

● Модуль 1

- *Основные понятия и методы теории информатики и кодирования.*
- *Сигналы, данные, информация.*
- *Общая характеристика процессов сбора, передачи, обработки и накопления информации*

Лекция 3. Логические основы ЭВМ



Содержание:

Связь между алгеброй логики и двоичным кодированием

Логические высказывания

Операции над высказываниями

Алгебра высказываний

Алгебра логики

Основные законы логики

Связь между алгеброй логики и двоичным кодированием.

Математический аппарат алгебры логики удобен для описания функционирования аппаратных средств компьютера, поскольку основной системой счисления в компьютере является двоичная, в которой используются цифры 1 и 0, значений логических переменных тоже : “1” и “0”

Историческая справка

1666 год - немецкий ученый Лейбниц попытался перевести законы мышления (формальную логику) из словесных форм, полных неопределенностей, в математику, где отношения между объектами или высказываниями определяются в виде математических соотношений.

В 1847 год- Буль написал статью на тему «Математический анализ логики»

В 1854 году Буль развил свои идеи в работе «Исследование законов мышления»



Понятие высказывания

Простое высказывание – некоторое повествовательное предложение, которое может быть либо истинно, либо ложно, но не то и другое одновременно

Обозначается маленькими латинскими буквами *a, b, c, ...*

Высказывания, получаемые из простых с помощью грамматических связок «и», «или», «не», «тогда и только тогда», «либо...либо...», «если ...то...» называются **составными** или **формулами**

Обозначаются большими латинскими буквами *A, B, C, ...*



Тождественная истина и тождественная ложь

Формула A , всегда истинная,
называется **тождественно истинной**
формулой или тавтологией, $A=1$

Формула B , всегда ложная,
называется **тождественно ложной**
формулой, $B=0$

*Рассматривая высказывания, мы
абстрагируемся от их смысла, нас
интересует их истинность или
ложность*



Операции над высказываниями

- **Дизъюнкция \vee**
- **Конъюнкция $\&$**
- **Отрицание $\square a$**
- **Импликация \rightarrow**
- **Эквивалентность \Leftrightarrow**
- **Жегалкинское сложение \oplus**

Значение каждой логической операции описывается таблицей истинности



Дизъюнкция $a \vee b$ (логическое сложение)

Запись читается «а дизъюнкция б»

Дизъюнкция двух слагаемых ложна тогда и только тогда, когда ложны оба слагаемых

Соответствует союзу «ИЛИ»

a	b	$a \vee b$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1



Конъюнкция $a \& b$ (логическое умножение)

Запись читается «а конъюнкция б»

Конъюнкция двух сомножителей ложна тогда и только тогда, когда ложны хотя бы один из них

Соответствует союзу «И»

a	b	a & b
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1



Отрицание \bar{a} (инверсия \neg)

Запись читается «не а»

*Отрицание лжи
есть истина,
отрицание
истины есть
ложь*

**Соответствует
частице «НЕ»**

a	\bar{a}
0	1
1	0



Импликация $a \rightarrow b$

Запись читается «а импликация б» или «из а следует б»

*Из лжи следует
все, что угодно,
а из истины
только истина*

**Соответствует
«если а, то б»**

a	b	$a \rightarrow b$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1



Эквивалентность $a \Leftrightarrow b$

Запись читается «а эквивалентно б»

Эквивалентность истинна тогда и только тогда, когда значение обеих переменных совпадают

Соответствует «тогда и только тогда»

a	b	$a \Leftrightarrow b$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1



Жегалкинское сложение $a \oplus b$

Запись читается «а жегалкинское сложение б»

Жегалкинское сложение истинно тогда и только тогда, когда значения переменных различны

Соответствует союзу «ИЛИ,ИЛИ», «ЛИБО»

a	b	$a \oplus b$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0



Алгебры для работы с высказываниями

Используются две алгебры для работы над высказываниями

1

- Алгебра высказываний

2

- Алгебра логики

Алгебра высказываний

Операции дизъюнкция,
конъюнкция, отрицание, импликация
и эквивалентность **составляют**
сигнатуру алгебры высказываний

$$A = \langle \{0, 1\}, \vee, \&, -, \rightarrow, \Leftrightarrow \rangle$$



Алгебра Буля (алгебра логики)

