Модуль 1

- *Основные понятия и методы теории информатики и кодирования.*
- *Сигналы, данные, информация.*
- *Общая характеристика процессов сбора, передачи, обработки и накопления информации*

Лекция 3. Логические основы ЭВМ

Содержание:

Связь между алгеброй логики и двоичным кодированием

Логические высказывания

Операции над высказываниями

Алгебра высказываний

Алгебра логики

Основные законы логики

Связь между алгеброй логики и двоичным кодированием.

Математический аппарат алгебры логики удобен для описания функционирования аппаратных средств компьютера, поскольку основной системой счисления в компьютере является двоичная, в которой используются цифры 1 и 0, значений логических переменных тоже : “1” и “0”

Историческая справка

1666 год - немецкий ученый Лейбниц попытался перевести законы мышления (формальную логику) из словесных форм, полных неопределенностей, в математику, где отношения между объектами или высказываниями определяются в виде математических соотношений.

В 1847 год- Буль написал статью на тему «Математический анализ логики»

В 1854 году Буль развил свои идеи в работе «Исследование законов мышления»

Понятие высказывания

Простое высказывание **–некоторое повествовательное предложение, которое может быть либо истинно, либо ложно, но не то и другое одновременно**

Обозначается маленькими латинскими буквами ***a, b, c, …***

Высказывания, **получаемые из простых с помощью грамматических связок «и», «или», «не», «тогда и только тогда», «либо…либо…», «если …то…» называются** ***составными*** **или формулами**

Обозначаются большими латинскими буквами ***A, B, C, …***

Тождественная истина и тождественная ложь

Формула *A*, всегда истинная, называется тождественно истинной формулой или тавтологией, *A*=1

Формула *B*, всегда ложная, называется тождественно ложной формулой, *B*=0

Рассматривая высказывания, мы абстрагируемся от их смысла, нас интересует их истинность или ложность

Операции над высказываниями

- ***Дизъюнкция V***
- ***Конъюнкция &***
- ***Отрицание □a***
- ***Импликация →***
- ***Эквивалентность ⇔***
- ***Жегалкинское сложение ⊕***

Значение каждой логической операции описывается таблицей истинности

Дизъюнкция a V b (логическое сложение)

Запись читается «а дизъюнкция б»

Дизъюнкция двух слагаемых ложна тогда и только тогда, когда ложны оба слагаемых

Соответствует союзу «ИЛИ»

a	b	a V b
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Конъюнкция a&b (логическое умножение)

Запись читается «а конъюнкция б»

Конъюнкция двух сомножителей ложна тогда и только тогда, когда ложны хотя бы один из них

Соответствует союзу «И»

a	b	a & b
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Отрицание $\bar{a}$ (инверсия ¬)

Запись читается «не а»

a	□ a
0	1
1	0

Отрицание лжи есть истина, отрицание истины есть ложь

Соответствует частице «НЕ»

Импликация a→ b

Запись читается «а импликация б» или «из а следует б»

Из лжи следует все, что угодно, а из истины только истина

Соответствует «если а, то б»

a	b	a → b
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Эквивалентность a ⇔ b

Запись читается «а эквивалентно б»

Эквивалентность истинна тогда и только тогда, когда значение обеих переменных совпадают

Соответствует «тогда и только тогда»

a	b	a ⇔ b
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Жегалкинское сложение a ⊕ b

Запись читается «а жегалкинское сложение б»

Жегалкинское сложение истинно тогда и только тогда, когда значения переменных различны

Соответствует союзу «ИЛИ,ИЛИ», «ЛИБО»

a	b	a ⊕ b
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Алгебры для работы с высказываниями

Используются две алгебры для работы над высказываниями

1. • **Алгебра высказываний**
2. • **Алгебра логики**

Алгебра высказываний

Операции дизъюнкция, конъюнкция, отрицание, импликация и эквивалентность составляют сигнатуру алгебры высказываний

$$A = <\{0,\ 1\}, \vee, \&, -, \rightarrow, \Leftrightarrow>$$

Алгебра Буля (алгебра логики)

