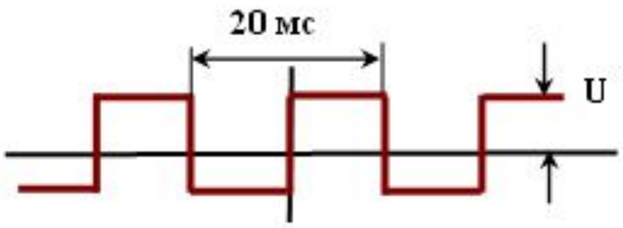
Спектры сигналов. Преобразование Фурье

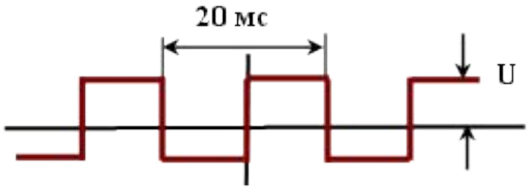
$s(t) = S \sin\omega t$ - Простейший периодический сигнал

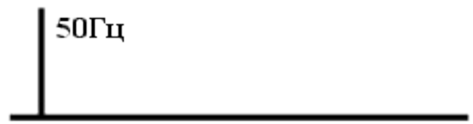


Другой пример периодического сигнала – последовательность прямоугольных импульсов

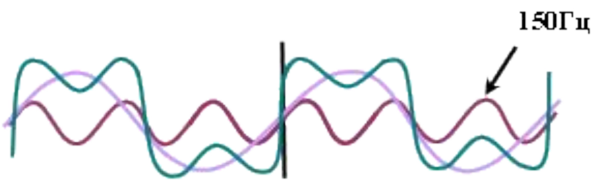
Каким образом последовательность прямоугольных импульсов можно представить через гармонические сигналы?

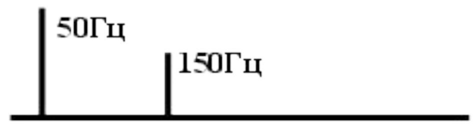
Суммирование гармоник



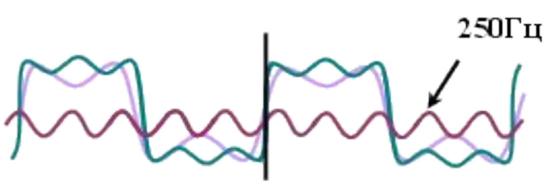


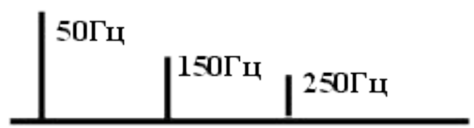
$$s(t) = S_1 \sin \omega_1 t$$



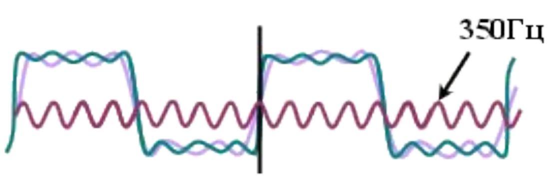


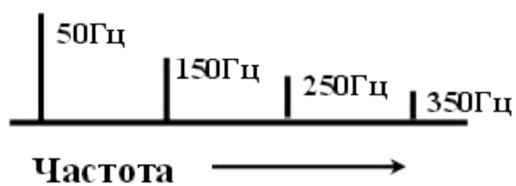
$$S_1 \sin\omega_1 t + \frac{S_1}{3} \sin 3\omega_1 t$$





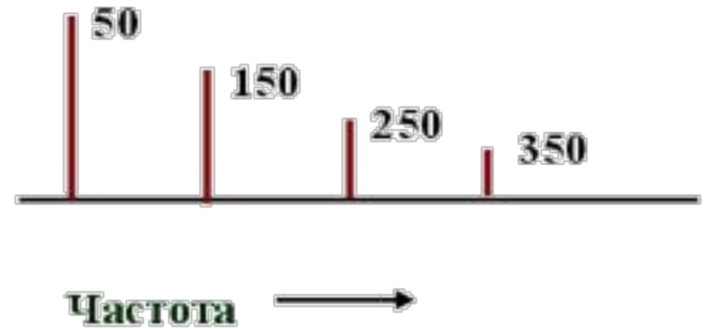
$$s(t) = S_1 \sin \omega_1 t + \frac{S_1}{3} \sin 3\omega_1 t + \frac{S_1}{5} \sin 5\omega_1 t$$





$$s(t) = S_1 \sin \omega_1 t + \frac{S_1}{3} \sin 3\omega_1 t + \frac{S_1}{5} \sin 5\omega_1 t + \frac{S_1}{7} \sin 7\omega_1 t + \frac{S_1}{9} \sin 9\omega_1 t + \frac{S_1}{11} \sin 11\omega_1 t + \ldots,$$