Алгебраическая система, содержащая в качестве сигнатуры логическое умножение, логическое сложение и отрицание, которые позволяют производить тождественные преобразования логических выражений, и множество $\{0, 1\}$ в качестве носителя, называется *алгеброй Буля (алгеброй логики)*

$$Ab = \langle \{0, 1\}, \cdot, +, - \rangle$$



Логические функции

В алгебре высказываний и алгебре логики используются только *логические переменные*, которые принимают значения либо 0 (*ложь*), либо 1 (*истина*)

Функции, которые определены на этих переменных и принимают значения 0 или 1, также называются *логическими*, или *булевыми*



Порядок выполнения логических операций

Инверсия - \neg

Конъюнкция - $\&$ или \wedge

Дизъюнкция - \vee

Импликация - \rightarrow

Эквивалентность - \leftrightarrow

Для изменения порядка выполнения логических операций используются круглые скобки.

Например: $D = \neg (A \vee B \wedge C)$

Построение таблицы сложного выражения

Пример построения таблицы истинности для сложного (составного) логического выражения:

$$D = \neg A \wedge (B \vee C)$$

Необходимо спланировать таблицу, то есть установить число строк и столбцов таблицы

При определении числа строк необходимо перебрать все возможные сочетания логических значений **0** и **1** исходных выражений **A**, **B** и **C**, из которых формируется заданное сложное логическое выражение

При добавлении третьего аргумента записываются первые 4 строки таблицы, сочетания с значением третьего аргумента равным **0**, а затем записываются эти же 4 строки, но с значением третьего аргумента, равным **1**

Для трех аргументов в таблице оказывается 8 строк

Таблица истинности сложного выражения

A	B	C	$\neg A$	$B \vee C$	$\neg A \wedge (B \vee C)$
0	0	0	1	0	0
0	0	1	1	1	1
0	1	0	1	1	1
0	1	1	1	1	1
1	0	0	0	0	0
1	0	1	0	1	0
1	1	0	0	1	0
1	1	1	0	1	0

Таблица истинности сложного выражения

Построить таблицу истинности для формулы

$$F(x_1, x_2, x_3) = (x_1 \rightarrow x_2) \rightarrow \neg x_3$$

x_1	x_2	x_3	$x_1 \rightarrow x_2$	$\neg x_3$	$(x_1 \rightarrow x_2) \rightarrow \neg x_3$
0	0	0	1	1	1
0	0	1	1	0	0
0	1	0	1	1	1
0	1	1	1	0	0
1	0	0	0	1	1
1	0	1	0	0	1
1	1	0	1	1	1
1	1	1	1	0	0



Таблица истинности сложного выражения

Дана функция $f(x, y, z) = \neg (X \Rightarrow \neg Y) \Rightarrow Z$
Построить ее таблицу истинности

X	Y	Z	$X \Rightarrow \neg Y$	$\neg (X \Rightarrow \neg Y)$	$\neg (X \Rightarrow \neg Y) \Rightarrow Z$
0	0	0	1	0	1
0	0	1	1	0	1
0	1	0	1	0	1
0	1	1	1	0	1
1	0	0	1	0	1
1	0	1	1	0	1
1	1	0	0	1	0
1	1	1	0	1	1



Основные законы логики

- **Закон идемпотентности:** $A \wedge A = A$; $A \vee A = A$
- **Двойное отрицание (инволюция):** $\neg(\neg A) = A$
- **Закон исключения третьего:** $A \vee \neg A = 1$
(всегда истина)
- **Закон противоречия:** $A \wedge \neg A = 0$ (всегда ложь)
- **Закон коммутативности:**

$$A \vee B = B \vee A;$$

$$A \wedge B =$$

$$B \wedge A$$



Основные законы логики (продолжение)

□ Дистрибутивность (распределение):

□ Умножения относительно сложения:

$$(A \vee B) \wedge C = (A \wedge C) \vee (B \wedge C)$$

и наоборот:

$$(A \wedge B) \vee (B \wedge C) = B \wedge (A \vee C)$$

□ Сложения относительно умножения:

$$\square A \vee B \wedge C = (A \vee B) \wedge (A \vee C)$$

Основные законы логики (продолжение)