Алгебраическая система, содержащая в качестве сигнатуры логическое умножение, логическое сложение и отрицание, которые позволяет производить тождественные преобразования логических выражений, и множество {0, 1} в качестве носителя, называется *алгеброй Буля (алгеброй логики)*

$$Аб = \langle \{0, 1\} \cdot, +, - \rangle$$

Логические функции

В алгебре высказываний и алгебре логики используются только *логические переменные*, которые принимают значения либо 0 (*ложь*), либо 1 (*истина*)

Функции, которые определены на этих переменных и принимают значения 0 или 1, также называются *логическими*, или *булевыми*

Порядок выполнения логических операций

Инверсия - ¬

Конъюнкция - & или ∧

Дизъюнкция – ∨

Импликация – →

Эквивалентность - ↔

Для изменения порядка выполнения логических операций используются круглые скобки.

Например: D = ¬ (A ∨ B ∧ C)

Построение таблицы сложного выражения

Пример построения таблицы истинности для сложного (составного) логического выражения:
$D = \neg A \wedge (B \vee C)$

Необходимо спланировать таблицу, то есть установить число строк и столбцов таблицы

При определении числа строк необходимо перебрать все возможные сочетания логических значений 0 и 1 исходных выражений A, B и C, из которых формируется заданное сложное логическое выражение

При добавлении третьего аргумента записываются первые 4 строки таблицы, сочетания с значением третьего аргумента равным 0 , а затем записываются эти же 4 строки, но с значением третьего аргумента, равным 1

Для трех аргументов в таблице оказывается 8 строк

Таблица истинности сложного выражения

A	B	C	¬ A	B ∨ C	¬ A ∧ (B ∨ C)
0	0	0	1	0	0
0	0	1	1	1	1
0	1	0	1	1	1
0	1	1	1	1	1
1	0	0	0	0	0
1	0	1	0	1	0
1	1	0	0	1	0
1	1	1	0	1	0

Таблица истинности сложного выражения

Построить таблицу истинности для формулы

F(x1, x2, x3) = (x1 → x2)→□x3

x1 x2 x3	x1→x2	□x3	(x1→x2)→□x3)
0 0 0	1	1	1
0 0 1	1	0	0
0 1 0	1	1	1
0 1 1	1	0	0
1 0 0	0	1	1
1 0 1	0	0	1
1 1 0	1	1	1
1 1 1	1	0	0

Таблица истинности сложного выражения

Дана функция f(x, y, z) = ¬ (X=>¬Y) => Z
Построить ее таблицу истинности

X Y Z	X => ¬Y	¬ (X => ¬Y)	¬ (X=>¬Y) => Z
0 0 0	1	0	1
0 0 1	1	0	1
0 1 0	1	0	1
0 1 1	1	0	1
1 0 0	1	0	1
1 0 1	1	0	1
1 1 0	0	1	0
1 1 1	0	1	1

Основные законы логики

- **Закон идемпотентности:** $A \wedge A = A$; $A \vee A = A$
- **Двойное отрицание (инволюция):** $\neg(\neg A) = A$
- **Закон исключения третьего**: $A \vee \neg A = 1$ **(всегда истина)**
- **Закон противоречия:** $A \wedge \neg A = 0$ **(всегда ложь)**
- **Закон коммутативности:**

$A \vee B = B \vee A$; $A \wedge B = B \wedge A$

Основные законы логики (продолжение)

- **Дистрибутивность (распределение):**
  - **Умножения относительно сложения:**

$$(A \vee B) \wedge C = (A \wedge C) \vee (B \wedge C)$$

и наоборот:

$$(A \wedge B) \vee (B \wedge C) = B \wedge (A \vee C)$$

  - **Сложения относительно умножения:**
  - $A \vee B \wedge C = (A \vee B) \wedge (A \vee C)$

Основные законы логики (продолжение)

