 = f(x_3, x_4, x_5)$$

также является системой независимых уравнений.



# Система независимых уравнений

Каждое уравнение системы независимых уравнений может рассматриваться самостоятельно. Для нахождения его параметров используется метод наименьших квадратов.



# Системы рекурсивных уравнений

- Зависимая переменная включает в каждое последующее уравнение в качестве факторов все зависимые переменные предшествующих уравнений наряду с набором собственно факторов  $x$ .

$$\begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \square + a_{1m}x_m + \varepsilon_1, \\ y_2 = b_{21}y_1 + a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \square + a_{2m}x_m + \varepsilon_2, \\ y_3 = b_{31}y_1 + b_{32}y_2 + a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + \square + a_{3m}x_m + \varepsilon_3, \\ \square \\ y_n = b_{n1}y_1 + b_{n2}y_2 + \square + b_{nn-1}y_{n-1} + a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \square + a_{nm}x_m + \varepsilon_n. \end{cases}$$

- Для нахождения параметров используется метод наименьших квадратов.



# Системы рекурсивных уравнений

- Примером такой системы может служить *модель производительности труда и фондоотдачи вида:*

$$\begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \varepsilon_1, \\ y_2 = b_{21}y_1 + a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \varepsilon_2 \end{cases}$$

- где  $y_1$  - производительность труда;
- $y_2$  - фондоотдача;
- $x_1$  - фондовооруженность труда;
- $x_2$  - энерговооруженность труда;
- $x_3$  - квалификация рабочих.





# Система взаимозависимых уравнений

- Пример: модель динамики цены и заработной платы вида

$$\begin{cases} y_1 = b_{12}y_2 + a_{11}x_1 + \varepsilon_1, \\ y_2 = b_{21}y_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \varepsilon_2, \end{cases}$$

- $y_1$  - темп изменения месячной заработной платы;
- $y_2$  - темп изменения цен;
- $x_1$  - процент безработных;
- $x_2$  - темп изменения постоянного капитала;
- $x_3$  - темп изменения цен на импорт сырья.






# Система взаимосвязанных уравнений

В отличие от предыдущих систем  
каждое уравнение системы  
одновременных уравнений не  
может рассматриваться  
самостоятельно, и для  
нахождения его параметров  
традиционный МНК  
неприменим.



# Система взаимосвязанных уравнений

- Система совместных, одновременных уравнений обычно содержит эндогенные и экзогенные переменные.
  - **Эндогенные переменные ( $y$ )**. Это зависимые переменные, число которых равно числу уравнений в системе.
  - **Экзогенные переменные ( $x$ )**. Это predetermined переменные, влияющие на эндогенные переменные, но не зависящие от них.
- 

# Система взаимосвязанных уравнений

Структурные коэффициенты модели:

- $b_i$  - коэффициент при эндогенной переменной,
- $a_j$  - коэффициент при экзогенной переменной.



# Система взаимосвязанных уравнений

Для определения структурных коэффициентов модели структурная форма модели преобразуется в *приведенную форму модели*.

**Приведенная форма модели** представляет собой систему линейных функций эндогенных переменных от экзогенных:

$$\begin{cases} \hat{y}_1 = \delta_{11} \cdot x_1 + \delta_{12} \cdot x_2 + \square + \delta_{1m} \cdot x_m, \\ \hat{y}_2 = \delta_{21} \cdot x_1 + \delta_{22} \cdot x_2 + \square + \delta_{2m} \cdot x_m, \\ \square \square \square \square \square \square \square \square \square \square \square \square \square \square \\ \hat{y}_n = \delta_{n1} \cdot x_1 + \delta_{n2} \cdot x_2 + \square + \delta_{nm} \cdot x_m, \end{cases}$$

$\delta_i$  - коэффициенты приведенной формы модели.



# Система взаимосвязанных уравнений

**Пример:**

□ Для структурной модели вида

$$\begin{cases} y_1 = b_{12} \cdot y_2 + a_{11} \cdot x_1, \\ y_2 = b_{21} \cdot y_1 + a_{22} \cdot x_2. \end{cases}$$

□ приведенная форма модели имеет вид

$$\begin{cases} y_1 = \delta_{11} \cdot x_1 + \delta_{12} \cdot x_2, \\ y_2 = \delta_{21} \cdot x_1 + \delta_{22} \cdot x_2. \end{cases}$$



# Система взаимосвязанных уравнений

- из первого уравнения получаем:

$$y_2 = \frac{y_1 - a_{11}x_1}{b_{12}}.$$

- Тогда система одновременных уравнений будет представлена как

$$\begin{cases} y_2 = \frac{y_1 - a_{11}x_1}{b_{12}}, \\ y_2 = b_{21} \cdot y_1 + a_{22} \cdot x_2. \end{cases}$$




