Модуль 1

- *Основные понятия и методы теории информатики и кодирования.*
- *Сигналы, данные, информация.*
- *Общая характеристика процессов сбора, передачи, обработки и накопления информации*

Лекция 3. Логические основы ЭВМ

Содержание:

Связь между алгеброй логики и двоичным кодированием.

Математический аппарат алгебры логики удобен для описания функционирования аппаратных средств компьютера, поскольку основной системой счисления в компьютере является двоичная, в которой используются цифры 1 и 0, значений логических переменных тоже : “1” и “0”

Историческая справка

1666 год - немецкий ученый Лейбниц попытался перевести законы мышления (формальную логику) из словесных форм, полных неопределенностей, в математику, где отношения между объектами или высказываниями определяются в виде математических соотношений.

В 1847 год- Буль написал статью на тему «Математический анализ логики»

В 1854 году Буль развил свои идеи в работе «Исследование законов мышления»

Понятие высказывания

Простое высказывание **–некоторое повествовательное предложение, которое может быть либо истинно, либо ложно, но не то и другое одновременно**

Обозначается маленькими латинскими буквами ***a, b, c, …***

Высказывания, **получаемые из простых с помощью грамматических связок «и», «или», «не», «тогда и только тогда», «либо…либо…», «если …то…» называются** ***составными*** **или** **формулами**

Обозначаются большими латинскими буквами ***A, B, C, …***

Тождественная истина и тождественная ложь

Формула *A*, всегда истинная, называется тождественно истинной формулой или тавтологией, *A*=1

Формула *B*, всегда ложная, называется тождественно ложной формулой, *B*=0

Рассматривая высказывания, мы абстрагируемся от их смысла, нас интересует их истинность или ложность

Операции над высказываниями

- *Дизъюнкция V*
- *Конъюнкция &*
- *Отрицание □a*
- *Импликация →*
- *Эквивалентность ⇔*
- *Жегалкинское сложение ⊕*

Значение каждой логической операции описывается таблицей истинности

Дизъюнкция a V b (логическое сложение)

Запись читается «а дизъюнкция б»

Дизъюнкция двух слагаемых ложна тогда и только тогда, когда ложны оба слагаемых

Соответствует союзу «ИЛИ»

a	b	a V b
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Конъюнкция a&b (логическое умножение)

Запись читается «а конъюнкция б»

Конъюнкция двух сомножителей ложна тогда и только тогда, когда ложны хотя бы один из них

Соответствует союзу «И»

a	b	a & b
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Отрицание $\bar{a}$ (инверсия ┐)

Запись читается «не а»

Отрицание лжи есть истина, отрицание истины есть ложь

а	¬ а
0	1
1	0

Соответствует частице «НЕ»

Импликация $a \rightarrow b$

Запись читается «а импликация б» или «из а следует б»

Из лжи следует все, что угодно, а из истины только истина

Соответствует «если а, то б»

a	b	$a \rightarrow b$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Эквивалентность a ⇔ b

Запись читается «а эквивалентно б»

Эквивалентность истинна тогда и только тогда, когда значение обеих переменных совпадают

Соответствует «тогда и только тогда»

a	b	a ⇔ b
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Жегалкинское сложение $a \oplus b$

Запись читается «а жегалкинское сложение б»

Жегалкинское сложение истинно тогда и только тогда, когда значения переменных различны

Соответствует союзу «ИЛИ,ИЛИ», «ЛИБО»

a	b	$a \oplus b$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Алгебры для работы с высказываниями

Используются две алгебры для работы над высказываниями

1
- **Алгебра высказываний**

2
- **Алгебра логики**

Алгебра высказываний

Операции дизъюнкция, конъюнкция, отрицание, импликация и эквивалентность составляют сигнатуру алгебры высказываний

$$A = < \{0,\ 1\}, \vee, \&, \text{-}, \rightarrow, \Leftrightarrow >$$

Алгебра Буля (алгебра логики)

Алгебраическая система, содержащая в качестве сигнатуры логическое умножение, логическое сложение и отрицание, которые позволяет производить тождественные преобразования логических выражений, и множество {0, 1} в качестве носителя, называется *алгебройБуля (алгеброй логики)*

$$Аб = <\{0, 1\} \cdot ,+, ->$$

Логические функции

В алгебре высказываний и алгебре логики используются только *логические переменные*, которые принимают значения либо 0 (*ложь*), либо 1 (*истина*)

Функции, которые определены на этих переменных и принимают значения 0 или 1, также называются *логическими*, или *булевыми*

Порядок выполнения логических операций

Инверсия - $\neg$

Конъюнкция - & или $\wedge$

Дизъюнкция – $\vee$

Импликация – $\rightarrow$

Эквивалентность - $\leftrightarrow$

Для изменения порядка выполнения логических операций используются круглые скобки.

