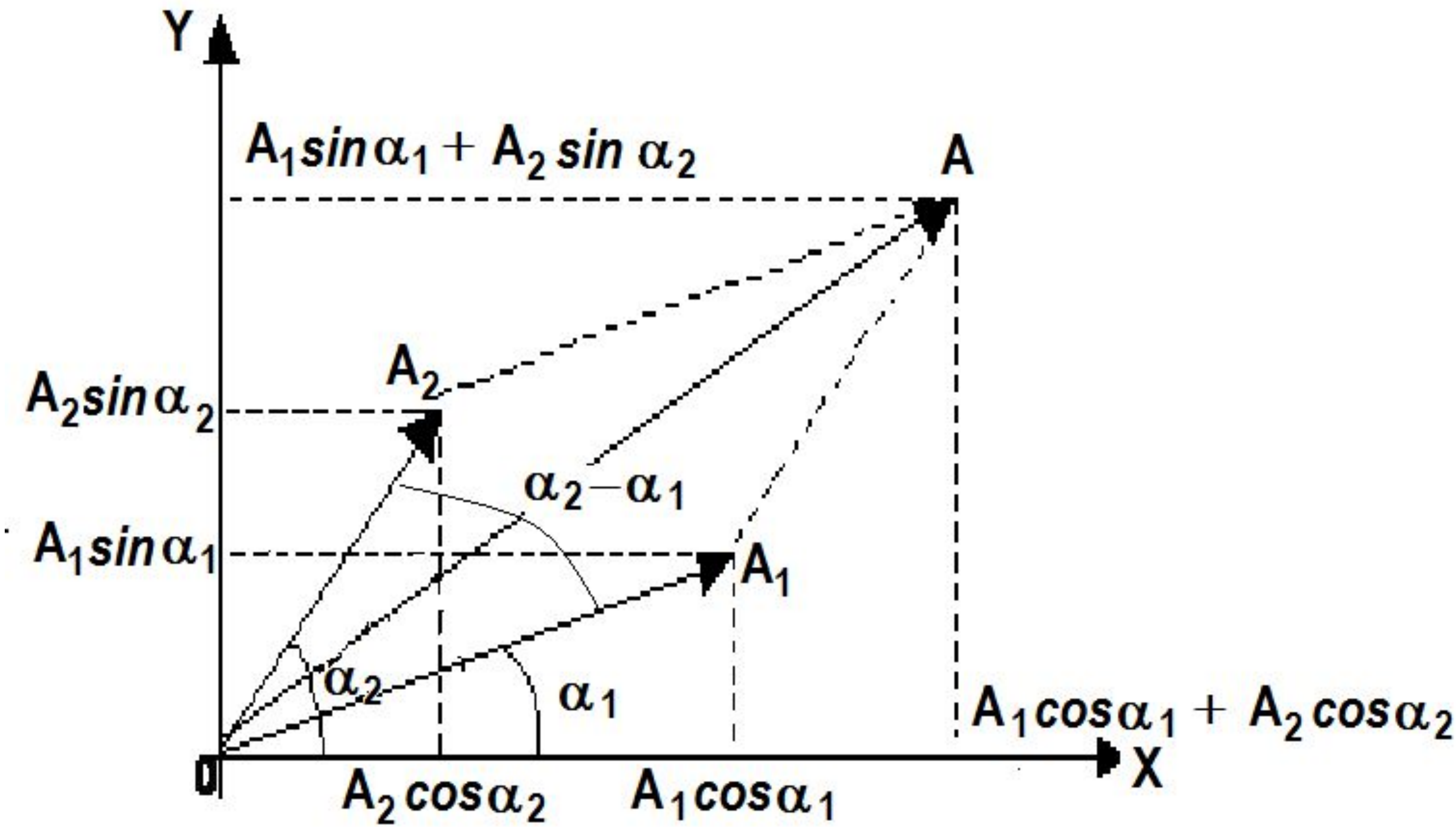
Сложение колебаний

Сложение гармонических колебаний одного направления и одинаковой частоты:

$$x_1 = A_1 \cos(\omega t + \phi_1), \quad x_2 = A_2 \cos(\omega t + \phi_2).$$

Результирующее колебание $x = x_1 + x_2$ должно быть гармоническим колебанием той же частоты ω, что и складываемые колебания, то есть $x = A \cos(\omega t + \phi)$. Задача заключается в нахождении амплитуды A и начальной фазы ϕ результирующего колебания.

