

* Спецглавы математики

* Введение

* На практике в большинстве случаев найти точное решение возникшей задачи не удастся. Это происходит главным образом не потому, что мы не умеем этого сделать, а в силу того, что искомое решение обычно не выражается в элементарных или других известных функциях. Поэтому важное значение приобрели численные методы, особенно в связи с возрастанием роли математических методов в различных областях науки и техники и с появлением высокопроизводительных ЭВМ [1].

* Численные методы

* Решение, полученное численным методом, обычно является приближенным, т.е. содержит некоторую погрешность. Источниками погрешности приближенного решения являются:

* -несоответствие математической модели изучаемому реальному явлению;

* -погрешность исходных данных;

* -погрешность метода решения;

* -погрешность округлений в арифметических и других действиях над числами.

* Погрешность, обусловленная первыми двумя источниками, называется неустранимой.

- * Численные методы в большинстве случаев сами по себе являются приближенными, т.е. даже при отсутствии погрешности входных данных и при идеальном выполнении арифметических действий они дают решение исходной задачи с некоторой погрешностью, называемой погрешностью метода.
- * Численный метод может считаться удачно выбранным, если его погрешность в несколько раз меньше неустранимой погрешности, а погрешность, возникающая за счет округлений, называется еще вычислительной погрешностью, по крайней мере, в несколько раз меньше погрешности метода.

* 1. Приближенные числа

1.1. Абсолютная и

относительная погрешности

* Приближенным числом a называется число, которое незначительно отличается от точного числа A и заменяет последнее в вычислениях [6]. Если известно, что $a < A$, то a называется приближенным значением числа A по недостатку; если $a > A$, – то по избытку. Если a есть приближенное значение числа A , то пишут $a \approx A$.

* Под ошибкой или погрешностью A приближенного числа a обычно понимается разность между соответствующим точным числом A и данным приближенным, т.е.

$$\Delta a = A - a.$$

* Чтобы получить точное число A , нужно к приближенному значению числа прибавить его ошибку, т.е.

$$A = a + \Delta a.$$

* Во многих случаях знак ошибки неизвестен. Тогда целесообразно пользоваться абсолютной погрешностью приближенного числа

$$\Delta = |\Delta a|.$$

* Из приведенной записи следует, что абсолютной погрешностью приближенного числа a называется модуль разности между соответствующими точным числом A и его приближением a .
$$\Delta = |A - a|. \quad (1.1)$$

* Точное число A чаще всего бывает неизвестно, поэтому найти ошибку или абсолютную погрешность не представляется возможным. В этом случае полезно вместо неизвестной теоретической погрешности ввести ее оценку сверху, так называемую предельную абсолютную погрешность.

* Под предельной абсолютной погрешностью приближенного числа a понимается всякое число, не меньшее абсолютной погрешности этого числа, т.е.

$$\Delta a \geq \Delta.$$

* Если в последней записи вместо использовать формулу (1,1), то можно записать

$$\Delta = |A - a| \leq \Delta a \quad (1.2)$$

* Отсюда следует, что точное число A заключено в границах $a - \Delta a \leq A \leq a + \Delta a$.

* Следовательно, разность $a - \Delta a$ есть приближение числа A по недостатку, а $a + \Delta a$ – приближение числа A по избытку. В этом случае для краткости пользуются записью $A = a \pm \Delta a$.

* Ясно, что предельная абсолютная погрешность определяется неоднозначно: если некоторое число есть предельная абсолютная погрешность, то любое большее, чем Δa положительное число, тоже есть предельная абсолютная погрешность. На практике стараются выбирать возможно меньшее и простое по записи число, Δa удовлетворяющее неравенству (1.2).

* Например, если в результате измерения получили длину отрезка $l = 210 \text{ см} \pm 0,5 \text{ см}$., то здесь предельная абсолютная погрешность = 0,5 см, а точная величина l отрезка заключена в границах $209,5 \text{ см} \leq l \leq 210,5 \text{ см}$.