- **Законы де Моргана:**

  $\neg(A \wedge B) = \neg A \vee \neg B$

  $\neg(A \vee B) = \neg A \wedge \neg B$

- **Законы работы с константами 0 и I:**

  $A \vee I = I \qquad 0 \vee I = I$

  $A \wedge I = A \qquad 0 \wedge I = 0$

  $A \wedge 0 = 0$

  $B \wedge I = B$

Законы де Моргана

$\neg(A \wedge B) = \neg A \vee \neg B$

A	B	$\neg(A \wedge B)$	$\neg A \vee \neg B$
0	0	1	1
0	1	1	1
1	0	1	1
1	1	0	0

$\neg(A \vee B) = \neg A \wedge \neg B$

A	B	$\neg(A \vee B)$	$\neg A \wedge \neg B$
0	0	1	1
0	1	0	0
1	0	0	0
1	1	0	0

Формализация логических высказываний

Союзы и частицы естественного языка	*Операции алгебры высказываний*	*Примеры*
а и б	$a \& b$	Сегодня ветрено и идет дождь
а или б	$a \vee b$	Сегодня ясная погода, или сегодня идет дождь
а либо б	$a \oplus b$	Сегодня ветрено, либо идет дождь
не а	$\overline{a}$	Неверно, что сегодня идет дождь Сегодня пасмурно Сегодня безветренно Сегодня нет дождя
либо а, либо б	$a \oplus b$	Либо сегодня идет дождь, либо ясная погода
или а, или б	$a \oplus b$	Или сегодня ветрено, или дождливо

Формализация логических высказываний

а тогда и только тогда, когда б	$a \Leftrightarrow b$	Ветрено бывает тогда и только тогда, когда идет дождь
а достаточное условие для б	$a \rightarrow b$	Сегодняшний ветер - достаточное условие для сегодняшнего дождя
если а, то б	$a \rightarrow b$	Если сегодня ветер, то сегодня пойдет дождя
а необходимое условие б	$b \rightarrow a$	Сегодняшний ветер - необходимое условие для сегодняшнего дождя
а когда б	$b \rightarrow a$	Дождь идет когда дует ветер