Сложение гармонических колебаний проведём на векторной диаграмме.



Результирующий вектор, определяемый по правилу параллелограмма, будет изображать результирующее колебание $x = x_1 + x_2$. Амплитуду А результирующего колебания определим из векторной диаграммы по теореме косинусов:

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\alpha_2 - \alpha_1)$$

и начальную фазу ϕ из

$$tg\alpha = \frac{\sin\alpha_1 + \sin\alpha_2}{\cos\alpha_1 + \cos\alpha_2}$$

Амплитуда результирующего колебания получается наибольшей ($A = A_{макс}$) при их синфазности, т. е. при разности фаз кратной чётному числу π:

$$A_{макс} = A_1 + A_2 \quad \text{при } \phi_2 - \phi_1 = \pm 2m\pi;$$

При разности фаз складываемых колебаний кратной нечётному числу π они оказываются в противофазе, и амплитуда результирующего колебания получается минимальной.

$$A_{мин} = A_1 - A_2 \quad \text{при } \phi_2 - \phi_1 = \pm (2m + 1)\pi; \quad m = 0, 1, 2, \ldots$$

При равенстве амплитуд $A_1 = A_2$ складываемых колебаний амплитуда результирующего колебания становится равной нулю.

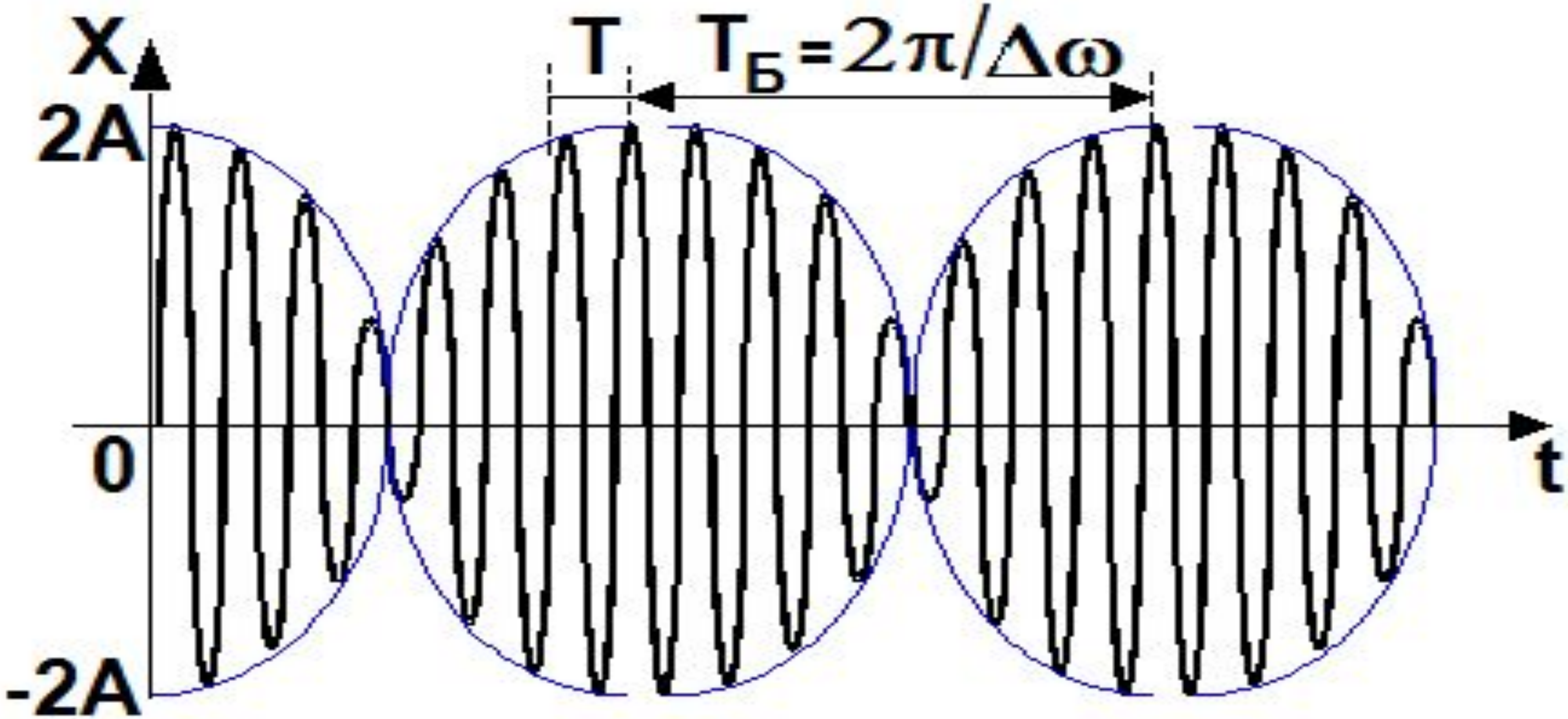
Противофазные колебания с равными амплитудами полностью погашают друг друга.

