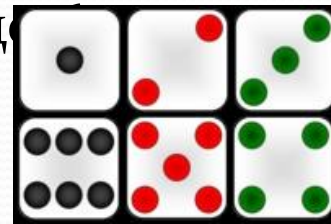


Случайные величины и их характеристики

Понятие случайной величины

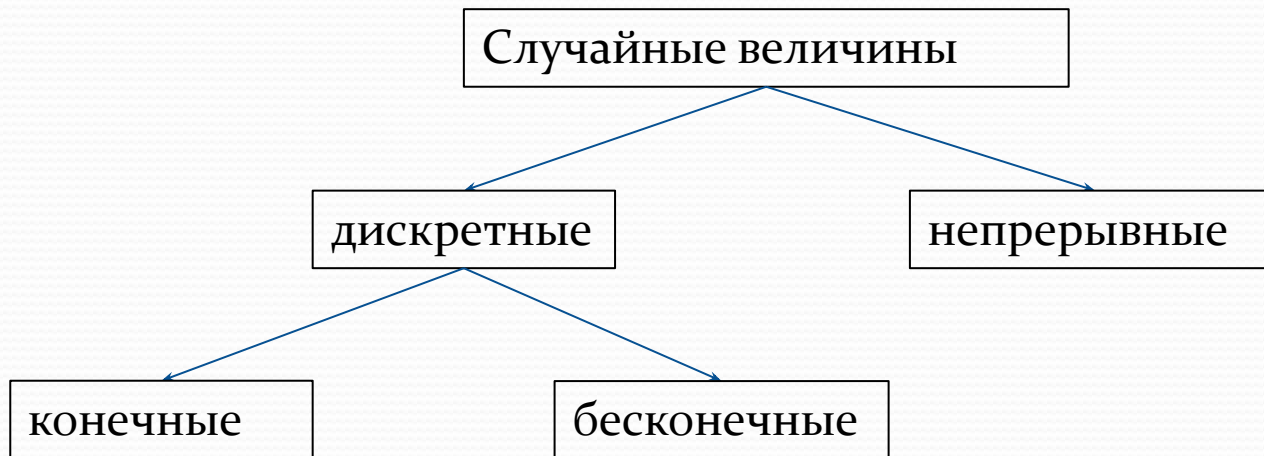
- Во многих задачах теории вероятности удобнее оперировать не понятием *случайного события*, для которого существуют только две возможности: оно может произойти или не произойти в результате опыта, а понятием так называемой случайной величины.
- *Величина* называется *случайной*, если при проведенном испытании может принимать различные значения, причем заранее не известно, какие именно.
 - Например, при подбрасывании игрального кубика может выпасть любая грань с числом точек от 1 до 6



Классификация случайных величин

- Если возможный диапазон значений случайной величины представляет собой конечное или счетное множество, она называется ***дискретной случайной величиной***.
 - Например, количество выпавших очков при подбрасывании игральной кости.
- Если эти значения заполняют целиком некоторый интервал — ***непрерывной случайной величиной***.
 - Например, время прихода студента на лекцию.

Классификация случайных величин



Количество выпавших очков при подбрасывании игрального кубика.

Количество бросков игрального кубика при подбрасывании его до выпадения «шестерки».

Способы задания

- Если случайная величина X **дискретна**, то она определяется своими значениями x_1, x_2, \dots и их вероятностями p_1, p_2, \dots
- Если случайная величина **непрерывна**, то эта величина X определяется областью своих значений и функцией распределения $F(x)$, выражающей вероятность того, что X принимает какое-либо значение (безразлично какое именно), меньшее, чем x , т. е. $F(x) = P(X < x)$. Производная этой функции $F'(x)$ называется функцией плотности вероятности или дифференциальной функцией распределения и обозначается $f(x)$.

