Системы эконометрических уравнений

Система независимых уравнений

- Каждая зависимая переменная ***y*** рассматривается как функция одного и того же набора факторов ***x***.

$$\begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1m}x_m + \varepsilon_1, \\ y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2m}x_m + \varepsilon_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y_n = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nm}x_m + \varepsilon_n. \end{cases}$$

Система независимых уравнений

- Набор факторов в каждом уравнении может варьироваться. Так, модель вида

$$y_1 = f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$$

$$y_2 = f(x_1, x_3, x_4, x_5)$$

$$y_3 = f(x_2, x_3, x_5)$$

$$y_4 = f(x_3, x_4, x_5)$$

также является системой независимых уравнений.

Система независимых уравнений

Каждое уравнение системы независимых уравнений может рассматриваться самостоятельно. Для нахождения его параметров используется метод наименьших квадратов.

Системы рекурсивных уравнений

- Зависимая переменная включает в каждое последующее уравнение в качестве факторов все зависимые переменные предшествующих уравнений наряду с набором собственно факторов ***x***.

$$
\begin{cases}
y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1m}x_m + \varepsilon_1, \\
y_2 = b_{21}y_1 + a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2m}x_m + \varepsilon_2, \\
y_3 = b_{31}y_1 + b_{32}y_2 + a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + \dots + a_{3m}x_m + \varepsilon_3, \\
\dots \\
y_n = b_{n1}y_1 + b_{n2}y_2 + \dots + b_{nn-1}y_{n-1} + a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nm}x_m + \varepsilon_n.
\end{cases}
$$

- Для нахождения параметров используется метод наименьших квадратов.

Системы рекурсивных уравнений

- Примером такой системы может служить *модель производительности труда и фондоотдачи вида*:

$$\begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \varepsilon_1, \\ y_2 = b_{21}y_1 + a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \varepsilon_2 \end{cases}$$

- где y_1 - производительность труда;
- y_2 - фондоотдача;
- x_1 - фондовооруженность труда;
- x_2 - энерговооруженность труда;
- x_3 - квалификация рабочих.

Система взаимозависимых уравнений (системы совместных, одновременных уравнений).

$$
\begin{cases}
y_1 = b_{12} \cdot y_2 + b_{13} \cdot y_3 + \cdots + b_{1n} \cdot y_n + a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + \cdots + a_{1m} \cdot x_m + \varepsilon_1, \\
y_2 = b_{21} \cdot y_1 + b_{23} \cdot y_3 + \cdots + b_{2n} \cdot y_n + a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 + \cdots + a_{2m} \cdot x_m + \varepsilon_2, \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
y_n = b_{n1} \cdot y_1 + b_{n2} \cdot y_2 + \cdots + b_{nn-1} \cdot y_{n-1} + a_{n1} \cdot x_1 + a_{n2} \cdot x_2 + \cdots + a_{nm} \cdot x_m + \varepsilon_n.
\end{cases}
$$

- структурная форма модели.

Система взаимозависимых уравнений

- Пример: *модель динамики цены и заработной платы вида*

$$\begin{cases} y_1 = b_{12}y_2 + a_{11}x_1 + \varepsilon_1, \\ y_2 = b_{21}y_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \varepsilon_2, \end{cases}$$

- y_1 - *темп изменения месячной заработной платы;*
- y_2 - *темп изменения цен;*
- x_1 - *процент безработных;*
- x_2 - *темп изменения постоянного капитала;*
- x_3 - *темп изменения цен на импорт сырья.*

Система взаимозависимых уравнений

В отличие от предыдущих систем каждое уравнение **системы одновременных уравнений** не может рассматриваться самостоятельно, и для нахождения его параметров традиционный **МНК неприменим**.

Система взаимозависимых уравнений

- Система совместных, одновременных уравнений обычно содержит эндогенные и экзогенные переменные.
- **Эндогенные переменные (*y*)**. Это зависимые переменные, число которых равно числу уравнений в системе.
- **Экзогенные переменные (*x*)**. Это предопределенные переменные, влияющие на эндогенные переменные, но не зависящие от них.