* Абсолютная погрешность недостаточна для характеристики точности измерения или вычисления. Так, например, если при измерении длин двух стержней получены результаты $l_1 = 95,6\text{см} \pm 0,1\text{см}$ и $l_2 = 8,3 \pm 0,1\text{см}$, то, несмотря на совпадение предельных абсолютных погрешностей, точность первого измерения выше, чем второго. Отсюда видно, что для точности измерений важнее не абсолютная, а относительная погрешность, которая зависит от значений измеряемых величин.

* Относительной погрешностью δ приближенного числа a называется отношение абсолютной погрешности Δ этого числа к модулю соответствующего точного числа A , т.е.

$$\delta = \frac{\Delta}{|A|}.$$

* Аналогично предельной абсолютной погрешности используют также определение и для предельной относительной погрешности. Предельной относительной погрешностью δ_a данного приближенного числа a называется всякое число, не меньшее относительной погрешности этого числа $\delta \leq \delta_a$,

* т.е. $\frac{\Delta}{|A|} \leq \delta_a$, откуда следует $\Delta \leq |A| \delta_a$.

* Таким образом, за предельную абсолютную погрешность числа a можно принять

$$\Delta_a = |A| \delta_a. \quad (1.3)$$

* Так как на практике $A \approx a$, то вместо формулы (1.3) часто пользуются формулой $\Delta_a = |a| \delta_a$.

* 1.2 Десятичная запись приближенных чисел

* Всякое положительное десятичное число a может быть представлено в виде конечной или бесконечной дроби

$$a = \alpha_m 10^m + \alpha_{m-1} 10^{m-1} + \dots + \alpha_0 10^0 + \alpha_{-1} 10^{-1} + \alpha_{-2} 10^{-2} + \dots + \alpha_{-n} 10^{-n}$$

* где α_i – десятичные цифры числа a ($= 0, 1, 2, \dots, 9$), причем старшая цифра α_m – число разрядов в записи целой части числа a , а n – число разрядов в записи дробной части числа a . Например:

$$* 5214,73\dots = 5 \cdot 10^3 + 2 \cdot 10^2 + 1 \cdot 10^1 + 4 \cdot 10^0 + 7 \cdot 10^{-1} + 3 \cdot 10^{-2} \dots$$

(1.5)

* Все *сохраняемые* десятичные значения ($i = m, m-1, \dots, m-n+1$), отличные от нуля, и нуль, если он стоит между значащими цифрами или является представителем сохраненного десятичного разряда в конце числа называются значащими цифрами приближенного числа a . При этом нули, связанные с множителем 10^n к значащим не относятся.

* **Определение** (в широком смысле). Говорят, что n первых значащих цифр числа (считая слева направо) являются *верными в широком смысле*, если абсолютная погрешность этого числа не превосходит единицы (веса) n -го разряда. (Пояснение: $1 \cdot 10^1$ – здесь вес 1 равен 10; $1 \cdot 10^0$ – здесь вес 1 равен 1; $1 \cdot 10^{-1}$ – здесь вес 1 равен 0,1; $1 \cdot 10^{-2}$ – здесь вес 1 равен 0,01 и т.д.).

* **Определение** (в узком смысле). Говорят, что n первых значащих цифр приближенного числа являются *верными*, если абсолютная погрешность этого числа не превосходит *половины* единицы (веса) n -го разряда. (Пояснение: $1 \cdot 10^1$ – здесь вес половины 1 равен 5; $1 \cdot 10^0$ – здесь вес половины 1 равен 0,5; $1 \cdot 10^{-1}$ – равен 0,05 и т.д.).

* Например, в приближенном числе $3,456 \pm 0,006$, исходя из первого определения, значащие цифры 3,4 и 5 верные в широком смысле, а цифра 6 – сомнительна. Исходя из второго определения, значащие цифры 3 и 4 являются верными в узком смысле, а цифры 5 и 6 – сомнительные. Важно подчеркнуть, что точность приближенного числа зависит не от количества значащих цифр, а от количества *верных значащих цифр*.

