* Спецглавы математики

Введение

* На практике в большинстве случаев найти точное решение возникшей задачи не удается. Это происходит главным образом не потому, что мы не умеем этого сделать, а в силу того, что искомое решение обычно не выражается в элементарных или других известных функциях. Поэтому важное значение приобрели численные методы, особенно в связи с возрастанием роли математических методов в различных областях науки и техники и с появлением высокопроизводительных ЭВМ [1].

*Численные методы

* Решение, полученное численным методом, обычно является приближенным, т.е. содержит некоторую погрешность. Источниками погрешности приближенного решения являются:
* -несоответствие математической модели изучаемому реальному явлению;
* -погрешность исходных данных;
* -погрешность метода решения;
* -погрешность округлений в арифметических и других действиях над числами.
* Погрешность, обусловленная первыми двумя источниками, называется неустранимой.

* Численные методы в большинстве случаев сами по себе являются приближенными, т.е. даже при отсутствии погрешности входных данных и при идеальном выполнении арифметических действий они дают решение исходной задачи с некоторой погрешностью, называемой погрешностью метода.
* Численный метод может считаться удачно выбранным, если его погрешность в несколько раз меньше неустранимой погрешности, а погрешность, возникающая за счет округлений, называется еще вычислительной погрешностью, по крайней мере, в несколько раз меньше погрешности метода.

1.Приближенные числа 1.1. Абсолютная и относительная погрешности

* Приближенным числом a называется число, которое незначительно отличается от точного числа A и заменяет последнее в вычислениях [6]. Если известно, что $a < A$, то a называется приближенным значением числа A по недостатку; если $a > A$, – то по избытку. Если a есть приближенное значение числа A, то пишут $a \approx A$.

* Под ошибкой или погрешностью A приближенного числа a обычно понимается разность между соответствующим точным числом A и данным приближенным, т.е.

$$\Delta a = A - a.$$

* Чтобы получить точное число A, нужно к приближенному значению числа прибавить его ошибку , т.е.

$$A = a + \Delta a.$$

* Во многих случаях знак ошибки неизвестен. Тогда целесообразно пользоваться абсолютной погрешностью приближенного числа

$$\Delta = |\Delta a|.$$

* Из приведенной записи следует, что абсолютной погрешностью приближенного числа a называется модуль разности между соответствующими точным числом A и его пр

$$\Delta = |A - a|. \qquad (1.1)$$

- Точное число *A* чаще всего бывает неизвестно, поэтому найти ошибку или абсолютную погрешность не представляется возможным. В этом случае полезно вместо неизвестной теоретической погрешности ввести ее оценку сверху, так называемую предельную абсолютную погрешность.
- Под предельной абсолютной погрешностью приближенного числа *a* понимается всякое число , не меньшее абсолютной погрешности этого числа, т.е.

$$\Delta a \geq \Delta.$$

- Если в последней записи вместо использовать формулу (1,1), то можно записать

$$\Delta = |A - a| \leq \Delta a \qquad (1.2)$$

* Отсюда следует, что точное число A заключено в границах $a-\Delta a \le A \le a+\Delta a.$

* Следовательно, разность $a-\Delta a$ есть приближение числа A по недостатку, а $a+\Delta a$ – приближение числа A по избытку. В этом случае для краткости пользуются записью $A=a\pm\Delta a.$

* Ясно, что предельная абсолютная погрешность определяется неоднозначно: если некоторое число есть предельная абсолютная погрешность, то любое большее, чем $\Delta\alpha$ положительное число, тоже есть предельная абсолютная погрешность. На практике стараются выбирать возможно меньшее и простое по записи число , $\Delta\alpha$ удовлетворяющее неравенству (1.2).

* Например, если в результате измерения получили длину отрезка l = 210 см ± 0,5 см., то здесь предельная абсолютная погрешность = 0,5 см, а точная величина l отрезка заключена в границах 209,5см≤l≤210,5см.

* Абсолютная погрешность недостаточна для характеристики точности измерения или вычисления. Так, например, если при измерении длин двух стержней получены результаты $l_1 = 95{,}6 см \pm 0{,}1 см$ и $l_2 = 8{,}3 \pm 0{,}1$ см, то, несмотря на совпадение предельных абсолютных погрешностей, точность первого измерения выше, чем второго. Отсюда видно, что для точности измерений важнее не абсолютная, а относительная погрешность, которая зависит от значений измеряемых величин.
* Относительной погрешностью δ приближенного числа a называется отношение абсолютной погрешности Δ этого числа к модулю соответствующего точного числа A, т.е.

$$\delta = \frac{\Delta}{|A|}.$$

* Аналогично предельной абсолютной погрешности используют также определение и для предельной относительной погрешности. Предельной относительной погрешностью δ_α данного приближенного числа *a* называется всякое число, не меньшее относительной погрешности этого числа $\delta \le \delta_a$,
* т.е. $\dfrac{\Delta}{|A|} \le \delta_a$, откуда следует $\Delta \le |A|\delta_a$.