Система взаимозависимых уравнений

Структурные коэффициенты модели:

- b_i - коэффициент при эндогенной переменной,
- a_j- коэффициент при экзогенной переменной.

Система взаимозависимых уравнений

- Для определения структурных коэффициентов модели структурная форма модели преобразуется в *приведенную форму модели.*
- **Приведенная форма модели** представляет собой систему линейных функций эндогенных переменных от экзогенных:

$$\begin{cases} \hat{y}_1 = \delta_{11} \cdot x_1 + \delta_{12} \cdot x_2 + \dots + \delta_{1m} \cdot x_m, \\ \hat{y}_2 = \delta_{21} \cdot x_1 + \delta_{22} \cdot x_2 + \dots + \delta_{2m} \cdot x_m, \\ \dots \\ \hat{y}_n = \delta_{n1} \cdot x_1 + \delta_{n2} \cdot x_2 + \dots + \delta_{nm} \cdot x_m, \end{cases}$$

- δ_i - коэффициенты приведенной формы модели.

Система взаимозависимых уравнений

Пример:

- **Для структурной модели вида**

$$\begin{cases} y_1 = b_{12} \cdot y_2 + a_{11} \cdot x_1, \\ y_2 = b_{21} \cdot y_1 + a_{22} \cdot x_2. \end{cases}$$

- **приведенная форма модели имеет вид**

$$\begin{cases} y_1 = \delta_{11} \cdot x_1 + \delta_{12} \cdot x_2, \\ y_2 = \delta_{21} \cdot x_1 + \delta_{22} \cdot x_2. \end{cases}$$

Система взаимозависимых уравнений

- из первого уравнения получаем:

$$y_2 = \frac{y_1 - a_{11}x_1}{b_{12}}.$$

- Тогда система одновременных уравнений будет представлена как

$$\begin{cases} y_2 = \dfrac{y_1 - a_{11}x_1}{b_{12}}, \\ y_2 = b_{21} \cdot y_1 + a_{22} \cdot x_2. \end{cases}$$

Система взаимозависимых уравнений

Отсюда имеем:

$$y_1 - a_{11}x_1 = b_{12}b_{21}y_1 + b_{12}a_{22}x_2$$

$$y_1 - b_{12}b_{21}y_1 = a_{11}x_1 + b_{12}a_{22}x_2$$

$$y_1 = \frac{a_{11}}{1 - b_{12}b_{21}}x_1 + \frac{b_{12}a_{22}}{1 - b_{12}b_{21}}x_2$$

Система взаимозависимых уравнений

Таким образом, мы представили первое уравнение структурной формы модели в виде **уравнения приведенной формы модели**:

$$y_1 = \delta_{11} x_1 + \delta_{12} x_2 .$$

Отсюда

$$\delta_{11} = \frac{a_{11}}{1 - b_{12} b_{21}} \qquad \delta_{12} = \frac{b_{12} a_{22}}{1 - b_{12} b_{21}}$$

Система взаимозависимых уравнений

Аналогично получаем:

$$\delta_{21} = \frac{a_{11} b_{21}}{1 - b_{12} b_{21}}$$

$$\delta_{22} = \frac{a_{22}}{1 - b_{12} b_{21}}$$

Система взаимозависимых уравнений. Проблема идентификации.

Идентификация - единственность соответствия между приведенной и структурной формами модели.

Проблема идентификации

С позиции идентифицируемости структурные модели можно подразделить на три вида:

- идентифицируемые;
- неидентифицируемые;
- сверхидентифицируемые.

Проблема идентификации

Модель ***идентифицируема,*** если все структурные ее коэффициенты определяются однозначно, единственным образом по коэффициентам приведенной формы модели, т. е. если число параметров структурной модели равно числу параметров приведенной формы модели.