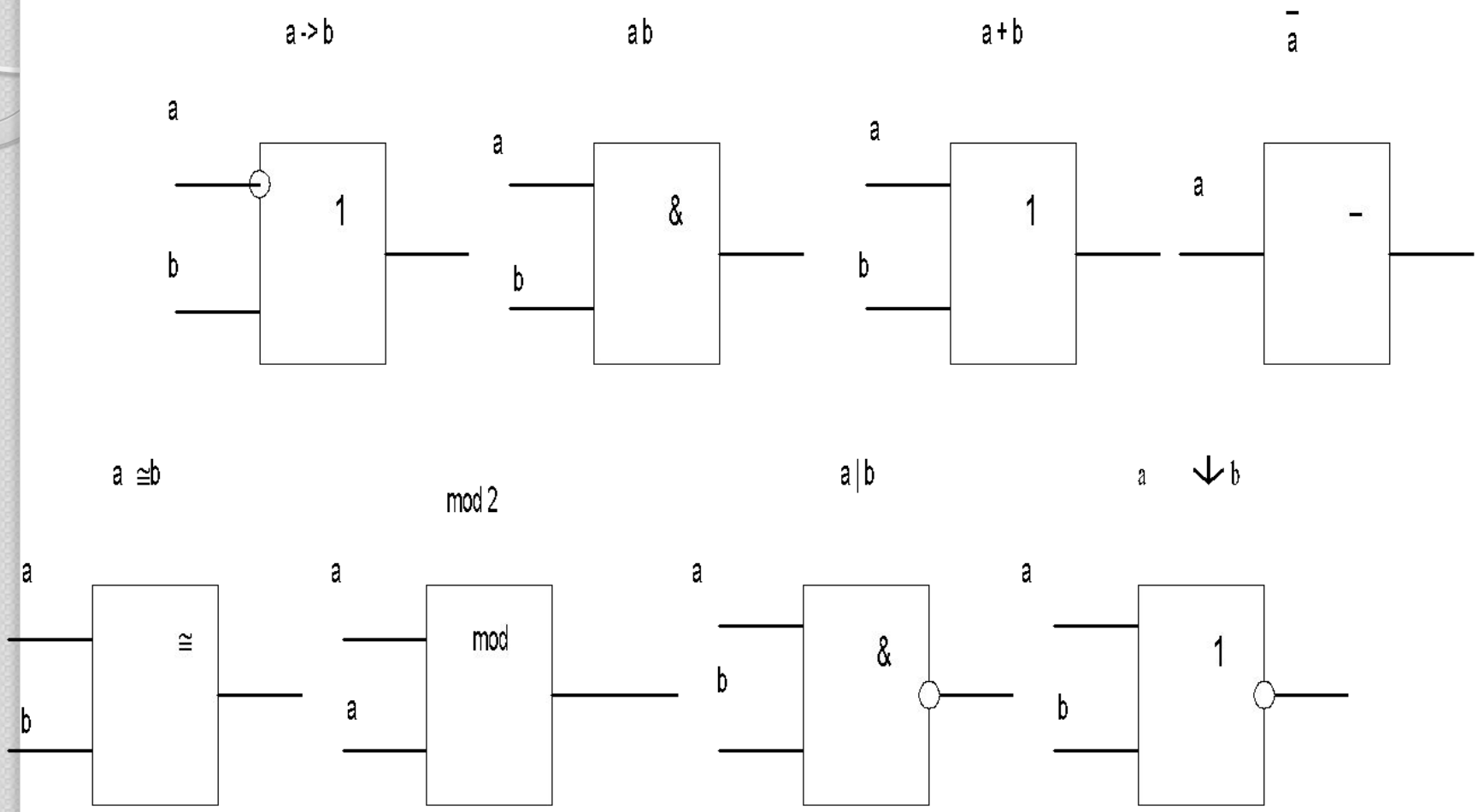
Алгоритм формализации высказываний

1. выделить из составного высказывания простые высказывания и обозначить их латинскими буквами
2. построить дерево синтаксического разбора, в котором каждой вершине соответствует логическая связка (операция), а концевым вершинам – простые высказывания
3. записать логическую формулу путем обхода дерева с учетом структуры дерева и старшинства логических операций

Представление логических функциональных элементов

- единицей 1, если он реализует логическое сложение
- знаком конъюнкции «&», если реализует логическое умножение
- М2, если соответствует сложению по модулю два (жегалкинскому сложению)
- «≡», если реализует функцию эквивалентности

Представление элементов



Метод построения логических схем

- Построим таблицу истинности для рассматриваемой функции
- Построим совершенную ДНФ (т.е. логическую сумму наборов, на которых функция задана как истинная)
- Упростим СовДНФ с помощью законов алгебры логики
- Приведем функцию к виду, удобному для реализации в заданном базисе
- Проведем анализ функции и построим схему из функциональных элементов

Пример I

Построить схему для функции f(x1, x2, x3, x4), истинной на наборах 1, 3, 5, 10 и 14 на функциональных элементах И - НЕ

СДНФ =

$$\overline{x_1}\,\overline{x_2}\,\overline{x_3}\,x_4 + \overline{x_1}\,\overline{x_2}\,x_3\,x_4 + \overline{x_1}\,x_2\,\overline{x_3}\,x_4 +$$