БИЕНИЯ

$x_1 = A_1 \cos(\omega t + \phi_1)$
$x_2 = A_1 \cos(\omega + \Delta\omega)t + \phi_2)]$, где $\Delta\omega \ll \omega$.

Результирующий вектор с амплитудой $A = A_1 + A_2$ будет при этом пульсировать по величине (по модулю) и вращаться с переменной скоростью.

В результате сложения этих двух колебаний получаем $x = A\cos\omega t + A\cos(\omega + \Delta\omega)t = = 2A[\cos(\Delta\omega/2)t]\cdot\cos\omega t$



Биениями **называют периодические изменения амплитуды результирующего колебания от сложения двух однонаправленных колебаний с близкими частотами: $\Delta\omega$ - частота биений.**

Сложение перпендикулярных колебаний.

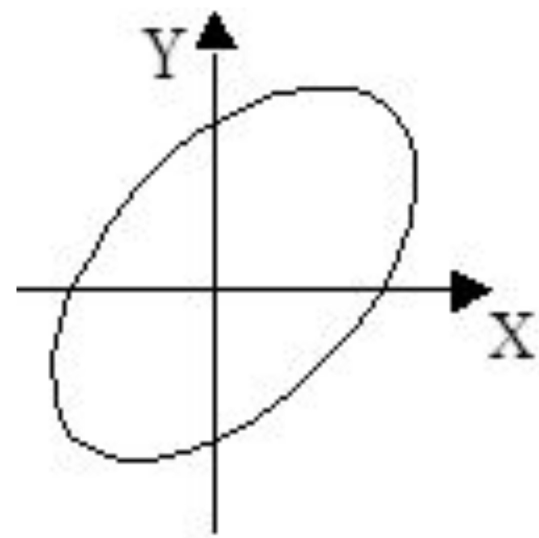
$$x = A\cos\omega t$$

$$y = B\cos(\omega t + \alpha)$$

Задача нахождения траектории результирующего движения заключается в исключении параметра *t* и связывании напрямую координат *y* и *x*.