Проблема идентификации

Модель ***неидентифицируема,*** если число приведенных коэффициентов меньше числа структурных коэффициентов, и в результате структурные коэффициенты не могут быть оценены через коэффициенты приведенной формы модели.

Проблема идентификации

Модель ***сверхидентифицируема***, если число приведенных коэффициентов больше числа структурных коэффициентов. В этом случае на основе коэффициентов приведенной формы можно получить два или более значений одного структурного коэффициента.

Проблема идентификации

- Модель считается идентифицируемой, если каждое уравнение системы идентифицируемо.
- Если хотя бы одно из уравнений системы неидентифицируемо, то и вся модель считается неидентифицируемой.
- Сверхидентифицируемая модель содержит хотя бы одно сверхидентифицируемое уравнение.

Проблема идентификации

Обозначим

- H - число эндогенных переменных в j – м уравнении системы,
- D - число экзогенных переменных, которые содержатся в системе, но не входят в данное уравнение.

Условие идентифицируемости модели может быть записано в виде:

- $D+1=H$ — уравнение идентифицируемо;
- $D+1<H$ — уравнение неидентифицируемо;
- $D+1>H$ — уравнение сверхидентифицируемо.

Проблема идентификации

Неравенства, приведенные выше, является *необходимым условием* идентифицируемости уравнения. Это значит, что, когда неравенство несправедливо, то уравнение заведомо *неидентифицируемо*.

Однако при выполнении неравенства ещё нельзя сделать вывод о идентифицируемости данного уравнения.

Методы оценивания параметров структурной модели

- Косвенный метод наименьших квадратов (для идентифицируемой модели)
- Двухшаговый метод наименьших квадратов (для сверхидентифицируемой структурной модели)
- Трёхшаговый метод наименьших квадратов
- Метод максимального правдоподобия с полной информацией
- Метод максимального правдоподобия при ограниченной информации

Методы оценивания параметров структурной модели

- Косвенный метод наименьших квадратов (для идентифицируемой модели)
  - структурная модель преобразовывается в приведенную
  - для каждого уравнения приведенной модели применяем МНК
  - по коэффициентам приведенной модели находим коэффициенты структурной модели

Пример применения КМНК для модели:

$$\begin{cases} y_1 = b_{12}y_2 + a_{11}x_1 + \varepsilon_{1,} \\ y_2 = b_{21}y_1 + a_{22}x_2 + \varepsilon_2 \end{cases}$$

№ п/п	y_1	y_2	x_1	x_2
1	2	5	1	3
2	3	6	2	1
3	4	7	3	2
4	5	8	2	5
5	6	5	4	6
Средние	4	6,2	2,4	3,4

Пример применения КМНК для модели:

- Приведенная форма модели имеет вид:

$$\begin{cases} y_1 = \delta_{11}x_1 + \delta_{12}x_2 + u_{1,} \\ y_2 = \delta_{21}x_1 + \delta_{22}x_2 + u_{2,} \end{cases}$$

- где u_1, u_2 случайные ошибки приведенной формы модели.
- Для каждого уравнения приведенной формы применим традиционный МНК и определим δ - коэффициенты. Для простоты работаем в отклонениях, т.е. $y = y - \bar{y}, x = x - \bar{x}.$

Пример применения КМНК для модели:

- Тогда система нормальных уравнений для первого уравнения системы составит:

$$\begin{cases} \delta_{11}\sum x_1^2 + \delta_{12}\sum x_1 x_2 = \sum y_1 x_1 \\ \delta_{11}\sum x_1 x_2 + \delta_{12}\sum x_2^2 = \sum y_1 x_2 \end{cases}$$

- Для приведенных данных система составит:

$$\begin{cases} 5{,}2\delta_{11} + 4{,}2\delta_{12} = 6, \\ 4{,}2\delta_{11} + 17{,}2\delta_{12} = 10. \end{cases}$$