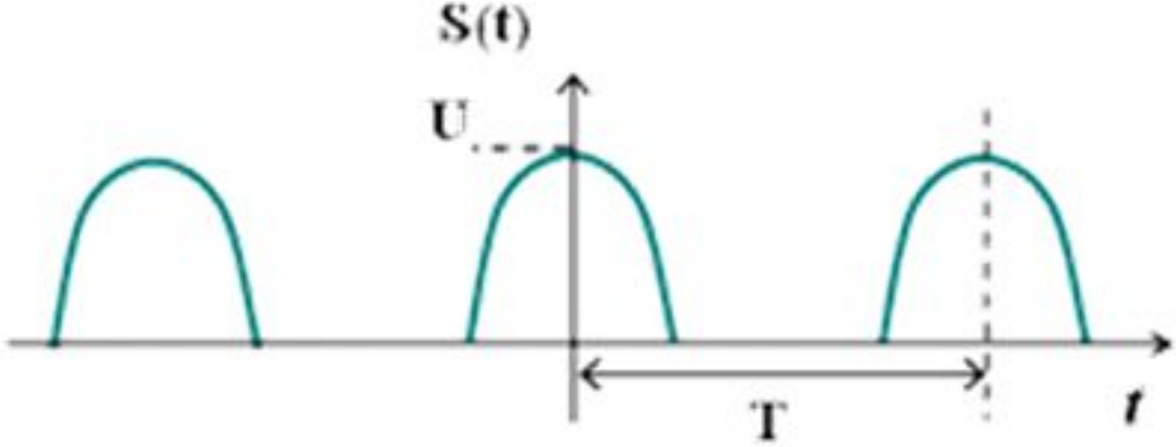
Сигнал треугольной формы



$$S(t) = S_1 \sin \omega_1 t - \frac{S_1}{9} \sin 3\omega_1 t + \frac{S_1}{25} \sin 5\omega_1 + \ldots$$

$$S_1 = \frac{8}{\pi^2} U = 0{,}81 U$$

Работа диода: однополупериодный выпрямитель

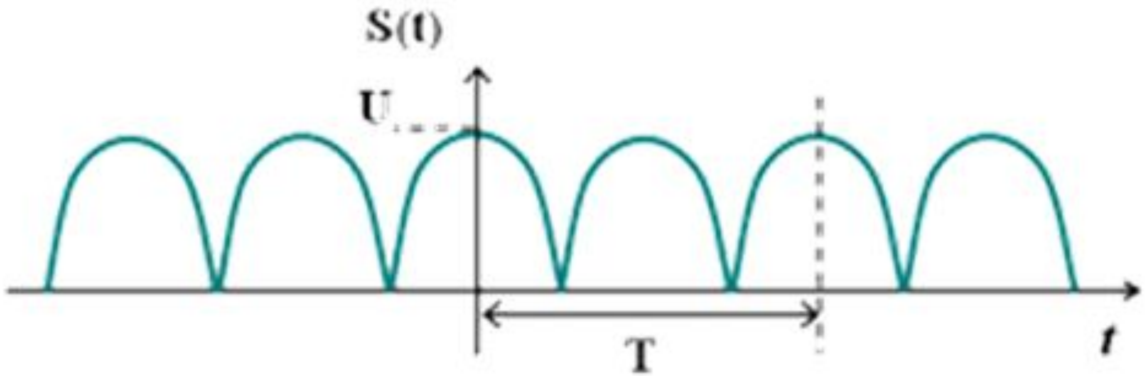


$$S(t) = C_0 + \frac{C_0}{4}\cos\omega_1 t + \frac{C_0}{3}\cos 2\omega_1 t - \frac{C_0}{15}\cos 4\omega_1 t + \frac{C_0}{35}\cos 6\omega_1 t + \ldots,$$