Например: $D = \neg (A \vee B \wedge C)$

Построение таблицы сложного выражения

Пример построения таблицы истинности для сложного (составного) логического выражения:

$D = \neg A \wedge (B \vee C)$

Необходимо спланировать таблицу, то есть установить число строк и столбцов таблицы

При определении числа строк необходимо перебрать все возможные сочетания логических значений 0 и 1 исходных выражений A, B и C, из которых формируется заданное сложное логическое выражение

При добавлении третьего аргумента записываются первые 4 строки таблицы, сочетания с значением третьего аргумента равным 0 , а затем записываются эти же 4 строки, но с значением третьего аргумента, равным 1

Для трех аргументов в таблице оказывается 8 строк

Таблица истинности сложного выражения

A	B	C	┐A	B ˅ C	┐A ˄ (B ˅ C)
0	0	0	1	0	0
0	0	1	1	1	1
0	1	0	1	1	1
0	1	1	1	1	1
1	0	0	0	0	0
1	0	1	0	1	0
1	1	0	0	1	0
1	1	1	0	1	0

Таблица истинности сложного выражения

Построить таблицу истинности для формулы

F(x1, x2, x3) = (x1 → x2)→□x3

x1 x2 x3	x1→x2	□x3	(x1→x2)→□x3)
0 0 0	1	1	1
0 0 1	1	0	0
0 1 0	1	1	1
0 1 1	1	0	0
1 0 0	0	1	1
1 0 1	0	0	1
1 1 0	1	1	1
1 1 1	1	0	0

Таблица истинности сложного выражения

Дана функция f(x, y, z) = ¬ (X=>¬Y) => Z
Построить ее таблицу истинности

X Y Z	X => ¬Y	¬ (X => ¬Y)	¬ (X=>¬Y) => Z
0 0 0	1	0	1
0 0 1	1	0	1
0 1 0	1	0	1
0 1 1	1	0	1
1 0 0	1	0	1
1 0 1	1	0	1
1 1 0	0	1	0
1 1 1	0	1	1

Основные законы логики

- **Закон идемпотентности:** $A \wedge A = A$; $A \vee A = A$
- **Двойное отрицание (инволюция):** $\neg(\neg A) = A$
- **Закон исключения третьего**: $A \vee \neg A = 1$ **(всегда истина)**
- **Закон противоречия:** $A \wedge \neg A = 0$ **(всегда ложь)**
- **Закон коммутативности:**

$A \vee B = B \vee A$; $A \wedge B = B \wedge A$

Основные законы логики (продолжение)

- **Дистрибутивность (распределение):**
  - **Умножения относительно сложения:**

    $(A \vee B) \wedge C = (A \wedge C) \vee (B \wedge C)$

    и наоборот:

    $(A \wedge B) \vee (B \wedge C) = B \wedge (A \vee C)$

  - **Сложения относительно умножения:**
  - $A \vee B \wedge C = (A \vee B) \wedge (A \vee C)$

Основные законы логики (продолжение)