* Таким образом, за предельную абсолютную погрешность числа *a* можно принять

$$\Delta_a = |A|\delta_a. \tag{1.3}$$

* Так как на практике $A \approx a$, то вместо формулы (1.3) часто пользуются формулой $\Delta_a = |a|\delta_a$.

*1.2 Десятичная запись приближенных чисел

* Всякое положительное десятичное число a может быть представлено в виде конечной или бесконечной дроби

$$a = \alpha_m 10^m + \alpha_{m-1} 10^{m-1} + \ldots + \alpha_0 10^0 + \alpha_{-1} 10^{-1} + \alpha_{-2} 10^{-2} + \ldots + \alpha_{-n} 10^{-n} \qquad (1.4)$$

* где – десятичные цифры числа a (= 0,1,2,...,9), причем старшая цифра а m – число разрядов в записи целой части числа a, а n – число разрядов в записи дробной части числа a. Например:

* $5214{,}73\ldots = 5 \cdot 10^3 + 2 \cdot 10^2 + 1 \cdot 10^1 + 4 \cdot 10^0 + 7 \cdot 10^{-1} + 3 \cdot 10^{-2} \ldots$ (1.5)

* Все *сохраняемые* десятичные значения (i = m, m-1,…, m-n+1), отличные от нуля, и нуль, если он стоит между значащими цифрами или является представителем сохраненного десятичного разряда в конце числа называются значащими цифрами приближенного числа a. При этом нули, связанные с множителем 10^n к значащим не относятся.

* **Определение** (в широком смысле)**.** Говорят, что *n* первых значащих цифр числа (считая слева направо) являются *верными в широком* смысле, если абсолютная погрешность этого числа не превосходит единицы (веса) *n*-го разряда. (Пояснение: 1 10^1 – здесь вес 1 равен 10; 1 10^0 – здесь вес 1 равен 1; 1 10^{-1} – здесь вес 1 равен 0,1; 1 10^{-2} – здесь вес 1 равен 0,01 и т.д.).

* **Определение** (в узком смысле). Говорят, что *n* первых значащих цифр приближенного числа являются верными, если абсолютная погрешность этого числа не превосходит *половины* единицы (веса) *n*-го разряда. (Пояснение: 1 10^1 – здесь вес половины 1 равен 5; 1 10^0 – здесь вес половины 1 равен 0,5; 1 10^{-1} – равен 0,05 и т.д.).

* Например, в приближенном числе $3,456 \pm 0,006$, исходя из первого определения, значащие цифры 3,4 и 5 верные в широком смысле, а цифра 6 – сомнительна. Исходя из второго определения, значащие цифры 3 и 4 являются верными в узком смысле, а цифры 5 и 6 – сомнительные. Важно подчеркнуть, что точность приближенного числа зависит не от количества значащих цифр, а от количества *верных значащих цифр*.
* Как в теоретических рассуждениях, так и в практических применениях большее применение находит определение верной цифры в узком смысле.
* Таким образом, если для приближенного числа *a,* заменяющего число *A*, известно, что

$$\Delta = |A - a| = \frac{1}{2} \cdot 10^{m-n+1} \qquad (1.6)$$

* то, по определению, первые *n* цифр этого числа являются верными.

* Например, для точного числа A = 35,97 число a = 36,00 является приближенным с тремя верными знаками. К этому результату приводят следующие рассуждения. Так как абсолютная погрешность нашего приближенного числа составляет величину 0,03, то по определению она должна удовлетворять условию

$$|A-a|=0,03<\frac{1}{2}\cdot 10^{m-n+1}. \qquad (1.7)$$

* В нашем приближенном числе 36,00 цифра 3 является первой значащей цифрой (т.е.), поэтому m = 1. Отсюда очевидно, что условие (1.7) будет выполняться при n = 3.