После необходимых математических преобразований (выразить косинус суммы аргументов, найти чему равны sin ωt и cos ωt) получаем уравнение эллипса с произвольной ориентацией его осей относительно осей X и У.

$$\frac{x^2}{A^2} - \frac{2xy}{AB}\cos\alpha + \frac{y^2}{B^2} = sin^2\alpha$$

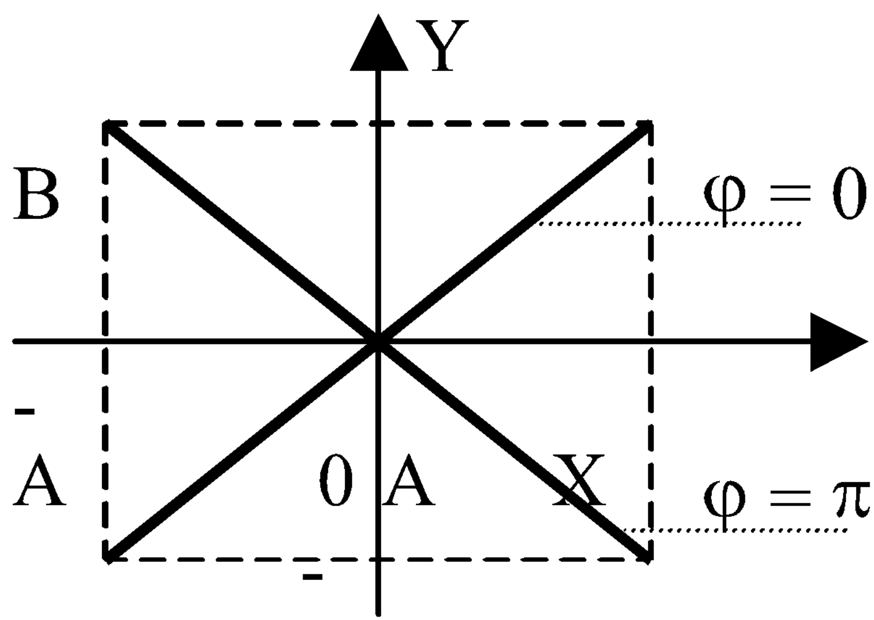


Частные случаи:

а) $\phi = 0$ (или $\phi \ \pm 2\pi m$) - колебания по x и y - синфазны:

б) $\phi = \pm (2m\pi + 1)$ - колебания по x и y противофазны.

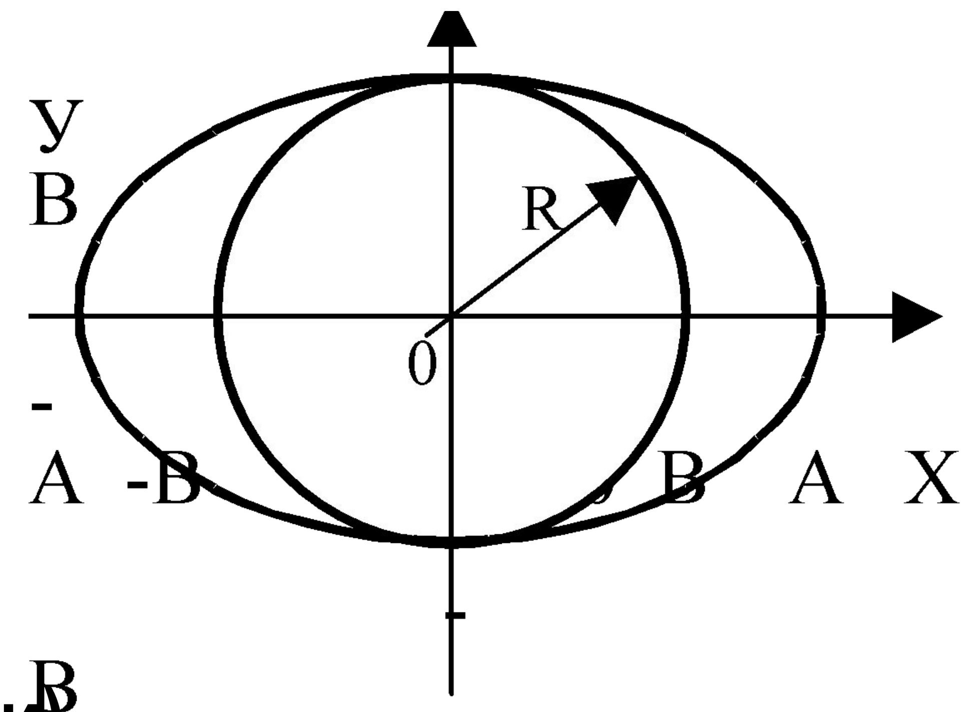
Траектория – прямая линия.