$$C_0 = \frac{2U}{\pi} = 0,64U$$

Разложение через косинусы

Диодный мостик: двухполупериодный выпрямитель



$$S(t) = C_0 + \frac{2C_0}{3}\cos 2\omega_1 t - \frac{2C_0}{15}\cos 4\omega_1 t + \frac{2C_0}{35}\cos 6\omega_1 t + \ldots$$

$$C_0 = \frac{2U}{\pi} = 0{,}64U$$

Многие сигналы состоят в общем случае как из синусоид, так и из косинусоид

$$s(t) = C_0 + S_1 \sin \omega_1 t + C_1 \cos \omega_1 t + S_2 \sin 2\omega_1 t +$$
$$+ C_2 \cos 2\omega_1 t + S_3 \sin 3\omega_1 t + C_3 \cos 3\omega_1 t + \ldots$$

Используем известное тригонометрическое соотношение

$$A \sin(\omega t + \varphi) = A \cos\varphi \sin \omega t + A \sin\varphi \cos \omega t = S \sin \omega t + C \cos \omega t,$$

$$C = A \sin\varphi$$
$$S = A \cos\varphi$$

Выражение показывает, что любой периодический сигнал состоит из гармоник.

$$S(t) = A_0 + A_1 \sin(\omega_1 + \varphi_1) + A_2 \sin(2\omega_1 t + \varphi_2) + A_3 \sin(3\omega_1 + \varphi_3) + \ldots =$$
$$= A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin(k\omega_1 + \varphi_k) \qquad A_0 = C_0$$

Теорема Фурье

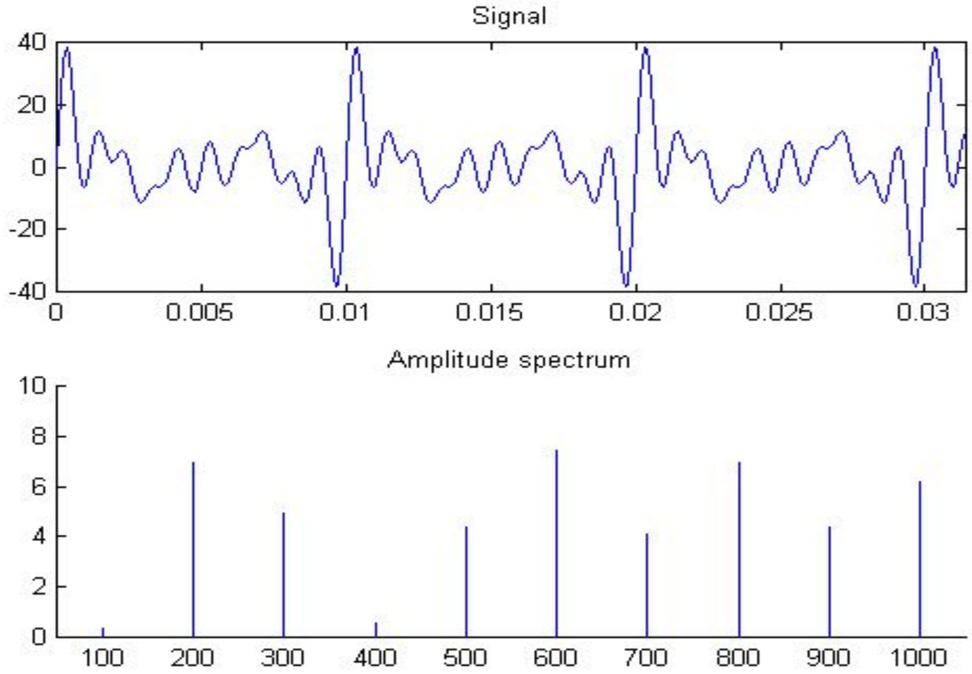
Всякое периодическое колебание частоты *F* можно получить в результате суммирования бесконечного числа гармоник с частотами *F, 2F, 3F, 4F, …,* и **специально подобранными** амплитудами и фазами

$$x(t) = A_0 + A_1 sin(2\pi Ft + \phi_1) + A_2 sin(2\pi 2Ft + \phi_2) + A_3 sin(2\pi 3Ft + \phi_3) + \ldots \text{ (и т.д.) ИЛИ}$$