# Система взаимозависимых уравнений

Отсюда имеем:

$$y_1 - a_{11}x_1 = b_{12}b_{21}y_1 + b_{12}a_{22}x_2$$

$$y_1 - b_{12}b_{21}y_1 = a_{11}x_1 + b_{12}a_{22}x_2$$

$$y_1 = \frac{a_{11}}{1 - b_{12}b_{21}} x_1 + \frac{b_{12}a_{22}}{1 - b_{12}b_{21}} x_2$$


# Система взаимосвязанных уравнений

Таким образом, мы представили первое уравнение структурной формы модели в виде **уравнения приведенной формы модели:**

$$y_1 = \delta_{11}x_1 + \delta_{12}x_2.$$

Отсюда

$$\delta_{11} = \frac{a_{11}}{1 - b_{12}b_{21}} \quad \delta_{12} = \frac{b_{12}a_{22}}{1 - b_{12}b_{21}}$$





# Система взаимосвязанных уравнений

Аналогично получаем:

$$\delta_{21} = \frac{a_{11}b_{21}}{1 - b_{12}b_{21}}$$

$$\delta_{22} = \frac{a_{22}}{1 - b_{12}b_{21}}$$



# **Система взаимозависимых уравнений. Проблема идентификации.**

**Идентификация -  
единственность соответствия  
между приведенной и  
структурной формами  
модели.**



# Проблема идентификации

С позиции идентифицируемости структурные модели можно подразделить на три вида:

- идентифицируемые;
- неидентифицируемые;
- сверхидентифицируемые.



# Проблема идентификации

Модель *идентифицируема*, если все структурные ее коэффициенты определяются однозначно, единственным образом по коэффициентам приведенной формы модели, т. е. если число параметров структурной модели равно числу параметров приведенной формы модели.



# Проблема идентификации

Модель *неидентифицируема*, если число приведенных коэффициентов меньше числа структурных коэффициентов, и в результате структурные коэффициенты не могут быть оценены через коэффициенты приведенной формы модели.



# Проблема идентификации

Модель *сверхидентифицируема*,

если число приведенных

коэффициентов больше числа

структурных коэффициентов. В

этом случае на основе

коэффициентов приведенной

формы можно получить два или

более значений одного

структурного коэффициента.



# Проблема идентификации

- Модель считается идентифицируемой, если каждое уравнение системы идентифицируемо.
- Если хотя бы одно из уравнений системы неидентифицируемо, то и вся модель считается неидентифицируемой.
- Сверхидентифицируемая модель содержит хотя бы одно сверхидентифицируемое уравнение.



# Проблема идентификации

Обозначим

- ▣  $H$  - число эндогенных переменных в  $j$  – м уравнении системы,
- ▣  $D$  - число экзогенных переменных, которые содержатся в системе, но не входят в данное уравнение.

Условие идентифицируемости модели может быть записано в виде:

- ▣  $D + 1 = H$  — уравнение идентифицируемо;
- ▣  $D + 1 < H$  — уравнение неидентифицируемо;
- ▣  $D + 1 > H$  — уравнение сверхидентифицируемо.





# Проблема идентификации

Неравенства, приведенные выше, является *необходимым условием* идентифицируемости уравнения. Это значит, что, когда неравенство несправедливо, то уравнение заведомо *неидентифицируемо*.

Однако при выполнении неравенства ещё нельзя сделать вывод о идентифицируемости данного уравнения.




# Методы оценивания параметров структурной модели

- Косвенный метод наименьших квадратов (для идентифицируемой модели)
- Двухшаговый метод наименьших квадратов (для сверхидентифицируемой структурной модели)
- Трёхшаговый метод наименьших квадратов
- Метод максимального правдоподобия с полной информацией
- Метод максимального правдоподобия при ограниченной информации



# Методы оценивания параметров структурной модели

- Косвенный метод наименьших квадратов (для идентифицируемой модели)
    - структурная модель преобразовывается в приведенную
    - для каждого уравнения приведенной модели применяем МНК
    - по коэффициентам приведенной модели находим коэффициенты структурной модели
- 

## ПРИМЕР ПРИМЕНЕНИЯ КМНК ДЛЯ МОДЕЛИ:

$$\begin{cases} y_1 = b_{12}y_2 + a_{11}x_1 + \varepsilon_1, \\ y_2 = b_{21}y_1 + a_{22}x_2 + \varepsilon_2 \end{cases}$$

№ п/п	$y_1$	$y_2$	$x_1$	$x_2$
1	2	5	1	3
2	3	6	2	1
3	4	7	3	2
4	5	8	2	5
5	6	5	4	6
Средние	4	6,2	2,4	3,4



## ПРИМЕР ПРИМЕНЕНИЯ КМНК ДЛЯ МОДЕЛИ:

- Приведенная форма модели имеет вид:

$$\begin{cases} y_1 = \delta_{11}x_1 + \delta_{12}x_2 + u_1, \\ y_2 = \delta_{21}x_1 + \delta_{22}x_2 + u_2, \end{cases}$$