в) $\phi = \pi/2$ - колебания по x и y фазно-ортогональны. Уравнение траектории: $x^2/A^2 + y^2/B^2 = 1$ - уравнение эллипса <u>приведённого к осям координат</u>.

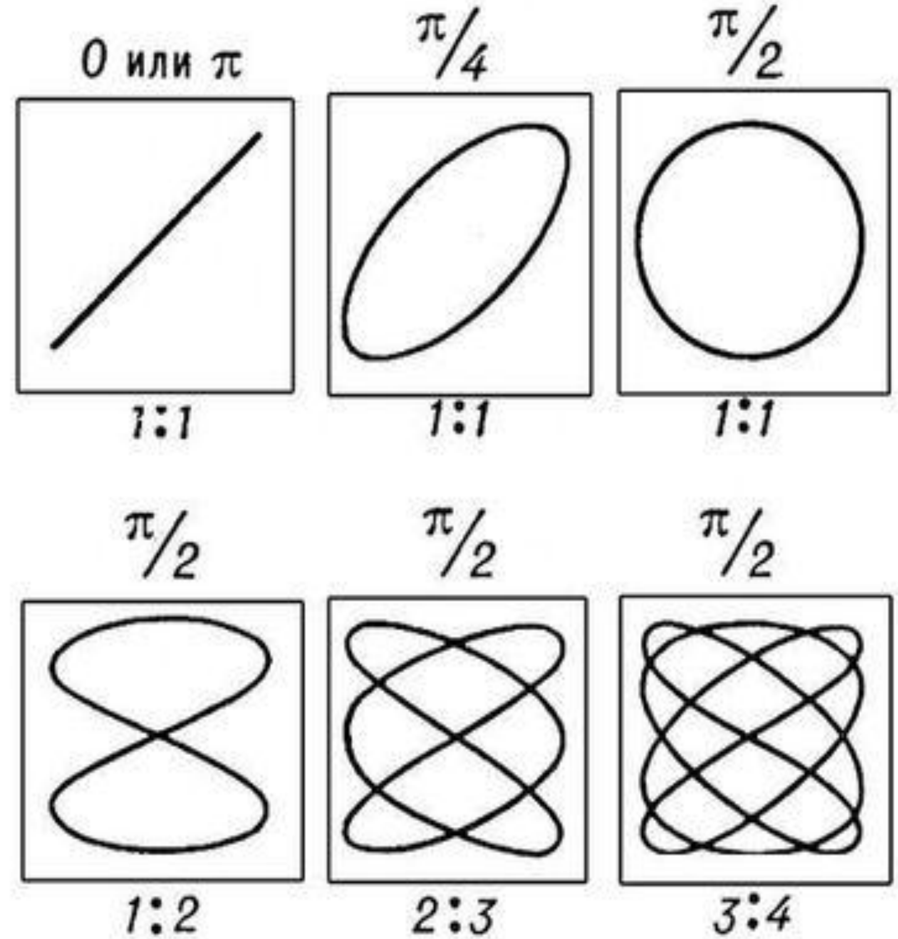
При равенстве амплитуд складываемых взаимно-перпендикулярных колебаний эллипс вырождается в окружность.