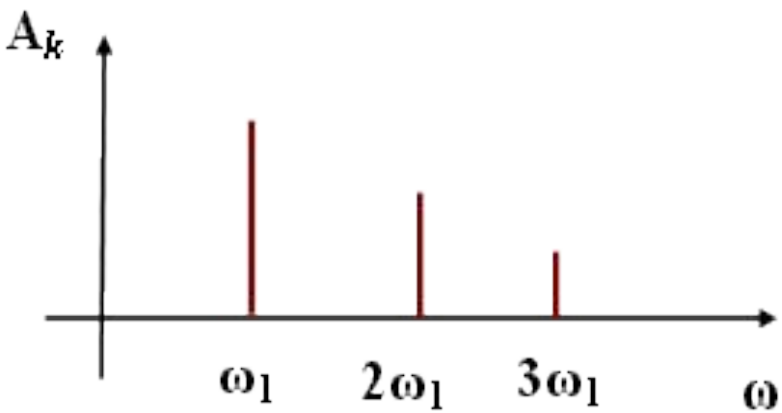
$$x(t) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin(2\pi kFt + \varphi_k)$$

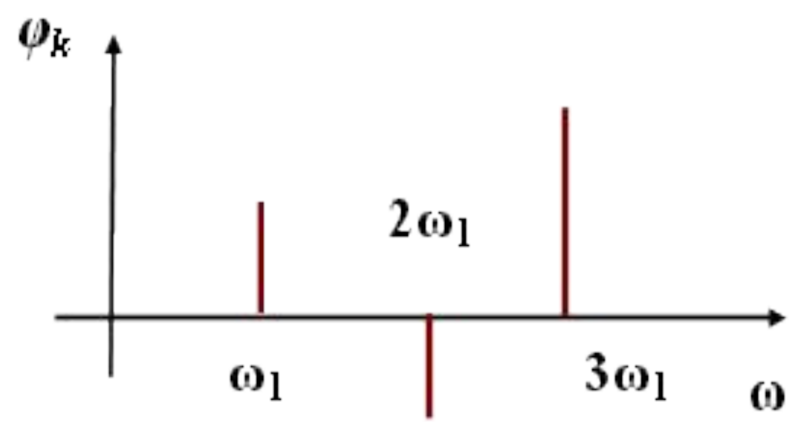
- Тот факт, что сигнал произвольной формы можно "разложить" на сумму обыкновенных синусоид, впервые доказал в 20-х годах прошлого века французский математик Ж. Фурье.

- Такой набор синусоид получил название *спектра* сигнала. Каждый сигнал (отличающийся от других по форме) имеет свой сугубо индивидуальный спектр, т.е. может быть получен только из синусоид со строго оп|