- **Законы де Моргана:**

  $\neg(A \wedge B) = \neg A \vee \neg B$

  $\neg (A \vee B) = \neg A \wedge \neg B$

- **Законы работы с константами 0 и 1:**

  $A \vee 1 = 1$ $\quad$ $0 \vee 1 = 1$

  $A \wedge 1 = A$ $\quad$ $0 \wedge 1 = 0$

  $A \wedge 0 = 0$

  $B \wedge 1 = B$

Законы де Моргана

$\neg(A \wedge B) = \neg A \vee \neg B$

A	B	$\neg(A \wedge B)$	$\neg A \vee \neg B$
0	0	1	1
0	1	1	1
1	0	1	1
1	1	0	0

$\neg (A \vee B) = \neg A \wedge \neg B$

A	B	$\neg (A \vee B)$	$\neg A \wedge \neg B$
0	0	1	1
0	1	0	0
1	0	0	0
1	1	0	0

Формализация логических высказываний

Союзы и частицы естественного языка	Операции алгебры высказываний	Примеры
а и б	$a \& b$	Сегодня ветрено и идет дождь
а или б	$a \vee b$	Сегодня ясная погода, или сегодня идет дождь
а либо б	$a \oplus b$	Сегодня ветрено, либо идет дождь
не а	$\overline{a}$	Неверно, что сегодня идет дождь Сегодня пасмурно Сегодня безветренно Сегодня нет дождя
либо а, либо б	$a \oplus b$	Либо сегодня идет дождь, либо ясная погода
или а, или б	$a \oplus b$	Или сегодня ветрено, или дождливо

Формализация логических высказываний

а тогда и только тогда, когда б	$a \Leftrightarrow b$	Ветрено бывает тогда и только тогда, когда идет дождь
а достаточное условие для б	$a \rightarrow b$	Сегодняшний ветер - достаточное условие для сегодняшнего дождя
если а, то б	$a \rightarrow b$	Если сегодня ветер, то сегодня пойдет дождя
а необходимое условие б	$b \rightarrow a$	Сегодняшний ветер - необходимое условие для сегодняшнего дождя
а когда б	$b \rightarrow a$	Дождь идет когда дует ветер