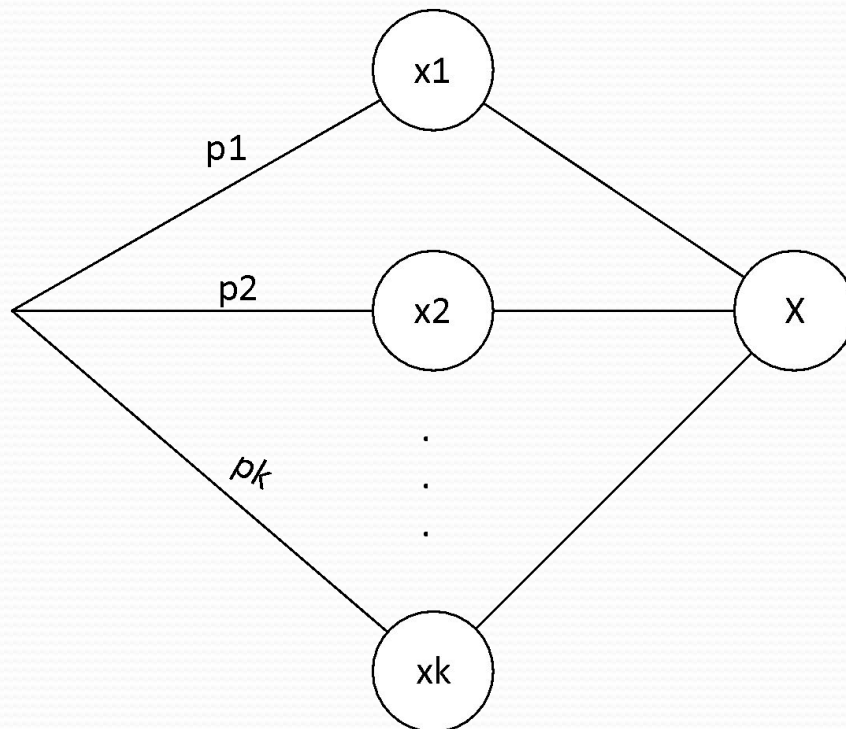
Дискретная случайная величина Способы задания

Закон распределения

X	x1	x2	...	xk
P	p1	p2	...	pk

$$\sum p_i = 1$$

Граф распределения:



Основные характеристики случайных величин

Характеристики положения

- Математическое ожидание
- Мода
- Медиана

Характеристики рассеивания

- Дисперсия
- Среднее квадратическое отклонение

Математическое ожидание

- Математическое ожидание – это ожидаемый выигрыш игрока (историческое).
- Математическое ожидание – это среднее значение случайной величины с учетом вероятностей.

$$M[X] = \sum x_i p_i$$

Свойства математического ожидания:

1. Математическое ожидание от константы равно константе $M[C] = C$
2. $M[CX] = C \cdot M[X]$
3. $M[X \pm Y] = M[X] \pm M[Y]$
4. ~~$M[XY] \neq M[X] \cdot M[Y]$~~ —

Характеристики положения

- Мода – это такое значение случайной величины, для которого вероятность максимальна

$$M_{\text{ли}} = x_t, \quad t = \max$$

- Медиана – это такое значение случайной величины, для которого процесс почти равновозможно закончится до него и после него, т. е.

$$M_{\text{ли}} = x_t, \quad \begin{cases} \sum_{i=1}^t p_i \geq \frac{1}{2} \\ \sum_{i=t}^k p_i \geq \frac{1}{2} \end{cases}$$

Дисперсия

- Характеристикой, показывающей масштаб отклонения случайной величины от математического ожидания, является дисперсия — математическое ожидание квадрата отклонения от среднего:

$$D[X] = M \left[(X - M[X])^2 \right] = \sum (x_i - M[X])^2 p_i$$

Свойства дисперсии:

1. Дисперсия от константы равна нулю: $D[C] = 0$
2. $D[CX] = C^2 \cdot D[X]$
3. $D[X \pm Y] = D[X] + D[Y]$
4. $D[X] = M[X^2] - M[X]^2$