Спектр амплитуд и спектр фаз

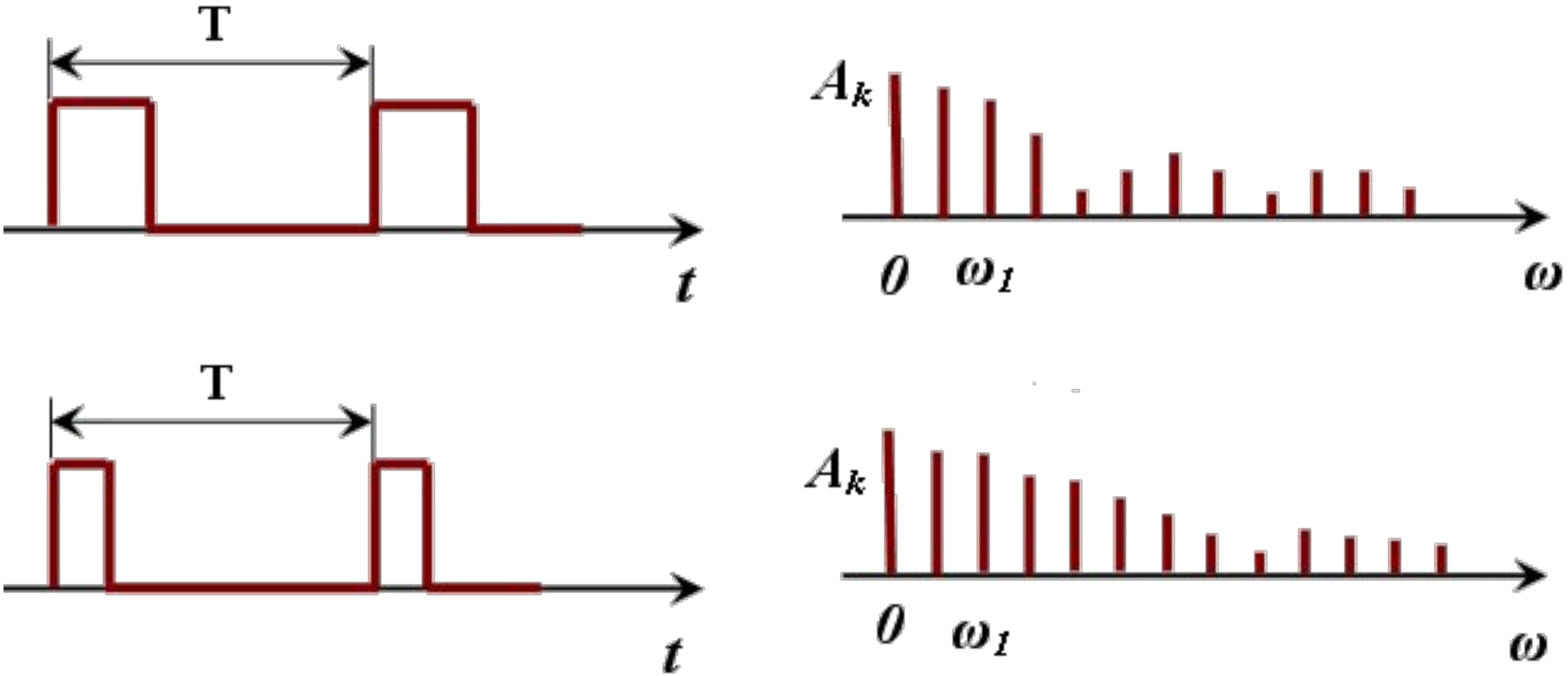




$$\omega_1 = \frac{2\pi}{T}$$

- Основная гармоника

Ширина спектра

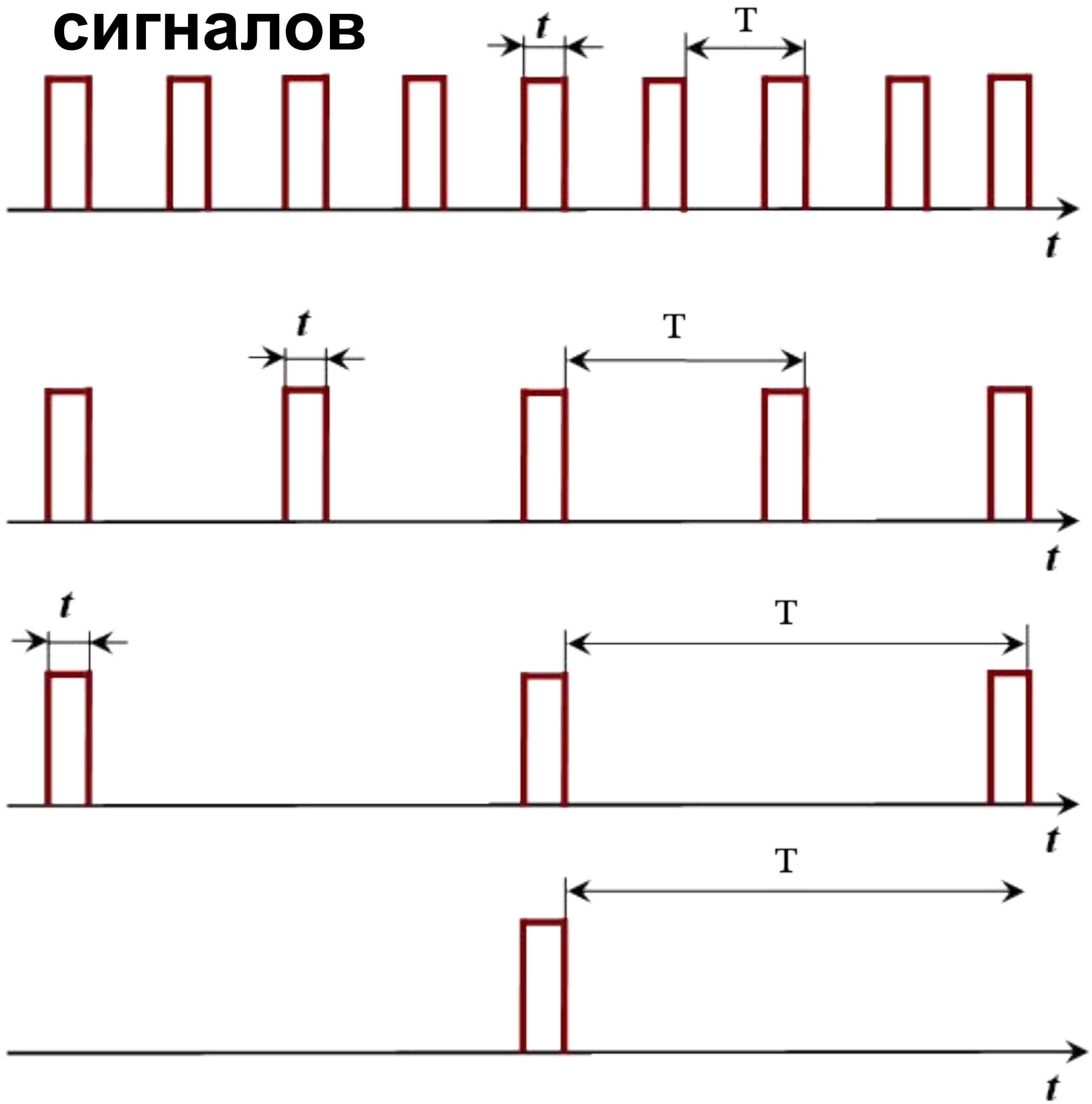


Изменение спектра амплитуд при уменьшении длительности импульсов