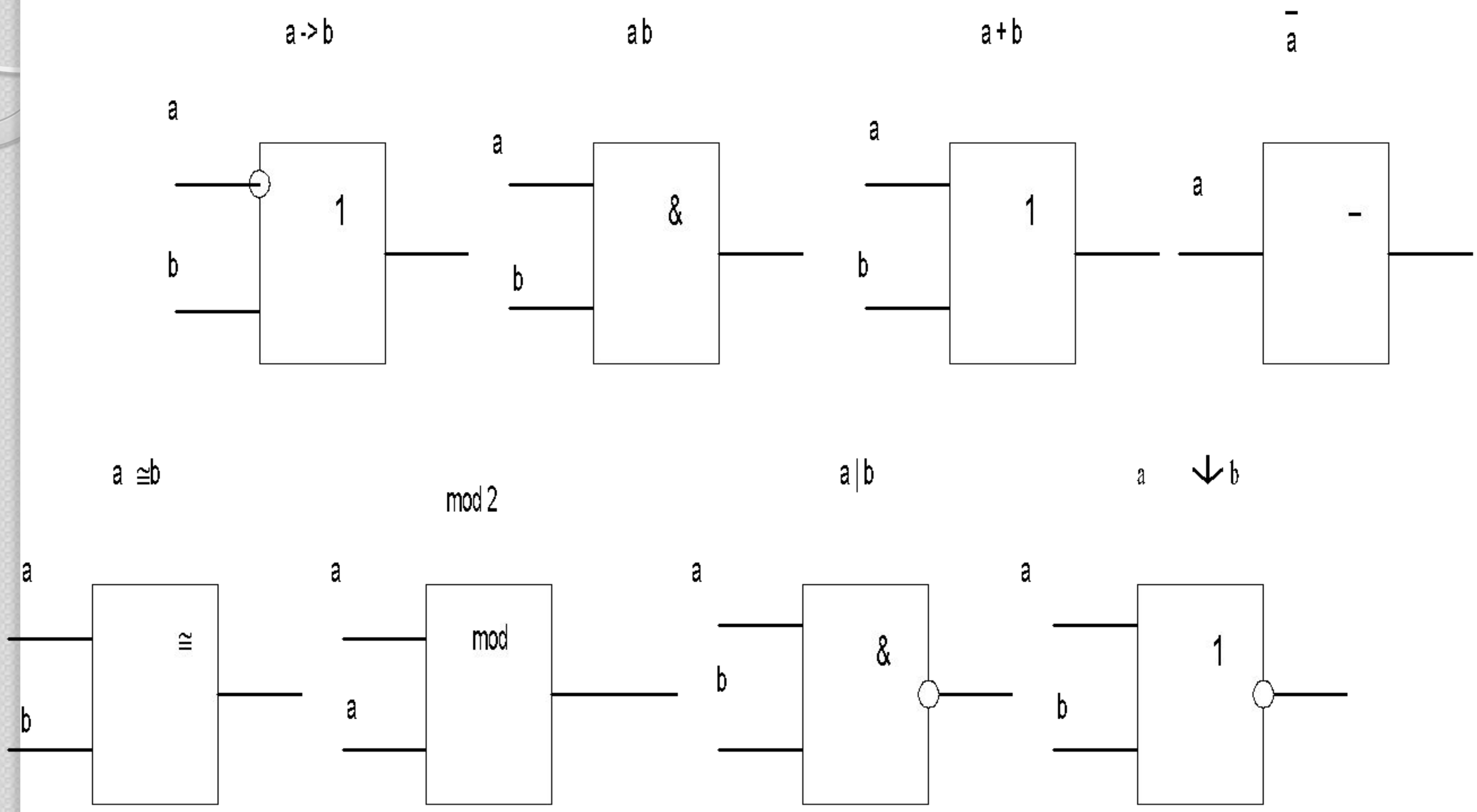
Алгоритм формализации высказываний

1. выделить из составного высказывания простые высказывания и обозначить их латинскими буквами
2. построить дерево синтаксического разбора, в котором каждой вершине соответствует логическая связка (операция), а концевым вершинам – простые высказывания
3. записать логическую формулу путем обхода дерева с учетом структуры дерева и старшинства логических операций

Представление логических функциональных элементов

- единицей 1, если он реализует логическое сложение
- знаком конъюнкции «&», если реализует логическое умножение
- М2, если соответствует сложению по модулю два (жегалкинскому сложению)
- «≡», если реализует функцию эквивалентности

Представление элементов



Метод построения логических схем

- Построим таблицу истинности для рассматриваемой функции
- Построим совершенную ДНФ (т.е. логическую сумму наборов, на которых функция задана как истинная)
- Упростим СовДНФ с помощью законов алгебры логики
- Приведем функцию к виду, удобному для реализации в заданном базисе
- Проведем анализ функции и построим схему из функциональных элементов

Пример 1

Построить схему для функции f(x1, x2, x3, x4), истинной на наборах 1, 3, 5, 10 и 14 на функциональных элементах И - НЕ

СДНФ =

$$\overline{x_1}\,\overline{x_2}\,\overline{x_3}\,x_4+\overline{x_1}\,\overline{x_2}\,x_3\,x_4+\overline{x_1}\,x_2\,\overline{x_3}\,x_4+$$