- где  $u_1, u_2$  случайные ошибки приведенной формы модели.
- Для каждого уравнения приведенной формы применим традиционный МНК и определим  $\delta$  - коэффициенты. Для простоты работаем в отклонениях, т.е.

$$y = y - \bar{y}, x = x - \bar{x}.$$



## ПРИМЕР ПРИМЕНЕНИЯ КМНК ДЛЯ МОДЕЛИ:

- Тогда система нормальных уравнений для первого уравнения системы составит:

$$\begin{cases} \delta_{11} \sum x_1^2 + \delta_{12} \sum x_1 x_2 = \sum y_1 x_1 \\ \delta_{11} \sum x_1 x_2 + \delta_{12} \sum x_2^2 = \sum y_1 x_2 \end{cases}$$

- Для приведенных данных система составит:

$$\begin{cases} 5,2\delta_{11} + 4,2\delta_{12} = 6, \\ 4,2\delta_{11} + 17,2\delta_{12} = 10. \end{cases}$$



## ПРИМЕР ПРИМЕНЕНИЯ КМНК ДЛЯ МОДЕЛИ:

- Отсюда получаем первое уравнение (и аналогично второе):

$$\begin{cases} y_1 = 0,852x_1 + 0,373x_2 + u_1 \\ y_2 = -0,072x_1 - 0,00557x_2 + u_2 \end{cases}$$

- Перейдем к структурной форме следующим образом: исключим из первого уравнения приведенной формы  $x_2$ , выразив его из второго уравнения приведенной формы и подставив в первое уравнение:

$$x_2 = \frac{-0,072x_1 - y_2}{0,00557}$$



## ПРИМЕР ПРИМЕНЕНИЯ КМНК ДЛЯ МОДЕЛИ:

- Первое уравнение структурной формы:

$$\tilde{\delta}_1 = 0,852 \tilde{\delta}_1 + 0,373 \left( \frac{-0,072 \tilde{\delta}_1 - \acute{o}_2}{0,00557} \right) = -66,966 \acute{o}_2 - 3,97 \tilde{\delta}_1$$

- Аналогично исключим из второго уравнения  $x_1$  выразив его через первое уравнение и подставив во второе:

$$\tilde{\delta}_1 = \frac{\acute{o}_1 - 0,373 \tilde{\delta}_2}{0,852}; \Rightarrow \tilde{\delta}_2 = -0,072 \left( \frac{\acute{o}_1 - 0,373 \tilde{\delta}_2}{0,852} \right) - 0,00557 \tilde{\delta}_2$$

- второе уравнение структурной формы.





## ПРИМЕР ПРИМЕНЕНИЯ КМНК ДЛЯ МОДЕЛИ:

- Структурная форма модели имеет вид:

$$\begin{cases} y_1 = -66,966y_2 - 3,97x_1 + \varepsilon_1, \\ y_2 = -0,085y_1 + 0,026x_2 + \varepsilon_2 \end{cases}$$

- Эту же систему можно записать, включив в нее свободный член уравнения, т.е. перейти от переменных в виде отклонений от среднего к исходным переменным  $y$  и  $x$ :

$$A_{01} = \bar{y}_1 - b_{12}\bar{y}_2 - a_{11}\bar{x}_1 = 428,717$$

$$A_{02} = \bar{y}_2 - b_{21}\bar{y}_1 - a_{22}\bar{x}_2 = 6,451$$



## ПРИМЕР ПРИМЕНЕНИЯ КМНК ДЛЯ МОДЕЛИ:

- Тогда структурная модель имеет вид:

$$\begin{cases} y_1 = 428,717 - 66,966y_2 - 3,97x_1 + \varepsilon_1, \\ y_2 = 6,451 - 0,085y_1 + 0,026x_2 + \varepsilon_2 \end{cases}$$

- Если к каждому уравнению структурной формы применить традиционный МНК, то результаты могут сильно отличаться. В данном примере будет:

$$\begin{cases} y_1 = -1,09 + 0,364y_2 + 1,192x_1 + \varepsilon_1, \\ y_2 = 5,2 + 0,533y_1 - 0,333x_2 + \varepsilon_2 \end{cases}$$



# Методы оценивания параметров структурной модели

- Двухшаговый метод наименьших квадратов (для сверхидентифицируемой модели)
  - по приведенной модели получаем оценки эндогенных переменных
  - подставляем найденные значения в правые части структурных уравнений и применяем МНК



# ДВУХШАГОВЫЙ МЕТОД НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ (подробнее)

---

Алгоритм оценки коэффициентов структурной формы уравнений ДМНК

1. Оценивание параметров приведенной формы модели для эндогенных переменных, включенных в правую часть уравнения модели с помощью МНК
2. Оцениваются параметры структурной формы уравнения модели, в правую часть которой вместо значений эндогенных переменных подставляются их оценки, рассчитанные по приведенным формам модели, которые получены на предыдущем шаге.
3. Оцениваются точностные характеристики модели