□ Законы де Моргана:

$$\neg(A \wedge B) = \neg A \vee \neg B$$

$$\neg(A \vee B) = \neg A \wedge \neg B$$

□ Законы работы с константами 0 и 1:

$$A \vee 1 = 1 \quad 0 \vee 1 = 1$$

$$A \wedge 1 = A \quad 0 \wedge 1 = 0$$

$$A \wedge 0 = 0$$

$$B \wedge 1 = B$$

Законы де Моргана

$$\neg(A \wedge B) = \neg A \vee \neg B$$

A	B	$\neg(A \wedge B)$	$\neg A \vee \neg B$
0	0	1	1
0	1	1	1
1	0	1	1
1	1	0	0

$$\neg(A \vee B) = \neg A \wedge \neg B$$

A	B	$\neg(A \vee B)$	$\neg A \wedge \neg B$
0	0	1	1
0	1	0	0
1	0	0	0
1	1	0	0

Формализация логических высказываний

Союзы и частицы естественного языка	Операции алгебры высказываний	Примеры
а и б	$a \& b$	Сегодня ветрено и идет дождь
а или б	$a \vee b$	Сегодня ясная погода, или сегодня идет дождь
а либо б	$a \oplus b$	Сегодня ветрено, либо идет дождь
не а	$\neg a$	Неверно, что сегодня идет дождь Сегодня пасмурно Сегодня безветренно Сегодня нет дождя
либо а, либо б	$a \oplus b$	Либо сегодня идет дождь, либо ясная погода
или а, или б	$a \oplus b$	Или сегодня ветрено, или дождливо



Формализация логических высказываний

а тогда и только тогда, когда б	$a \Leftrightarrow b$	Ветрено бывает тогда и только тогда, когда идет дождь
а достаточное условие для б	$a \rightarrow b$	Сегодняшний ветер - достаточное условие для сегодняшнего дождя
если а, то б	$a \rightarrow b$	Если сегодня ветер, то сегодня пойдет дождя
а необходимое условие б	$b \rightarrow a$	Сегодняшний ветер - необходимое условие для сегодняшнего дождя
а когда б	$b \rightarrow a$	Дождь идет когда дует ветер



Алгоритм формализации высказываний

1. выделить из составного высказывания простые высказывания и обозначить их латинскими буквами
2. построить дерево синтаксического разбора, в котором каждой вершине соответствует логическая связка (операция), а концевым вершинам – простые высказывания
3. записать логическую формулу путем обхода дерева с учетом структуры дерева и старшинства логических операций



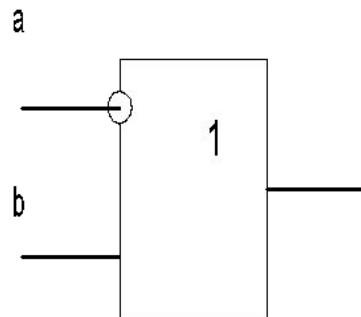
Представление логических функциональных элементов

- единицей **1**, если он реализует логическое сложение
- знаком конъюнкции «**&**», если реализует логическое умножение
- **M2**, если соответствует сложению по модулю два (жегалкинскому сложению)
- «**≡**», если реализует функцию эквивалентности