*1.3 Округление чисел

* Для записи приближенного числа используют только верные цифры. Неверные цифры отбрасывают, руководствуясь следующими правилами:
* 1.Если отбрасываемая цифра меньше 5, то последняя сохраняемая цифра не изменяется.
* 2.Если первая из отбрасываемых цифр больше 5, то последняя сохраняемая цифра увеличивается на единицу. Последняя сохраняемая цифра увеличивается также и в том случае, когда первая из отбрасываемых цифр есть 5, а за ней есть одна или несколько цифр, отличных от нуля. Например, если число 0,3754 округляется до трех значащих цифр, то округленное число будет 0,375, а если до двух, то округленное число будет 0,38.
* 3.Если отбрасываемая цифра равна 5, а за ней нет значащих цифр, то последняя сохраняемая цифра остается неизменной, если она четная, и увеличивается на единицу, если она нечетная (правило четной цифры). Например, число 0,435 округляем до 0,44; а число

* Если при записи приближенного числа необходимо учитывать погрешность, то порядок округления должен быть следующим.
* 1. Округление следует начинать с погрешности, оставляя в ней одну или две значащие цифры. Если первая цифра – *единица* или *двойка*, то после округления в записи погрешности оставляют *две* значащие цифры. Если же первая значащая цифра больше *двойки*, то в записи погрешности оставляют *одну* значащую цифру.
* Примеры

До округления	После округления
0,17295	0,17
4,8329	5
0,97283	1,0 (именно так, а не просто 1, чтобы подчеркнуть, что погрешность погрешности заключена в первом знаке после запятой)
0,006298	0,006 или $0,6\cdot10^{-2}$, или $6\cdot10^{-3}$
384,53	$0,4\cdot10^{3}$ или $4\cdot10^{2}$ (но не 400 – ведь это уже 3 значащие цифры)

* 2. Далее округляется сама вычисляемая или измеряемая величина. Причем ее последняя значащая цифра должна находиться в той же позиции, что и последняя значащая цифра погрешности.
* Примеры.

До округления	После округления
$3,4874 \pm 0,17295$	$3,49 \pm 0,17$
$285,396 \pm 4,8347$	285 ± 5
$12,482 \pm 0,96538$	$12,5 \pm 1,0$
$19,98472 \pm 0,8327$	$20,0 \pm 0,8$

* Из приведенных примеров видно, что если в погрешности присутствуют всего одна или две значащие цифры, то в самом результате после округления количество значащих цифр должно быть не меньше, чем в погрешности, причем последние значащие цифры в обоих числах стоят на одной и той же позиции.

* 3. Если при округлении погрешности указан множитель (порядок), т.е. 10^n, то такой же порядок должен быть и у самой величины. При этом оба числа заключаются в скобки, и после них записывается множитель 10^n.

* Примеры

До округления	После округления
$0,283984 \pm 0,006298$	$0,284 \pm 0,006$ или $(28,4 \pm 0,6) \cdot 10^{-2}$ или $(284 \pm 6) \cdot 10^{-3}$
$72903 \pm 384,53$	$(72,9 \pm 0,4) \cdot 10^{3}$ или $(729 \pm 4) \cdot 10^{2}$
2374 ± 48	$(2,37 \pm 0,05) \cdot 10^{3}$ или $(23,7 \pm 0,5) \cdot 10^{2}$

1.4. Связь относительной погрешности приближенного числа с количеством верных знаков

* **Теорема** (без доказательства). Если положительное приближенное число *a* имеет *n* верных десятичных знаков, то относительная погрешность этого числа не превосходит величину , деленную на первую значащую цифру данного числа, т.е.

$$\delta \le \frac{1}{\alpha_m}\left(\frac{1}{10}\right)^{n-1}$$

* где – первая значащая цифра числа *a*.
* За предельную относительную погрешность числа *a* можно принять

$$\delta_a = \frac{1}{\alpha_m}\left(\frac{1}{10}\right)^{n-1}$$

* Если число a имеет больше двух верных знаков, т.е. $n \geq 2$, то практически справедлива формула

$$\delta_a = \frac{1}{2\alpha_m}\left(\frac{1}{10}\right)^{n-1} \qquad (1.8)$$

* **Пример.** Какова будет предельная относительная погрешность, если вместо числа π использовать $a = 3,14$?
* **Решение**. В нашем случае $\alpha_m = 3$ и $n = 3$, поэтому

$$\delta_a = \frac{1}{2\cdot 3}\left(\frac{1}{10}\right)^{3-1} = \frac{1}{600} = \frac{1}{6}\%.$$