$$+x_1\,\overline{x_2}\,x_3\,\overline{x_4}+x_1\,x_2\,x_3\,\overline{x_4}$$

Пример 1

МДНФ = □x1□x2 x4 + □x1□x3 x4 +

x1 x3□x4 = □x1 x4(□x2 + □x3) +

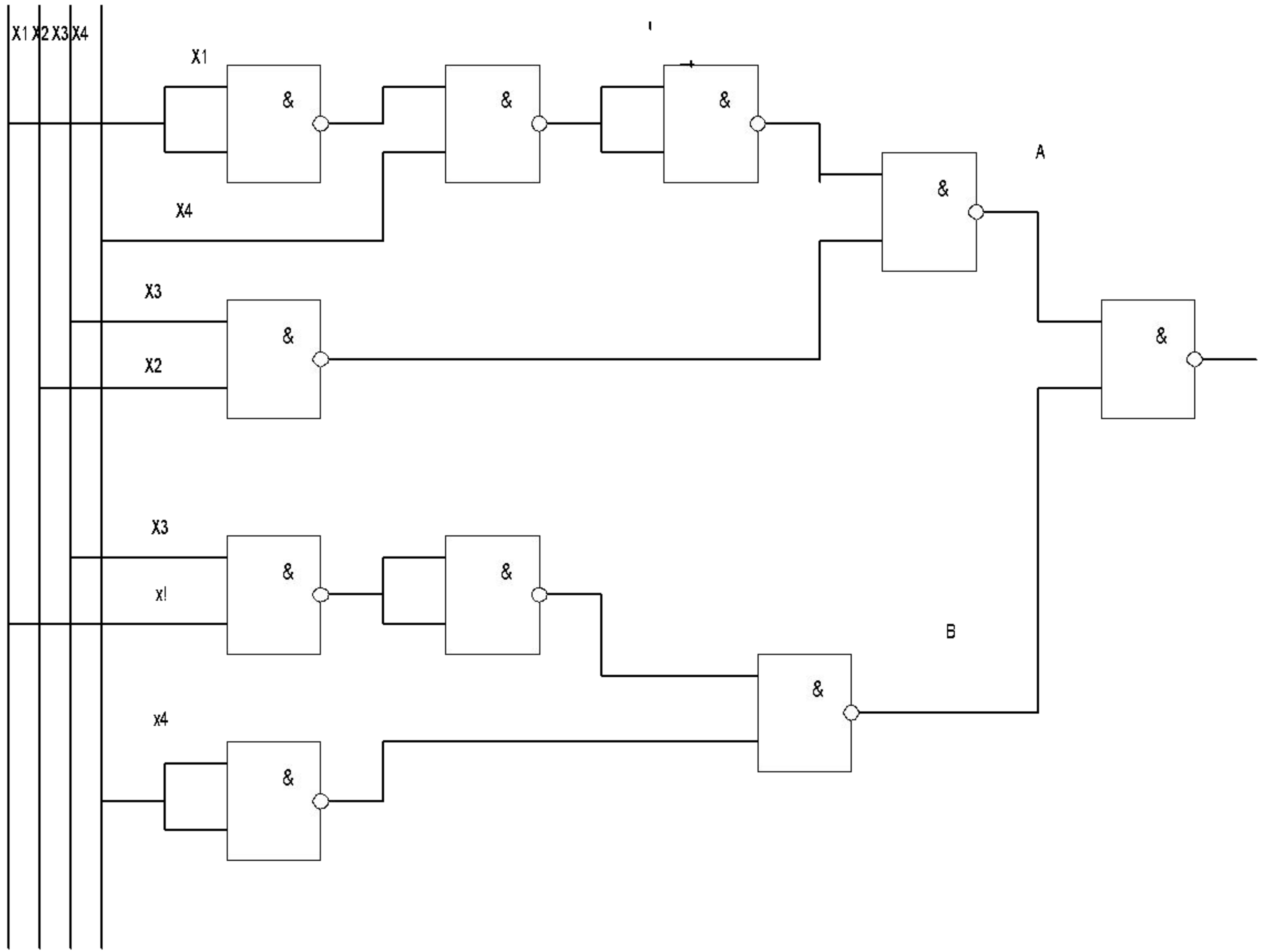
x1 x3□x4 =

$$= \overline{\left(x1+\overline{x4}+\overline{\overline{\left(\overline{x2}+\overline{x3}\right)}}\right)} + \overline{\left(\underline{\underline{\overline{x1}+\overline{x3}}}+x4\right)} = \overline{A}+\overline{B}$$

$$A = x1+\overline{x4}+\overline{\left(\overline{x2}+\overline{x3}\right)} = x1+\overline{x4}+\overline{\left(\overline{x2}+\overline{x3}\right)}` = \overline{\left(x1+\overline{x4}\right)}\,\Big|\left(\overline{x2}+\overline{x3}\right) =$$

$$= \overline{\left(\underline{\underline{(x1+\overline{x4})}}\,\Big|\,\underline{\underline{(x1+\overline{x4})}}\right)}\Big|\left(x2\,|\,x3\right) = \Big(\big((x1|x1)|x4\big)\big|\ \big((x1|x1)|x4\big)\Big)\Big|\left(\overline{x2}+\overline{x3}\right)$$

$$B = \underline{\underline{x1\,|\,x3}}+\underline{\underline{x4}} = \left(\overline{x1\,|\,x3}\right)\Big|\left(\overline{x4}\right) = \Big(\left(x1|x3\right)|\left(x1|x3\right)\Big)\Big|\left(x4\,|\,x4\right)$$


X1 X2 X3 X4
X1
&
&
&
X4
&
A
X3
&
X2
&
X3
&
&
x!
B
&
x4
&

Выводы:

Математический аппарат алгебры логики в которой используются значения логических переменных 1 и 0 удобен для описания функционирования аппаратных средств компьютера так как основной системой счисления в компьютере является двоичная

Логические утверждения (логические константы) - это конкретные частные утверждения, заведомо истинные или ложные

Для логических операций существуют таблицы истинности

Выполнение логических операций регламентируется аксиомами и теоремами