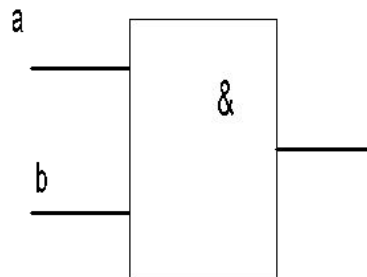


Представление элементов

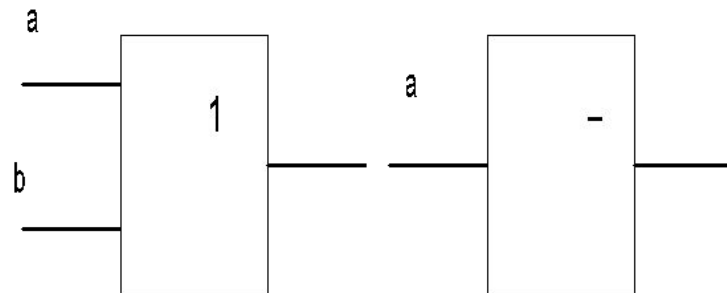
$a \rightarrow b$



ab

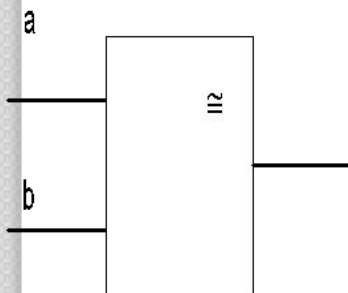


$a + b$

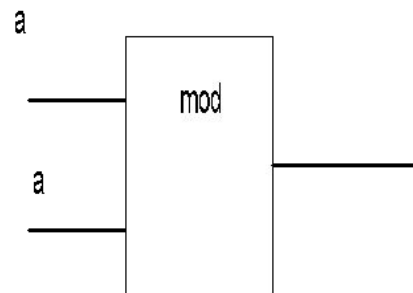


\bar{a}

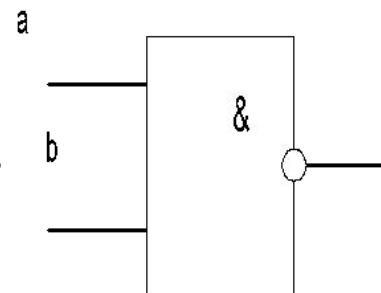
$a \cong b$



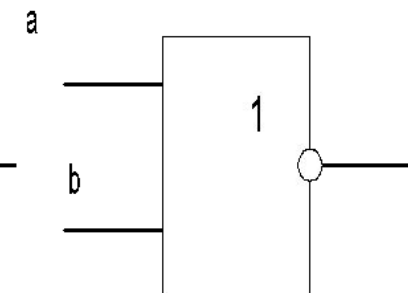
mod 2



$a | b$



$a \downarrow b$



Метод построения логических схем

- Построим таблицу истинности для рассматриваемой функции
- Построим совершенную ДНФ (т.е. логическую сумму наборов, на которых функция задана как истинная)
- Упростим СовДНФ с помощью законов алгебры логики
- Приведем функцию к виду, удобному для реализации в заданном базисе
- Проведем анализ функции и построим схему из функциональных элементов



Пример I

Построить схему для функции $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$, истинной на наборах 1, 3, 5, 10 и 14 на функциональных элементах И - НЕ

СДНФ =

$$\begin{aligned} & \overline{x_1} \overline{x_2} \overline{x_3} \overline{x_4} + \overline{x_1} \overline{x_2} x_3 x_4 + \overline{x_1} x_2 \overline{x_3} x_4 + \\ & + x_1 \overline{x_2} x_3 \overline{x_4} + x_1 x_2 x_3 \overline{x_4} \end{aligned}$$



Пример I

$$MДНФ = \overline{x_1} \overline{x_2} x_4 + \overline{x_1} \overline{x_3} x_4 +$$

$$x_1 x_3 \overline{x_4} = \overline{x_1} x_4 (\overline{x_2} + \overline{x_3}) +$$