* Для решения обратной задачи определения количества верных знаков числа a, если известна его относительная погрешность, обычно пользуются приближенной формулой

$$\delta = \frac{\Delta}{a}$$

* где – Δ абсолютная погрешность числа a ($a > 0$). Отсюда

$$\Delta = \delta a. \qquad (1.9)$$

- Если

$$\delta \le \frac{1}{2 \cdot 10^{n}}$$

- то число *a* имеет *n* верных знаков, что следует из формулы (1.6)

$$\Delta \le \frac{1}{2} \cdot 10^{m-n+1}$$

- **Пример.** Приближенное число *a* = 24253 имеет относительную точность 1%. Сколько в нем верных знаков?
- **Решение**. Исходя из абсолютной погрешности, определяемой формулой ($\Delta = 24253 \cdot 0{,}01 \approx 243 = 2{,}43 \cdot 10^{2}$

- В заданном числе *a* = 24253 первой значащей цифре 2 соответствуе

$$243 \le \frac{1}{2} \cdot 10^{4-n+1} \quad \text{или} \quad 500 \le 10^{5-n}$$

- Из последнего неравенства следует, что оно может выполняться лишь при *n* = 2. Следовательно, в числе *a* будут верными лишь первые две цифры.

1.5. Погрешность суммы и разности приближенных чисел

* Предельная абсолютная погрешность алгебраической суммы нескольких приближенных чисел равна сумме предельных абсолютных погрешностей этих чисел.

* **Пример 1**. $a_1 = 25{,}74 \pm 0{,}02$; $a_2 = 96{,}42 \pm 0{,}03$; $a_1 + a_2 = 122{,}16 \pm 0{,}05$, т.е. $|\Delta_\Sigma| = |\Delta a_1| + |\Delta a_2| = 0{,}02 + 0{,}03 = 0{,}05$.

* **Пример 2**.$u=2{,}72+3{,}00+2{,}11=7{,}83$**;** $\Delta u=0{,}005+0{,}005+0{,}005=0{,}015$.

* Округляя до одного знака после запятой и учитывая погрешность округления, получим $u = 7{,}8\pm0{,}015$, т.е. в записи $u = 7{,}8$ все цифры верны.

* **Пример 3.** Необходимо сложить два приближенных числа 265 и 32. Пусть предельная погрешность первого числа равна 5, а второго – 1. Тогда предельная погрешность суммы равна 6. Так, если истинное значение первого числа есть 270, а второго 33, то приближенная сумма будет 265 + 32 + 297, т.е. она на 6 единиц

* **Пример 4.** Найти сумму приближенных чисел
* 0,0909 + 0,0833 + 0,0769 + 0,0714 + 0,0667 + 0,0625 + 0,0588 +0,0556 + 0,0526.
* Результатом сложения является число 0,6187. Поскольку предельная погрешность каждого слагаемого есть 0,00005, то предельная погрешность суммы будет 0,00005 9 = 0,00045. Значит, в последнем (четвертом) знаке суммы возможна ошибка до 5 единиц. Поэтому округляем сумму до третьего знака, т.е. до тысячных. В результате получаем число 0,619, в котором все три цифры являются верными.
* При значительном числе слагаемых обычно происходит взаимная компенсация погрешностей. Поэтому истинная погрешность суммы лишь в исключительных случаях совпадает с предельной погрешностью или близка к ней. Иначе говоря, при значительном числе суммирования приближенных чисел их сумма, как правило, гораздо точнее слагаемых. Это происходит благодаря взаимной компенсации погрешностей суммируемых чисел.

* **Пример 5**. Пусть предельная погрешность приближенного уменьшаемого 85 равна 2, а предельная погрешность вычитаемого 32 равна 3. Предельная погрешность разности 85–32=53 есть 2+3=5. Действительно, истинные значения уменьшаемого и вычитаемого могут равняться 85+2=87 и 32–3=29. Тогда истинная разность будет 87–29=58. Она на 5 единиц отличается от приближенной разности, равной 53.

* Однако надо иметь ввиду, что в противоположность сумме разность приближенных чисел может быть менее точной, чем уменьшаемое и вычитаемое отдельно взятые. Эффект «потери точности» особенно велик в том случае, когда уменьшаемое и вычитаемое мало отличаются друг от друга.