* Как в теоретических рассуждениях, так и в практических применениях большее применение находит определение верной цифры в узком смысле.

* Таким образом, если для приближенного числа a , заменяющего число A , известно, что

$$\Delta = |A - a| = \frac{1}{2} \cdot 10^{m-n+1} \quad (1.6)$$

* то, по определению, первые n цифр этого числа являются верными.

* Например, для точного числа $A = 35,97$ число $a = 36,00$ является приближенным с тремя верными знаками. К этому результату приводят следующие рассуждения. Так как абсолютная погрешность нашего приближенного числа составляет величину $0,03$, то по определению она должна удовлетворять условию

$$|A - a| = 0,03 < \frac{1}{2} \cdot 10^{m-n+1}. \quad (1.7)$$

* В нашем приближенном числе $36,00$ цифра 3 является первой значащей цифрой (т.е.), поэтому $m = 1$. Отсюда очевидно, что условие (1.7) будет выполняться при $n = 3$.

* 1.3 Округление чисел

* Для записи приближенного числа используют только верные цифры. Неверные цифры отбрасывают, руководствуясь следующими правилами:

* 1. Если отбрасываемая цифра меньше 5, то последняя сохраняемая цифра не изменяется.

* 2. Если первая из отбрасываемых цифр больше 5, то последняя сохраняемая цифра увеличивается на единицу. Последняя сохраняемая цифра увеличивается также и в том случае, когда первая из отбрасываемых цифр есть 5, а за ней есть одна или несколько цифр, отличных от нуля. Например, если число 0,3754 округляется до трех значащих цифр, то округленное число будет 0,375, а если до двух, то округленное число будет 0,38.

* 3. Если отбрасываемая цифра равна 5, а за ней нет значащих цифр, то последняя сохраняемая цифра остается неизменной, если она четная, и увеличивается на единицу, если она нечетная (правило четной цифры). Например, число 0,435 округляем до 0,44; а число 0,465 округляем до 0,46.

* Если при записи приближенного числа необходимо учитывать погрешность, то порядок округления должен быть следующим.

* 1. Округление следует начинать с погрешности, оставляя в ней одну или две значащие цифры. Если первая цифра – *единица* или *двойка*, то после округления в записи погрешности оставляют *две* значащие цифры. Если же первая значащая цифра больше *двойки*, то в записи погрешности оставляют *одну* значащую цифру.

* Примеры

До округления	После округления
0,17295	0,17
4,8329	5
0,97283	1,0 (именно так, а не просто 1, чтобы подчеркнуть, что погрешность погрешности заключена в первом знаке после запятой)
0,006298	0,006 или $0,6 \cdot 10^{-2}$, или $6 \cdot 10^{-3}$
384,53	$0,4 \cdot 10^3$ или $4 \cdot 10^2$ (но не 400 – ведь это уже 3 значащие цифры)

*2. Далее округляется сама вычисляемая или измеряемая величина. Причем ее последняя значащая цифра должна находиться в той же позиции, что и последняя значащая цифра погрешности.

*Примеры.

До округления	После округления
$3,4874 \pm 0,17295$	$3,49 \pm 0,17$
$285,396 \pm 4,8347$	285 ± 5
$12,482 \pm 0,96538$	$12,5 \pm 1,0$
$19,98472 \pm 0,8327$	$20,0 \pm 0,8$

*Из приведенных примеров видно, что если в погрешности присутствуют всего одна или две значащие цифры, то в самом результате после округления количество значащих цифр должно быть не меньше, чем в погрешности, причем последние значащие цифры в обоих числах стоят на одной и той же позиции.

*3. Если при округлении погрешности указан множитель (порядок), т.е. 10^n , то такой же порядок должен быть и у самой величины. При этом оба числа заключаются в скобки, и после них записывается множитель 10^n .