$$x_1 x_3 \overline{x_4} =$$

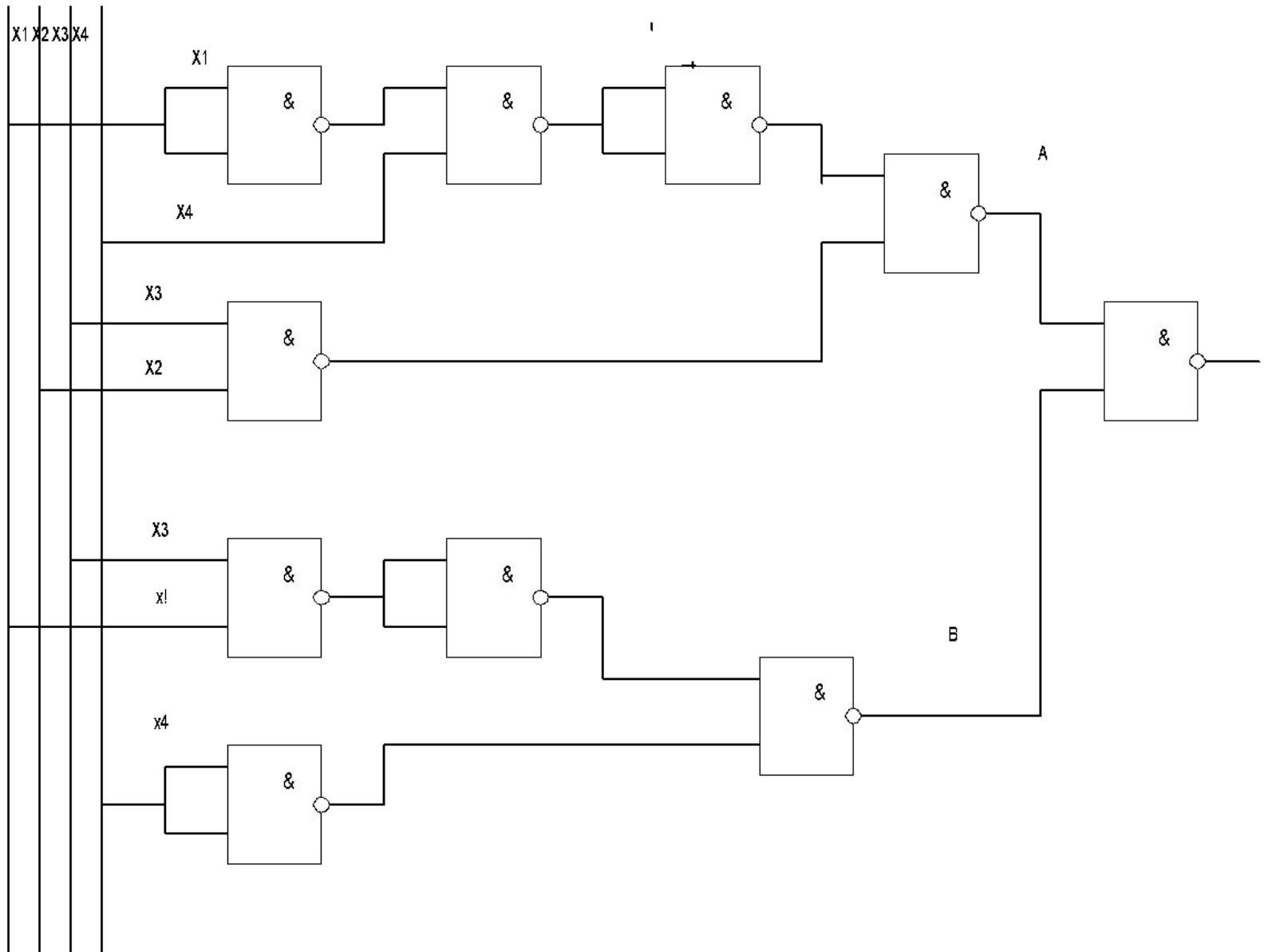
$$= \overline{\overline{x_1 + x_4 + (x_2 + x_3)}} + \overline{\overline{x_1 + x_3 + x_4}} = \overline{A} + \overline{B}$$

$$A = \overline{x_1 + x_4 + (x_2 + x_3)} = \overline{x_1 + x_4 + (x_2 + x_3)} = \overline{(x_1 + x_4) | (x_2 + x_3)} =$$

$$= \overline{\overline{\overline{(x_1 + x_4) | (x_1 + x_4)}} | \overline{\overline{\overline{x_2 | x_3}}}} = \overline{\overline{\overline{((x_1 | x_1) | x_4) | ((x_1 | x_1) | x_4)}} | \overline{\overline{\overline{x_2 + x_3}}}}$$

$$B = \overline{x_1 | x_3 + x_4} = \overline{\overline{\overline{x_1 | x_3}} | \overline{\overline{\overline{x_4}}}} = \overline{\overline{\overline{(x_1 | x_3) | (x_1 | x_3)}} | \overline{\overline{\overline{x_4 | x_4}}}}$$





Выводы:

Математический аппарат алгебры логики в которой используются значения логических переменных 1 и 0 удобен для описания функционирования аппаратных средств компьютера так как основной системой счисления в компьютере является двоичная

Логические утверждения (логические константы) - это конкретные частные утверждения, заведомо истинные или ложные

Для логических операций существуют таблицы истинности

Выполнение логических операций регламентируется аксиомами и теоремами