* **Пример 6.** Измерение внешнего и внутреннего диаметров тонкостенной трубки дало результаты мм, мм. Вычислим по этим данным толщину стенки трубки. Предельная абсолютная погрешность уменьшаемого и вычитаемого одна и та же: 0,05. Относительная погрешность уменьшаемого и вычитаемого тоже примерно одинакова, а именно:

$$\delta_1 = \frac{0,05}{28,7} = 0,0017 = 0,17\%, \quad \delta_2 = \frac{0,05}{28,3} = 0,18\%$$

* Толщина стенки трубки мм. Предельная абсолютная погрешность числа тоже будет 0,05, а относительная погрешность уже составит величину

$$\delta = \frac{0,05}{0,4} = 0,125 = 12,5\%.$$

1.6. Погрешности произведения и частного

* Если при записи погрешностей отдельных измерений или расчетов, а также сумм и разности приближенных чисел пользуются как абсолютной, так и относительной погрешностями, то для погрешностей произведений и частного предпочтительнее пользоваться относительными погрешностями. С чем это связано, рассмотрим на примерах.

* **Пример 7.** Пусть даны два приближенных числа: $a = 50 \pm 2,5$ и $b = 20 \pm 0,4$. Относительные погреш $\delta_a = 0,05 = 5\%$, $\delta_b = 0,02 = 2\%$. но равны:

* Найдем произведение этих приближенных чисел:

$$a \cdot b = (50 \pm 2,5)(20 \pm 0,4) = (1000 \pm ?).$$

* В качестве погрешности в результате умножения пока поставлен знак вопроса, поскольку пока не ясно, что там нужно писать. Для выяснения этого вопроса определим возможное максимальное значение результата умножения и возможное минимальное значение. Максимальное значение не может превышать число $52,5\cdot 20,4=1071$

* , а минимальное значение не может быть меньше числа $47,5\cdot 19,6=931$

* Для максимального абсолютная погрешность будет $\Delta_{ab}^{max}=1071-1000=71$

* Для минимального значения – $\Delta_{ab}^{min}=1000-931=69.$

* Ни одну из этих абсолютных погрешностей нельзя получить ни сложением, ни умножением погрешностей (и) исходных приближенных чисел.
* То есть их нельзя использовать вместо знака вопроса в приведенном выше результате умножения. Попробуем использовать для этой цели относительные погрешности.
* Очевидно, нам нужно использовать относительные погрешности для максимального (1071) и минимального (931) результатов умножения, которые соответственно равны:

$$\delta_{max} = \frac{71}{1000} = 0,071 = 7,1\%; \quad \delta_{min} = \frac{69}{1000} = 0,069 = 6,9\%.$$

* **Пример 8**. Найдем относительную погрешность произведения двух приближенных чисел *a* = 6,32 и *b* = 0,783. Определим сначала их относительные погрешности. Решение выполним двумя способами: использованием формулы (1.8) и использованием предельных абсолютных погрешностей, как это делалось в предыдущем примере.

* В соответствии с формулой (1.8) будем иметь

$$\delta_a = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\alpha_m \cdot 10^{n-1}} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6\cdot 10^2} = 0,08\%.$$

* Напомним, что – это первая значащая цифра числа *a*, *n* – общее число значащих цифр в этом числе. Абсолютная относительная погрешность аналогично будет равна

$$\delta_b = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{7\cdot 10^2} = 0,07\%.$$

$$\delta_{ab} = 0,15\%.$$

* Отсюда

* Теперь определим δ_{ab} вторым способом. Предельная абсолютная погрешность чисел *a* и *b* явно не указаны. Но в этом случае, пользуясь правилом, что при правильной записи приближенного числа указываются только верные цифры, получим

$$\Delta_a = 0{,}005,\quad \Delta_b = 0{,}0005.$$

* Предельные относительные погрешности соответственно будут равны:

$$\delta_a = \frac{0{,}005}{6{,}32} = 8\cdot 10^{-4} = 0{,}08\%,\quad \delta_b = \frac{0{,}0005}{0{,}783} = 6{,}4\cdot 10^{-4} = 0{,}064\%.$$

* **Пример 9**. Пусть необходимо определить приближенное значение частного двух приближенных чисел из примера 7. Рассуждаем аналогично. Очевидно, что истинное значение частного не превышает величины $\frac{50+2,5}{20-0,4}=2,678,$

* поэтому абсолютная предельная погрешность будет $\Delta_1=2,678-\frac{50}{20}=0,178.$

* С другой стороны ис $\frac{50-2,5}{20+0,4}=2,328,$ частного не может быть меньше, чем

$\Delta_2=2,5-2,328=0,172.$

* Поэтому δ_1 δ_2

* Соотве $\delta_1\frac{0,178}{2,5}=0,07=7\%,\quad \delta_2=\frac{0,172}{2,5}=0,068\approx 7\%,$:

* а общая величина погрешности составляет величину, близкую к 14%.

* 2. Численное решение уравнений и систем.