*Примеры

До округления	После округления
$0,283984 \pm 0,006298$	$0,284 \pm 0,006$ или $(28,4 \pm 0,6) \cdot 10^{-2}$ или $(284 \pm 6) \cdot 10^{-3}$
$72903 \pm 384,53$	$(72,9 \pm 0,4) \cdot 10^3$ или $(729 \pm 4) \cdot 10^2$
2374 ± 48	$(2,37 \pm 0,05) \cdot 10^3$ или $(23,7 \pm 0,5) \cdot 10^2$

* 1.4. Связь относительной погрешности приближенного числа с количеством верных знаков

* Теорема (без доказательства). Если положительное приближенное число a имеет n верных десятичных знаков, то относительная погрешность этого числа не превосходит величину $\frac{1}{\alpha_m}$, деленную на первую значащую цифру данного числа, т.е.

$$\delta \leq \frac{1}{\alpha_m} \left(\frac{1}{10} \right)^{n-1}$$

* где α_m – первая значащая цифра числа a .

* За предельную относительную погрешность числа a можно принять

$$\delta_a = \frac{1}{\alpha_m} \left(\frac{1}{10} \right)^{n-1}$$

* Если число a имеет больше двух верных знаков, т.е. $n \geq 2$, то практически справедлива формула

$$\delta_a = \frac{1}{2\alpha_m} \left(\frac{1}{10} \right)^{n-1} \quad (1.8)$$

* **Пример.** Какова будет предельная относительная погрешность, если вместо числа π использовать $a = 3,14$?

* **Решение.** В нашем случае $\alpha_m = 3$ и $n = 3$, поэтому

$$\delta_a = \frac{1}{2 \cdot 3} \left(\frac{1}{10} \right)^{3-1} = \frac{1}{600} = \frac{1}{6} \%.$$

* Для решения обратной задачи определения количества верных знаков числа a , если известна его относительная погрешность, обычно пользуются приближенной формулой

$$\delta = \frac{\Delta}{a}$$

* где Δ — абсолютная погрешность числа a ($a > 0$). Отсюда

$$\Delta = \delta a. \quad (1.9)$$

* Если

$$\delta \leq \frac{1}{2 \cdot 10^n}$$

* то число a имеет n верных знаков, что следует из формулы (1.6)

$$\Delta \leq \frac{1}{2} \cdot 10^{m-n+1}$$

* **Пример.** Приближенное число $a = 24253$ имеет относительную точность 1%. Сколько в нем верных знаков?

* **Решение.** Исходя из абсолютной погрешности, определяемой формулой ($\Delta = 24253 \cdot 0,01 \approx 243 = 2,43 \cdot 10^2$)

* В заданном числе $a = 24253$ первой значащей цифре 2 соответствует

$$243 \leq \frac{1}{2} \cdot 10^{4-n+1} \quad \text{или} \quad 500 \leq 10^{5-n}$$

* Из последнего неравенства следует, что оно может выполняться лишь при $n = 2$. Следовательно, в числе a будут верными лишь первые две цифры.

* 1.5. Погрешность суммы и разности

приближенных чисел

* Предельная абсолютная погрешность алгебраической суммы нескольких приближенных чисел равна сумме предельных абсолютных погрешностей этих чисел.

* **Пример 1.** $a_1 = 25,74 \pm 0,02$; $a_2 = 96,42 \pm 0,03$; $a_1 + a_2 = 122,16 \pm 0,05$, т.е. $|\Delta_\Sigma| = |\Delta a_1| + |\Delta a_2| = 0,02 + 0,03 = 0,05$.

* **Пример 2.** $u = 2,72 + 3,00 + 2,11 = 7,83$; $\Delta u = 0,005 + 0,005 + 0,005 = 0,015$.

* Округляя до одного знака после запятой и учитывая погрешность округления, получим $u = 7,8 \pm 0,015$, т.е. в записи $u = 7,8$ все цифры верны.