$$+ x_1\,\overline{x_2}\,x_3\,\overline{x_4} + x_1\,x_2\,x_3\,\overline{x_4}$$

Пример I

МДНФ = □x1□x2 x4 + □x1□x3 x4 +

x1 x3□x4 = □x1 x4(□x2 + □x3) +

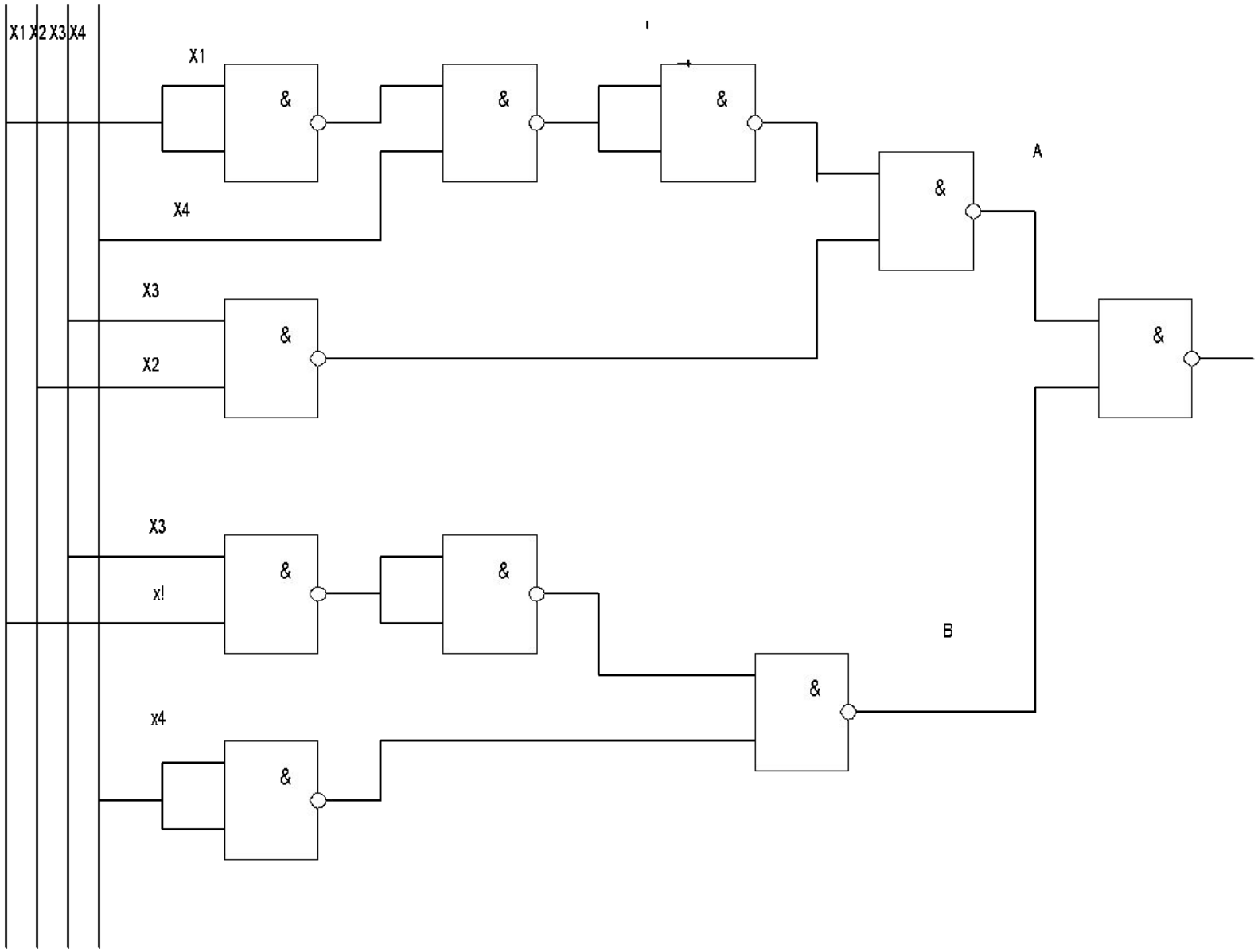
x1 x3□x4 =

$$= \overline{(x1 + \overline{x4} + \overline{(\overline{x2} + \overline{x3})})} + \overline{(\overline{x1} + \overline{x3} + x4)} = \overline{A} + \overline{B}$$

$$A = x1 + \overline{x4} + \overline{(\overline{x2} + \overline{x3})} = x1 + \overline{x4} + \overline{(\overline{x2} + \overline{x3})}` = \overline{(x1 + \overline{x4})} \,|\, \overline{(\overline{x2} + \overline{x3})} =$$

$$= \left(\overline{(x1 + \overline{x4})} \,|\, \overline{(x1 + \overline{x4})}\right) \,|\, (x2 \,|\, x3) = \left(\left(\left((x1 \,|\, x1) \,|\, x4\right) \,|\, \left((x1 \,|\, x1) \,|\, x4\right)\right)\right) \,|\, \overline{(\overline{x2} + \overline{x3})}$$

$$B = \overline{x1 \,|\, x3} + x4 = \left(\overline{x1 \,|\, x3}\right) \,|\, \left(\overline{x4}\right) = \left((x1 \,|\, x3) \,|\, (x1 \,|\, x3)\right) \,|\, \left(x4 \,|\, x4\right)$$


X1 X2 X3 X4
X1
X4
X3
X2
X3
x!
x4
A
B
&

Выводы:

Математический аппарат алгебры логики в которой используются значения логических переменных 1 и 0 удобен для описания функционирования аппаратных средств компьютера так как основной системой счисления в компьютере является двоичная

Логические утверждения (логические константы) - это конкретные частные утверждения, заведомо истинные или ложные

Для логических операций существуют таблицы истинности

Выполнение логических операций регламентируется аксиомами и теоремами