чем круче фронт сигнала, чем короче импульсы и чем больше пауза между импульсами, тем шире во всех этих случаях спектр сигнала, т.е. тем медленнее убывают амплитуды гармоник с ростом их номера.

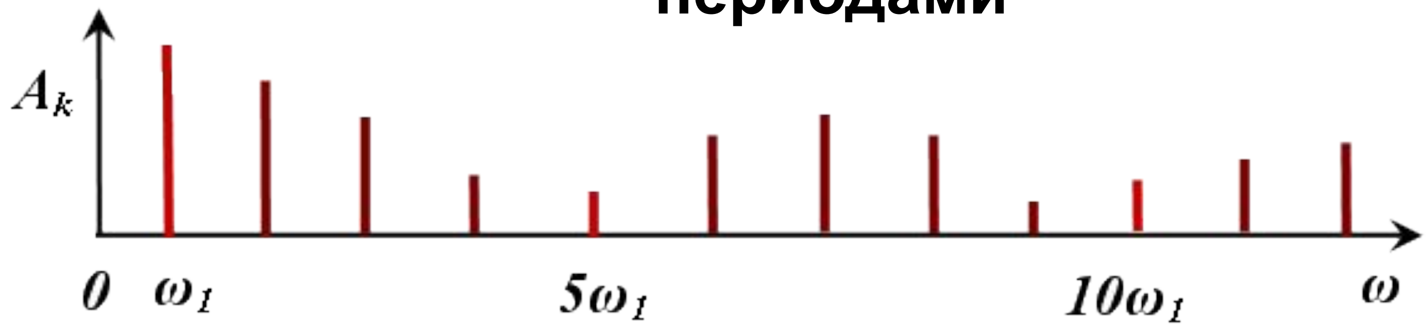
ширина полосы пропускания устройства не должна быть уже ширины спектра сигнала