Случаи $\phi = \pi/2$ и $\phi = -\pi/2$ отличаются направлением движения точки по эллипсу или окружности (по или против часовой стрелки).



Фигуры Лиссажу.

Частоты взаимно - перпендикулярных колебаний не одинаковы. При кратности частот траектория становится замкнутой, причём число пересечения ею осей X и Y повторяет соотношение частот соответствующих коле баний.



ЗАТУХАЮЩИЕ КОЛЕБАНИЯ

Сила трения (или *сопротивления*) $\vec{F}_{\text{тр}} = -r\vec{v}$

где *r* – коэффициент сопротивления,   – скорость движения.

Запишем второй закон Ньютона для затухающих *прямолинейных* колебаний вдоль оси *x*:

$$-kx - r\dot{x} = m\ddot{x}$$

где *kx* – возвращающая сила, $r\upsilon_x$ – сила трения. Разделим на массу и введем обозначения:

$$\beta = \frac{r}{2m} \qquad \omega_0^2 = \frac{k}{m}$$

Получаем $$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

; ;

Решение этого уравнения имеет вид (при $\beta \leq \omega_0$):

$$x = A_0 e^{-\beta t} \cos(\omega t - \varphi_0)$$

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$$

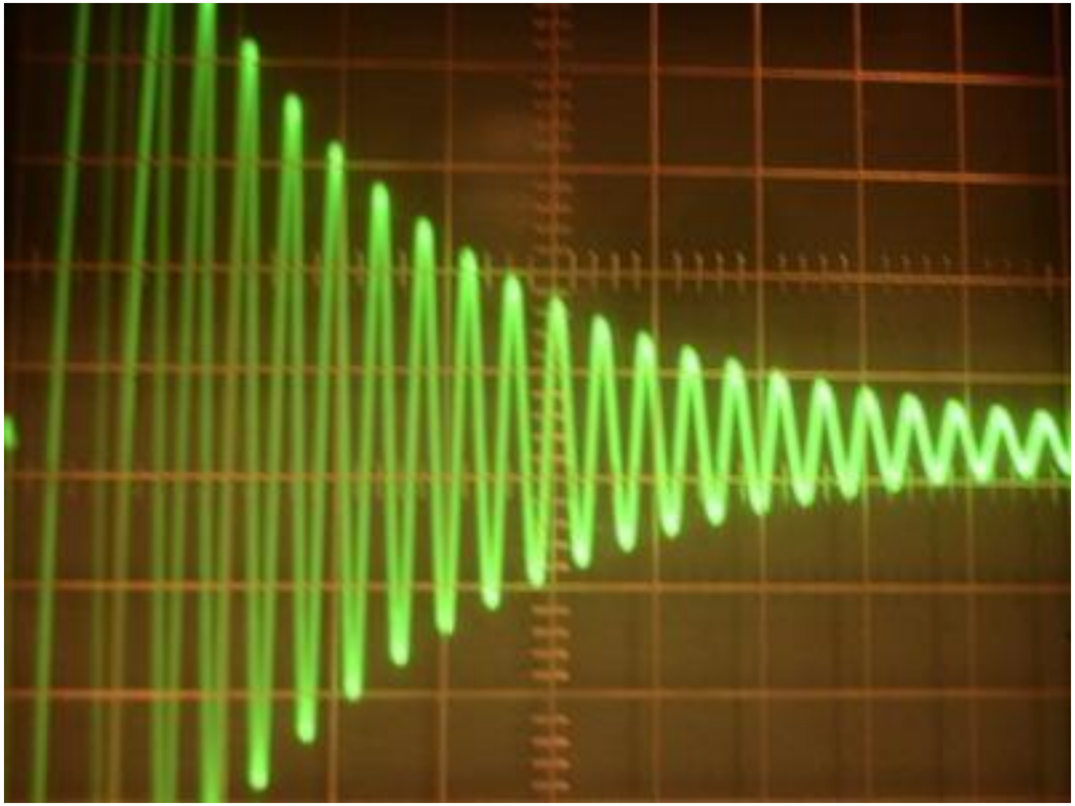
где ω_0 – *круговая частота собственных колебаний* (без затухания);
ω – *круговая частота свободных затухающих колебаний*.