* **Пример 3.** Необходимо сложить два приближенных числа 265 и 32. Пусть предельная погрешность первого числа равна 5, а второго – 1. Тогда предельная погрешность суммы равна 6. Так, если истинное значение первого числа есть 270, а второго 33, то приближенная сумма будет $265 + 32 = 297$, т.е. она на 6 единиц

* **Пример 4.** Найти сумму приближенных чисел

* $0,0909 + 0,0833 + 0,0769 + 0,0714 + 0,0667 + 0,0625 + 0,0588$
 $+ 0,0556 + 0,0526.$

* Результатом сложения является число $0,6187$. Поскольку предельная погрешность каждого слагаемого есть $0,00005$, то предельная погрешность суммы будет $0,00005 \cdot 9 = 0,00045$. Значит, в последнем (четвертом) знаке суммы возможна ошибка до 5 единиц. Поэтому округляем сумму до третьего знака, т.е. до тысячных. В результате получаем число $0,619$, в котором все три цифры являются верными.

* При значительном числе слагаемых обычно происходит взаимная компенсация погрешностей. Поэтому истинная погрешность суммы лишь в исключительных случаях совпадает с предельной погрешностью или близка к ней. Иначе говоря, при значительном числе суммирования приближенных чисел их сумма, как правило, гораздо точнее слагаемых. Это происходит благодаря взаимной компенсации погрешностей суммируемых чисел

* **Пример 5.** Пусть предельная погрешность приближенного уменьшаемого 85 равна 2, а предельная погрешность вычитаемого 32 равна 3. Предельная погрешность разности $85-32=53$ есть $2+3=5$. Действительно, истинные значения уменьшаемого и вычитаемого могут равняться $85+2=87$ и $32-3=29$. Тогда истинная разность будет $87-29=58$. Она на 5 единиц отличается от приближенной разности, равной 53.

* Однако надо иметь в виду, что в противоположность сумме разность приближенных чисел может быть менее точной, чем уменьшаемое и вычитаемое отдельно взятые. Эффект «потери точности» особенно велик в том случае, когда уменьшаемое и вычитаемое мало отличаются друг от друга.

* **Пример 6.** Измерение внешнего и внутреннего диаметров тонкостенной трубки дало результаты мм, мм. Вычислим по этим данным толщину стенки трубки. Предельная абсолютная погрешность уменьшаемого и вычитаемого одна и та же: 0,05. Относительная погрешность уменьшаемого и вычитаемого тоже примерно одинакова, а именно:

$$\delta_1 = \frac{0,05}{28,7} = 0,0017 = 0,17\%, \quad \delta_2 = \frac{0,05}{28,3} = 0,18\%$$

* Толщина стенки трубки мм. Предельная абсолютная погрешность числа тоже будет 0,05, а относительная погрешность уже составит величину

$$\delta = \frac{0,05}{0,4} = 0,125 = 12,5\%.$$

* 1.6. Погрешности произведения и частного

* Если при записи погрешностей отдельных измерений или расчетов, а также сумм и разности приближенных чисел пользуются как абсолютной, так и относительной погрешностями, то для погрешностей произведений и частного предпочтительнее пользоваться относительными погрешностями. С чем это связано, рассмотрим на примерах.

* **Пример 7.** Пусть даны два приближенных числа: $a = 50 \pm 2,5$
 $b = 20 \pm 0,4$
Относительные погрешности $\delta_a = 0,05 = 5\%$, $\delta_b = 0,02 = 2\%$ равны:

* Найдем произведение этих приближенных чисел:

$$a \cdot b = (50 \pm 2,5)(20 \pm 0,4) = (1000 \pm ?).$$

* В качестве погрешности в результате умножения пока поставлен знак вопроса, поскольку пока не ясно, что там нужно писать. Для выяснения этого вопроса определим возможное максимальное значение результата умножения и возможное минимальное значение. Максимальное значение не может превышать число $52,5 \cdot 20,4 = 1071$.

* , а минимальное значение не может быть меньше числа $47,5 \cdot 19,6 = 931$

* Для максимального $\Delta_{ab}^{\max} = 1071 - 1000 = 71$ абсолютная погрешность будет

$$\Delta_{ab}^{\min} = 1000 - 931 = 69.$$

* Для минимального значения –

* Ни одну из этих абсолютных погрешностей нельзя получить ни сложением, ни умножением погрешностей (и) исходных приближенных чисел.