2.1. Общие соображения

* Далеко не всякое уравнение может быть решено точно.
* Однако точное решение уравнения не всегда является обязательным. Задача отыскания корней уравнения может считаться фактически решенной, если мы сумеем определить корни с нужной степенью точности и указать пределы возможной погрешности.
* Большинство применяемых приближенных способов решения уравнений являются способами уточнения корней, т.е. для их применения необходимы примерные значения корня. Для этой цели могут служить графические способы.
* Пусть рассматриваемое уравнение имеет вид
* $$\boldsymbol{f(x) = 0} \qquad (2.1)$$
* Построим в декартовой системе координат схематический график функции $\boldsymbol{y = f(x)}$. Абсциссы точек пересечения построенной кривой с осью $\boldsymbol{Ox}$ дадут нам значения действительных корней уравнения (2.1).

* После того как схематический график построен и примерно выделены участки оси абсцисс, в которых будут лежать корни функции (этот процесс называется *отделением корней*), приступают к уточнению значений корней.
* Все эти способы имеют одно общее свойство, состоящее в том, что нам должен быть известен интервал **[a, b]**, в котором лежит уточняемый корень уравнения. Выбор этого интервала производится на основании известного свойства непрерывных функций: если функция ***f(x)*** непрерывна на замкнутом интервале **[a, b]** и на его концах имеет различные знаки, т.е. $f(a) \cdot f(b) < 0$, то между точками ***a*** и ***b*** имеется хотя бы один корень уравнения $f(x) = 0$.
* Для уточнения значения корня нужно производить сужение интервала **[a, b]**. Делать это можно следующим образом. Выбираем какую-либо точку ***c***, лежащую внутри интервала **[a, b]** (обычно за точку ***c*** принимают середину отрезка **[a, b]**), и вычисляем значение ***f(c).*** В качестве нового интервала мы примем ту из этих двух половинок интервала **[a, b]**, на концах которого функция имеет разные знаки.

* Таким путем можно получить приближенное значение корня с любой степенью точности. Вместе с тем мы получаем и оценку точности приближенного решения. Однако, несмотря на принципиальную простоту, такой подход на практике не всегда используется, так как часто требует слишком большого количества вычислений; поэтому мы рассмотрим другие способы уточнения корня. В случае применения этих способов необходимо, чтобы на рассматриваемом интервале **[a, b]** функция ***f(x)*** удовлетворяла следующим условиям:
* -функция ***f(x)*** непрерывна на отрезке **[a, b]** вместе со своими производными первого и второго порядков;
* -значения ***f(x)*** на концах отрезка **[a, b]** имеют разные знаки;
* -первая и вторая производные сохраняют определенный знак на всем отрезке.
* Эти условия гарантируют, что корень уравнения (2.1) содержится интервале и других корней в этом интервале не имеется.

2.2.Способ хорд и способ касательных

* Эти способы являются наиболее распространенными в случае приближенного решения.
* Идея способа хорд состоит в том, что можно с известным приближением допустить, что функция на достаточно малом интервале **[a, b]** изменяется линейно. Тогда кривую ***y=f(x)*** на интервале **[a, b]** можно заменить хордой и в качестве приближенного значения корня принять точку пересечения хорды с осью абсцисс [7] – рис. (2.1).