Для колебаний под действием упругой силы

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \qquad \beta = \frac{r}{2m} \qquad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} - \left(\frac{r^2}{2m}\right)$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}$$

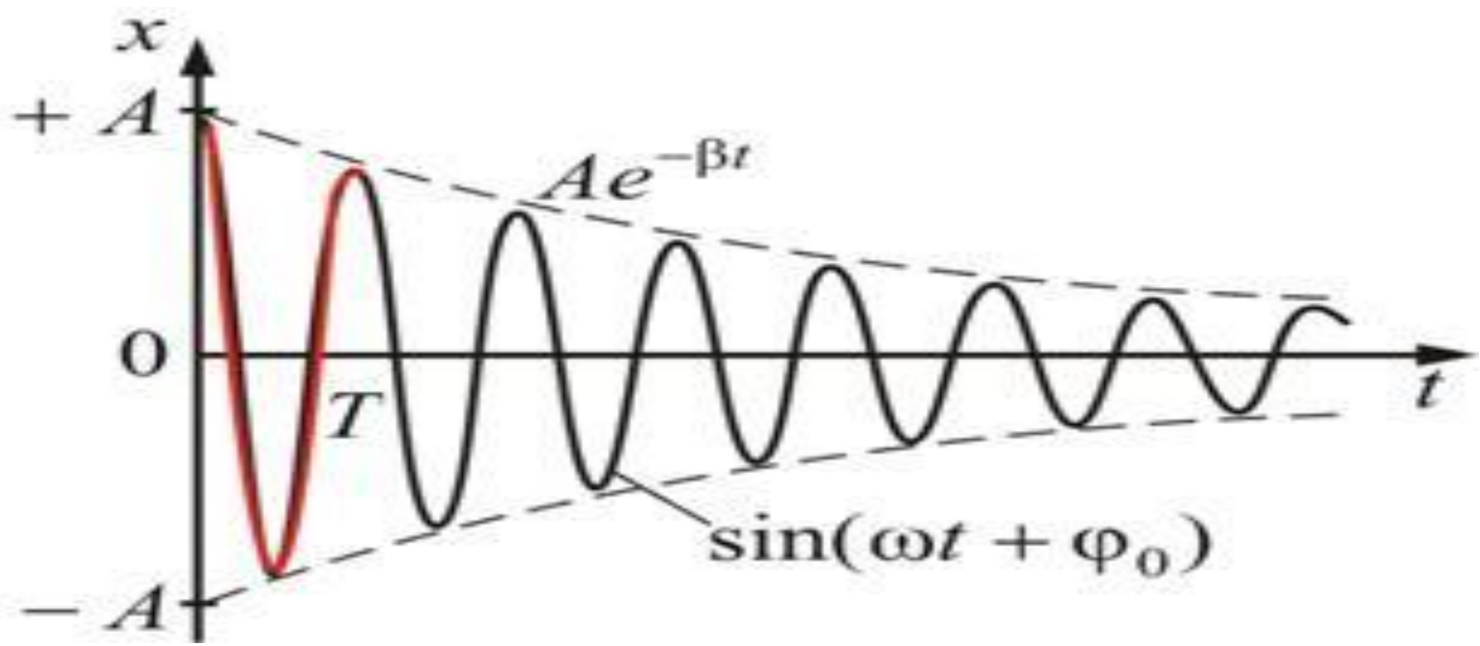
называется *условным периодом* затухающих колебаний



Найдем отношение значений амплитуды затухающих колебаний в моменты времени *t* и *t+T* :

$$\frac{A(t)}{A(t+T)} = \frac{e^{-\beta t}}{e^{-\beta t} e^{-\beta T}} = e^{-\beta T}$$

где β – коэффициент затухания.