Пример применения КМНК для модели:

- Отсюда получаем первое уравнение (и аналогично второе):

$$\begin{cases} y_1 = 0{,}852x_1 + 0{,}373x_2 + u_1 \\ y_2 = -0{,}072x_1 - 0{,}00557x_2 + u_2 \end{cases}$$

- Перейдем к структурной форме следующим образом: исключим из первого уравнения приведенной формы x_2, выразив его из второго уравнения приведенной формы и подставив в первое уравнение:

$$x_2 = \frac{-0{,}072x_1 - y_2}{0{,}00557}$$

Пример применения КМНК для модели:

- Первое уравнение структурной формы:

$$\tilde{o}_1 = 0{,}852\,\tilde{o}_1 + 0{,}373\left(\frac{-0{,}072\,\tilde{o}_1 - \acute{o}_2}{0{,}00557}\right) = -66{,}966\,\acute{o}_2 - 3{,}97\,\tilde{o}_1$$

- Аналогично исключим из второго уравнения x_1 выразив его через первое уравнение и подставив во второе:

$$\tilde{o}_1 = \frac{\acute{o}_1 - 0{,}373\,\tilde{o}_2}{0{,}852};\Rightarrow \tilde{o}_2 = -0{,}072\left(\frac{\acute{o}_1 - 0{,}373\,\tilde{o}_2}{0{,}852}\right) - 0{,}00557\,\tilde{o}_2$$

$$\tilde{o}_2 = -0{,}085\,\acute{o}_1 + 0{,}026\,\tilde{o}_2 -$$

- второе уравнение структурной формы.

Пример применения КМНК для модели:

- Структурная форма модели имеет вид:

$$\begin{cases} y_1 = -66{,}966 y_2 - 3{,}97 x_1 + \varepsilon_{1,} \\ y_2 = -0{,}085 y_1 + 0{,}026 x_2 + \varepsilon_2 \end{cases}$$

- Эту же систему можно записать, включив в нее свободный член уравнения, т.е. перейти от переменных в виде отклонений от среднего к исходным переменным у и х:

$$A_{01} = \bar{y}_1 - b_{12}\bar{y}_2 - a_{11}\bar{x}_1 = 428{,}717$$

$$A_{02} = \bar{y}_2 - b_{21}\bar{y}_1 - a_{22}\bar{x}_2 = 6{,}451$$

Пример применения КМНК для модели:

- Тогда структурная модель имеет вид:

$$\begin{cases} y_1 = 428{,}717 - 66{,}966 y_2 - 3{,}97 x_1 + \varepsilon_{1,} \\ y_2 = 6{,}451 - 0{,}085 y_1 + 0{,}026 x_2 + \varepsilon_2 \end{cases}$$

- Если к каждому уравнению структурной формы применить традиционный МНК, то результаты могут сильно отличаться. В данном примере будет:

$$\begin{cases} y_1 = -1{,}09 + 0{,}364 y_2 + 1{,}192 x_1 + \varepsilon_{1,} \\ y_2 = 5{,}2 + 0{,}533 y_1 - 0{,}333 x_2 + \varepsilon_2 \end{cases}$$

Методы оценивания параметров структурной модели

- Двухшаговый метод наименьших квадратов (для сверхидентифицируемой модели)
  - по приведенной модели получаем оценки эндогенных переменных
  - подставляем найденные значения в правые части структурных уравнений и применяем МНК

Двухшаговый метод наименьших квадратов (подробнее)

Алгоритм оценки коэффициентов структурной формы уравнений ДМНК

1. Оценивание параметров приведенной формы модели для эндогенных переменных, включенных в правую часть уравнения модели с помощью МНК

2. Оцениваются параметры структурной формы уравнения модели, в правую часть которой вместо значений эндогенных переменных подставляются их оценки, рассчитанные по приведенным формам модели, которые получены на предыдущем шаге.

3. Оцениваются точностные характеристики модели