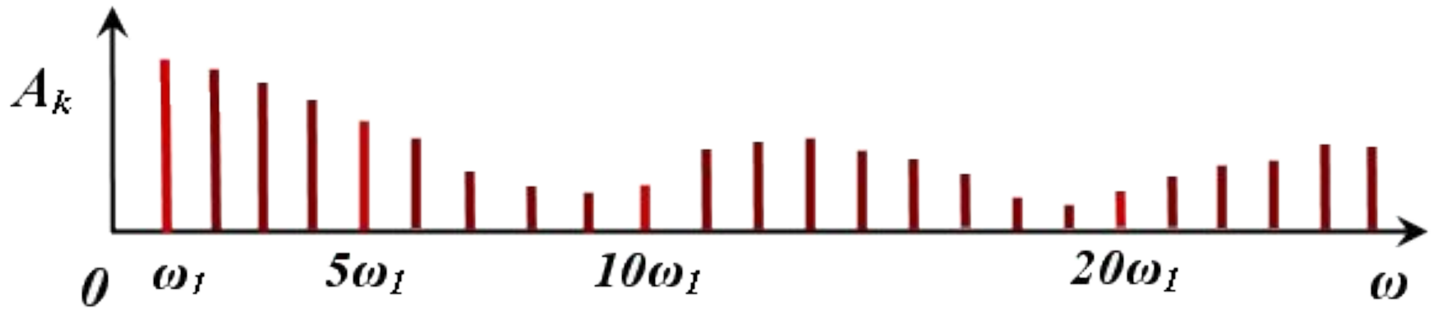
Спектры непериодических сигналов

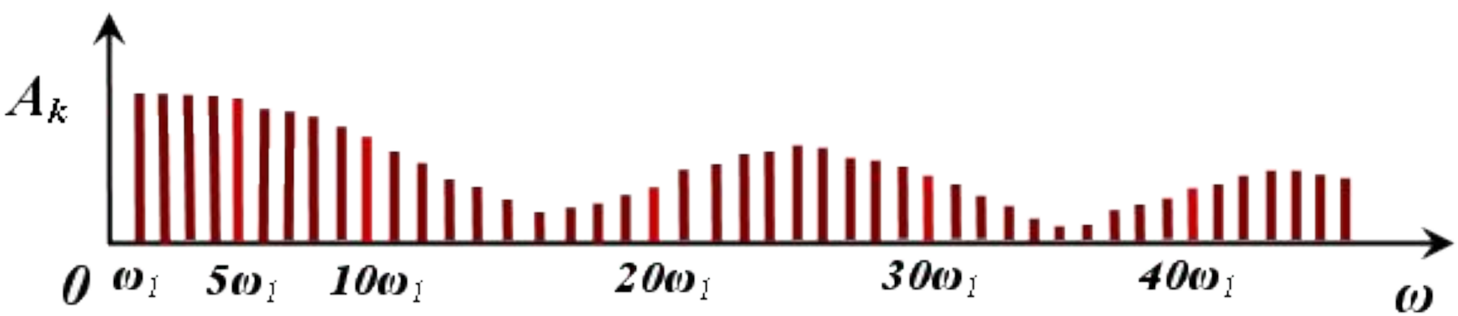


Увеличение периода последовательности прямоугольных периодов

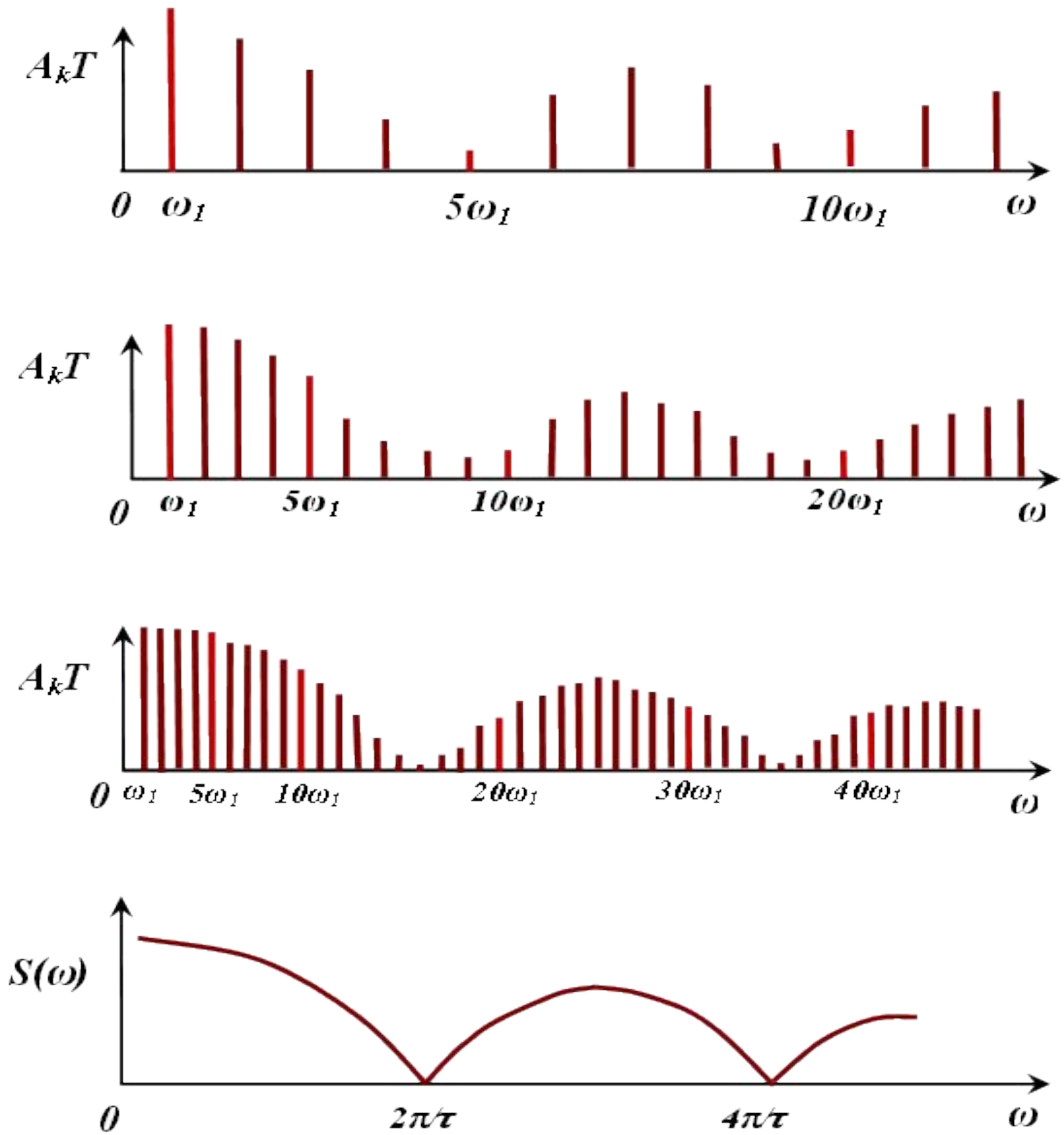
Спектры амплитуд периодических последовательностей импульсов с разными периодами







Таким образом, спектр непериодического сигнала является в общем случае **не дискретным**



Переход к спектральной плотности (кривая) одиночного прямоугольного импульса

Дополнения

Теорема Парсеваля

$$\left\langle x^2(t) \right\rangle = \frac{1}{T}\int_0^T x^2(t)\,dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left| X(n) \right|^2$$

Формулировка теоремы Парсеваля для вещественных периодических функций:

средняя мощность сигнала равна сумме квадратов коэффициентов Фурье (гармоник сигнала)

Теорема Фурье

Если определено преобразование Фурье непериодической функции в виде

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\exp(-j2\pi\ ft)dt$$

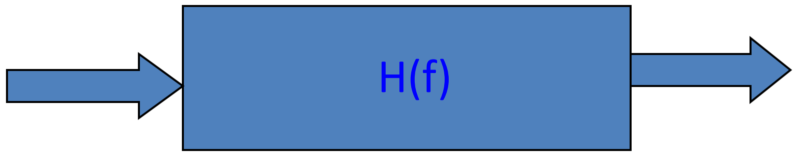
то сама функция может быть представлена с помощью интеграла Фурье

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f)\,exp(j2\pi ft)df$$

Свойство свертки и преобразование Фурье

$exp\left(j2\pi ft\right)$ - это собственная функция устойчивой системы

$\exp\left(j2\pi ft\right)$



$H\left(f\right)\exp\left(j2\pi ft\right)$

Если на входе

$$x\left(t\right)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}X\left(f\right)exp\left(j2\pi ft\right)df$$

То на выходе:

$$y\left(t\right)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}X\left(f\right)H\left(f\right)exp\left(j2\pi ft\right)df$$

Свойство свертки и преобразование Фурье

преобразование Фурье выхода связано с преобразованием Фурье входа следующим соотношением:

$$Y(f) = X(f)H(f)$$

Поскольку вход и выход можно описать соотношением

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

то можно сформулировать свойство свертки: преобразование Фурье свертки двух функций является произведением их преобразований Фурье, т.е.

$$F[w(t) * v(t)] \Rightarrow W(f)V(f)$$