Натуральный логарифм отношения амплитуд, следующих друг за другом через период Т, называется *__логарифмическим декрементом затухания__* λ**:**

$$\lambda = ln\frac{A(t)}{A(t+T)} = e^{\beta T} = \beta T$$

__Время релаксации__ τ **– время, в течение которого амплитуда *А* уменьшается в е раз.**

отсюда

$$\beta\tau = 1 \qquad \frac{A_0}{A_I} = e^{\beta\tau} = e^1 \qquad \beta = \frac{1}{\tau}$$

Пусть *N* число колебаний, после которых амплитуда уменьшается в *е* раз. Тогда

$$\tau = NT; \quad ; \quad T = \frac{\tau}{N} \quad ; \quad \beta = \frac{1}{\tau}$$

$$\lambda = \beta T = \frac{\tau}{\tau N} = \frac{1}{N} = \frac{T}{\tau}$$

Итак, *<u>логарифмический декремент затухания</u>* λ **есть физическая величина, обратная числу колебаний, по истечении которых амплитуда *А* уменьшается в *е* раз.**

__При большом коэффициенте затухания__ происходит не только быстрое уменьшение амплитуды, но и заметно увеличивается период колебаний. Когда сопротивление становится равным критическому $r = r_{кр}$, а $\beta = \omega_0$, то круговая частота обращается в нуль ($\omega = 0$), а ($T \to \infty$), колебания прекращаются. Такой процесс называется *__апериодическим__* .

При колебаниях тело, возвращающееся в положение равновесия, *имеет запас кинетической энергии*. В случае *апериодического движения* энергия тела при возвращении в положение равновесия оказывается израсходованной на преодоление сил сопротивления, трения.

Для характеристики колебательной системы употребляется величина, называемая *<u>добротностью</u>*.

$$Q = \frac{\pi}{\lambda} = \pi N = \frac{\pi}{\beta T} = \frac{\omega_0}{2\beta}$$

Добротность пропорциональна количеству колебаний, совершенных системой за время, за которое амплитуда уменьшается в *e* раз (то есть за время релаксации).

Пружинный маятник

$$\omega = \sqrt{(\omega_0^2 - \frac{r^2}{4m^2})} \qquad Q = \sqrt{\frac{km}{r}}$$

Колебательный контур

$$\omega = \sqrt{(\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2})} \qquad Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$$

При малых затуханиях можно считать, что энергия в колебательной системе изменяется по закону

$$E = E_0 e^{-2\beta T}$$ **где** $$E_0 = \frac{1}{2} k A^2$$

- значение энергии в начальный момент времени. Продифференцируем это выражение по времени:

$$\frac{dE}{dt} = -2\beta E_0 e^{-2\beta t} = -2\beta E$$

Скорость убывания энергии со временем

$$\left(-\frac{dE}{dt}\right) = 2\beta E = -\Delta E$$

Если за период энергия мало изменяется, то при умножении этого выражения на *T* можно найти убыль энергии за период и выразить добротность через энергию.

$$\frac{E}{(-\Delta E)} = 2\beta T E = 2\lambda E = \frac{Q}{2\pi}$$

При слабом затухании колебаний добротность с точностью до множителя 2π равна отношению энергии, запасенной в системе в данный момент к убыли этой энергии за один период колебаний.

Контрольные вопросы

1. Формулы амплитуды и начальной фазы результирующего колебания при сложении одинаково направленных колебаний.
2. Общая формула траектории взаимно перпендикулярных колебаний.
3. Дифференциальное уравнение затухающих колебаний и его решение.
4. Логарифмический декремент затухания.
5. Определение добротности и формулы для пружинного маятника и колебательного контура