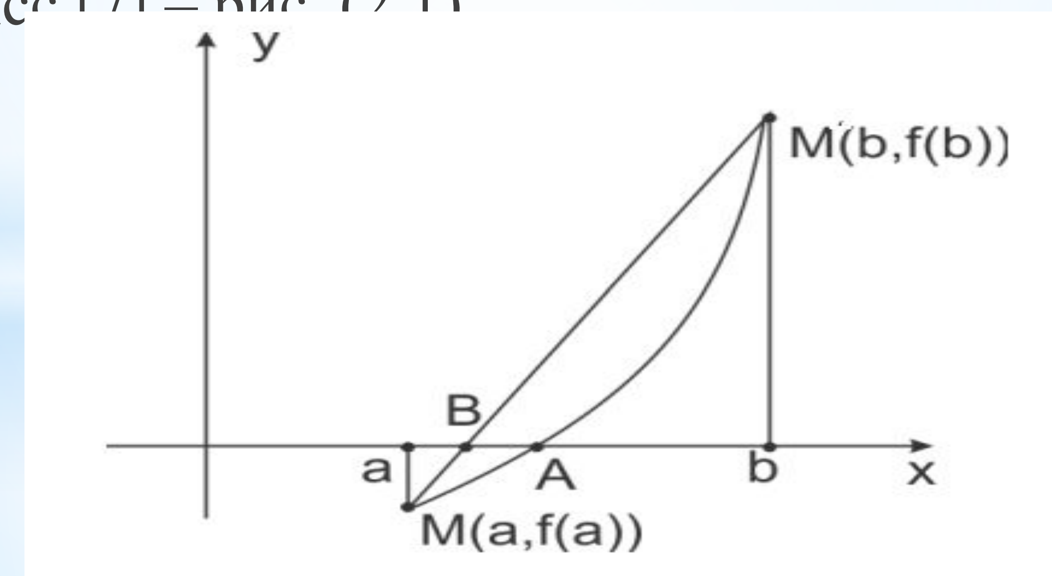

Рис. 2.1

* Заменив кривую ***MM'*** хордой ***MM'*** мы используем в качестве приближенного значения корня абсциссу точки **B**, в которой хорда пересекается с осью абсцисс.

* Напишем уравнение прямой, проходящей через точки ***M(a,f(a))*** и ***M'(b,f(b))***

$$\frac{y-f(a)}{f(b)-f(a)}=\frac{x-a}{b-a}. \qquad (2.2)$$

* Абсцисса точки ***B***, являющаяся приближенным корнем x_1, уравнения $f(x) = 0$, может быть найдена из уравнения прямой (2.2), если положить

$$x_1=a-\frac{(b-a)f(a)}{f(b)-f(a)}, \qquad (2.3)$$

* Уравнение рассматриваемой прямой можно записать и в таком виде

$$\frac{y-f(b)}{f(a)-f(b)}=\frac{x-b}{a-b}.$$

* Полагая здесь $y = 0$, получим

$$x_1=b-\frac{f(b)(b-a)}{f(b)-f(a)}. \qquad (2.4)$$

* Полученное значение x_1 можно снова использовать для дальнейшего уточнения корня по способу хорд, рассматривая интервал $[a, x_1]$ или же $[x_1, b]$ и исходя из того, в каком из них лежит истинный корень. Чтобы определить это, находят знак $f(x_1)$.
* **Пример**. Найдем по способу хорд положительный корень уравнения
* $f(x) = x^3 - 2x^2 + 3x - 5 = 0$.
* Сначала определим знаки функции в различных точках и

Таблица 1

x	0	1	2	1,5	1,8	1,9
$f(x_1)$	–	–	+	–	–	+

* Вычисление значений данной функции дает
* $f(1,8) = -0,248$; $f(1,9) = +0,339$.

$$x_1^{(1)} = 1,9 - \frac{(1,9 - 1,8)0,339}{0,339 + 0,248} = 1,842.$$

*

* Вычислив значение функции при $x = 1{,}842$, находим:
* $f(1{,}842) = -0{,}01009 < 0$. Отсюда видно, что истинный корень расположен в интервале $[1{,}842;1{,}9]$. Снова применив к этому интервалу способ хорд, получим

$$x_1^{(2)} = 1{,}9 - \frac{0{,}058 \cdot 0{,}339}{0{,}339 + 0{,}01009} = 1{,}8437.$$

* $f(1{,}8437) < 0$, $f(1{,}8438) > 0$.
* Видим, что значение корня находится в интервале между $1{,}8437$ и $1{,}8438$. Полагая значение корня равным $x=1{,}84375$, можно утверждать, что погрешность полученного приближения меньше $0{,}00005$.

* Способ Ньютона(касательных).

* Снова обратимся к уравнению ***f*(*x*) = 0.** Введем некоторую точку ***c*** интервала [***a***, ***b***] и проведем в точке [***c***, ***f(c)***] заданного графика функции касательную к этому графику (рис. 2.2).