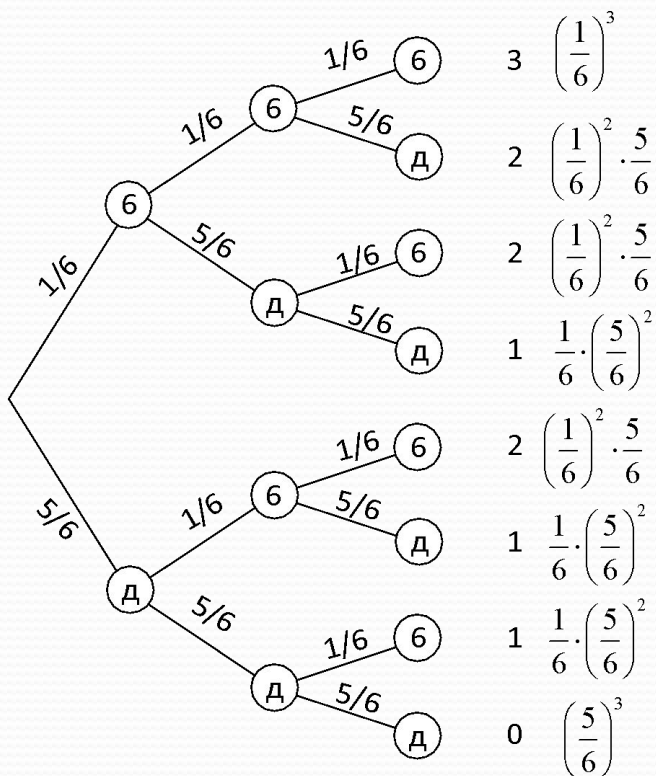
Среднее квадратическое отклонение

- Среднее квадратическое отклонение показывает величину самого отклонения случайной величины от математического ожидания и вычисляется как

$$\sigma = +\sqrt{D[X]}$$

Пример

- Игральная кость подбрасывается три раза. Случайная величина $X = \{\text{количество выпавших шестерок}\}$. Построить закон распределения этой случайной величины и найти все характеристики.



X	0	1	2	3
P	$\left(\frac{5}{6}\right)^3$	$3 \cdot \frac{1}{6} \left(\frac{5}{6}\right)^2$	$3 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \frac{5}{6}$	$\left(\frac{1}{6}\right)^3$

Характеристики положения

X	0	1	2	3
P	$\left(\frac{5}{6}\right)^3 = \frac{125}{216}$	$3 \cdot \frac{1}{6} \left(\frac{5}{6}\right)^2 = \frac{75}{216}$	$3 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \frac{5}{6} = \frac{15}{216}$	$\left(\frac{1}{6}\right)^3 = \frac{1}{216}$

$$M[X] = 0 \cdot \frac{125}{216} + 1 \cdot \frac{75}{216} + 2 \cdot \frac{15}{216} + 3 \cdot \frac{1}{216} = \frac{75 + 30 + 3}{216} = \frac{108}{216} = \frac{1}{2}$$

$$M_K = 0, \quad p. \max (i) = \frac{125}{216}$$

$$M_K = 0, \quad \dots \begin{cases} \frac{125}{216} \geq \frac{1}{2} \\ \frac{125}{216} + \frac{75}{216} + \frac{15}{216} + \frac{1}{216} = 1 \geq \frac{1}{2} \end{cases}$$

Характеристики рассеивания

X	0	1	2	3
P	$\left(\frac{5}{6}\right)^3 = \frac{125}{216}$	$3 \cdot \frac{1}{6} \left(\frac{5}{6}\right)^2 = \frac{75}{216}$	$3 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \frac{5}{6} = \frac{15}{216}$	$\left(\frac{1}{6}\right)^3 = \frac{1}{216}$

Первый способ: $D[X] = \sum (x_i - M[X]) \cdot p_i$

$$D[X] = \left(0 - \frac{1}{2}\right)^2 \cdot \frac{125}{216} + \left(1 - \frac{1}{2}\right)^2 \cdot \frac{75}{216} + \left(2 - \frac{1}{2}\right)^2 \cdot \frac{15}{216} + \left(3 - \frac{1}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{216} =$$

$$= \frac{1 \cdot 125 + 1 \cdot 75 + 9 \cdot 15 + 25 \cdot 1}{216 \cdot 4} = \frac{125 + 75 + 135 + 25}{216 \cdot 4} = \frac{360}{216 \cdot 4} = \frac{36 \cdot 10}{36 \cdot 6 \cdot 4} = \frac{5}{12}$$

Второй способ: $D[X] = M[X^2] - M[X]^2$

$$M[X] = 0^2 \cdot \frac{125}{216} + 1^2 \cdot \frac{75}{216} + 2^2 \cdot \frac{15}{216} + 3^2 \cdot \frac{1}{216} = \frac{75 + 4 \cdot 15 + 9 \cdot 1}{216} = \frac{144}{216} = \frac{36 \cdot 4}{36 \cdot 6} = \frac{2}{3}$$

$$D[X] = \frac{2}{3} - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{8 - 3}{12} = \frac{5}{12}$$

$$\sigma[X] = +\sqrt{D[X]} = +\sqrt{\frac{5}{12}} \approx 0.65$$