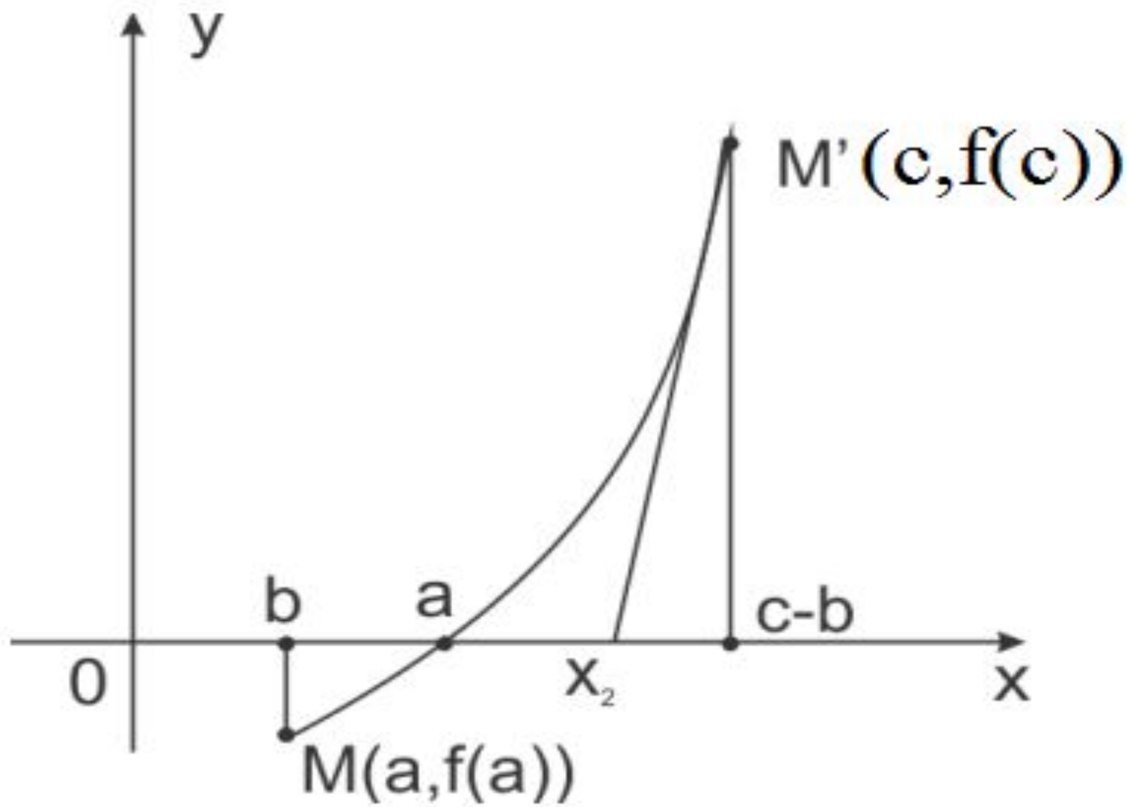

Рис (2.2)

- Уравнение касательной имеет вид
- ***y – f(c) = f'(c)(x-c).*** (2.5)
- В качестве приближенного корня уравнения ***f(x) = 0*** примем абсциссу точки пересечения касательной с осью О*x*.
- Уравнение касательной при *y* = **0**, исходя из (2.5), пересекает ось абсцисс в точке

$$x_2 = c - \frac{f(c)}{f'(c)}. \qquad (2.6)$$

- На рис. 2.2 мы приняли ***c = b***. Нетрудно видеть, что в этом случае ***f'(c) > 0*** и ***f''(c) > 0***, так как кривая вогнута. Обычно принимают ***c = a*** или ***c = b***, в зависимости от того, в какой из этих точек знак функции совпадает со знаком второй производной, т. е. ***c*** выбирают так, чтобы произведение ***f(c)·f''(c)*** было положительным. В этом случае можно гарантировать, что приближенное значение корня лежит в интервале **[*a, b*]**, т. е. что $a<x_2<b$.
- Как и в случае применения способа хорд, значение x_2 можно использовать для дальнейшего уточнения значения корня, беря интервал $[a, x_2]$ или $[x_2, b]$.

* **Пример**. Рассмотрим то же уравнение, что и в предыдущем случае:

* $\boldsymbol{x^3 - 2x^2 + 3x - 5 = 0}$

* Здесь $f'(x) = 3x^2 - 4x + 3$ и $f''(x) = 6x - 4$. Из табл. 2.1 выберем интервал [1,8;1,9]. Тогда $f'(x) > 0$ и $f''(x) > 0$. Если принять $c=a$, то $f(c)f''(c) < 0$, так как $f(1{,}8) < 0$. При $c = b = 1{,}9$ имеем $f(c)\cdot f''(c) > 0$, так что касательную следует проводить в точке $c = b$.

* По формуле (2.6)

$$x_2^{(1)} = 1{,}9 - \frac{0{,}339}{6{,}23} = 1{,}846.$$

* Так как $f(1{,}846) = 0{,}0132$, то в интервале **[1,8;1,846]** можно вновь применить метод касательных, полагая $c = 1.846$. Снова используя формулу (2.6), по

$$x_2^{(2)} = 1{,}846 - \frac{0{,}0132}{5{,}8391} = 1{,}8438.$$

* Из полученного результата видим, что погрешность полученного