* То есть их нельзя использовать вместо знака вопроса в приведенном выше результате умножения. Попробуем использовать для этой цели относительные погрешности.

* Очевидно, нам нужно использовать относительные погрешности для максимального (1071) и минимального (931) результатов умножения, которые соответственно равны:

$$\delta_{\max} = \frac{71}{1000} = 0,071 = 7,1\%; \quad \delta_{\min} = \frac{69}{1000} = 0,069 = 6,9\%.$$

* **Пример 8.** Найдем относительную погрешность произведения двух приближенных чисел $a = 6,32$ и $b = 0,783$. Определим сначала их относительные погрешности. Решение выполним двумя способами: использованием формулы (1.8) и использованием предельных абсолютных погрешностей, как это делалось в предыдущем примере.

* В соответствии с формулой (1.8) будем иметь

$$\delta_a = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\alpha_m \cdot 10^{n-1}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6 \cdot 10^2} = 0,08\%.$$

* Напомним, что α – это первая значащая цифра числа a , n – общее число значащих цифр в этом числе. Абсолютная относительная погрешность аналогично

$$\delta_b = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{7 \cdot 10^2} = 0,07\%.$$

$$\delta_{ab} = 0,15\%.$$

* Отсюда

* Теперь определим δ_{ab} вторым способом. Предельная абсолютная погрешность чисел a и b явно не указаны. Но в этом случае, пользуясь правилом, что при правильной записи приближенного числа указываются только верные цифры, получим

$$\Delta_a = 0,005, \quad \Delta_b = 0,0005.$$

* Предельные относительные погрешности соответственно будут равны:

$$\delta_a = \frac{0,005}{6,32} = 8 \cdot 10^{-4} = 0,08\%, \quad \delta_b = \frac{0,0005}{0,783} = 6,4 \cdot 10^{-4} = 0,064\%.$$

* **Пример 9.** Пусть необходимо определить приближенное значение частного двух приближенных чисел из примера 7. Рассуждаем аналогично. Очевидно, что истинное значение частного не превышает величины $\frac{50+2,5}{20-0,4} = 2,678,$

* поэтому абсолютная предельная погрешность будет $\Delta_1 = 2,678 - \frac{50}{20} = 0,178.$

* С другой стороны истинное значение частного не может быть меньше, чем $\frac{50-2,5}{20+0,4} = 2,328,$
 $\Delta_2 = 2,5 - 2,328 = 0,172.$

* Поэтому

$$\delta_1 \quad \delta_2$$

* Соответствующие относительные погрешности: $\delta_1 = \frac{0,178}{2,5} = 0,07 = 7\%, \quad \delta_2 = \frac{0,172}{2,5} = 0,068 \approx 7\%,$

* а общая величина погрешности составляет величину, близкую к 14%.

* 2. Численное решение уравнений и систем.

2.1. Общие соображения

- * Далеко не всякое уравнение может быть решено точно.
- * Однако точное решение уравнения не всегда является обязательным. Задача отыскания корней уравнения может считаться фактически решенной, если мы сумеем определить корни с нужной степенью точности и указать пределы возможной погрешности.
- * Большинство применяемых приближенных способов решения уравнений являются способами уточнения корней, т.е. для их применения необходимы примерные значения корня. Для этой цели могут служить графические способы.
- * Пусть рассматриваемое уравнение имеет вид
- *
$$f(x) = 0 \tag{2.1}$$
- * Построим в декартовой системе координат схематический график функции $y = f(x)$. Абсциссы точек пересечения построенной кривой с осью Ox дадут нам значения действительных корней уравнения (2.1)

* После того как схематический график построен и примерно выделены участки оси абсцисс, в которых будут лежать корни функции (этот процесс называется *отделением корней*), приступают к уточнению значений корней.

* Все эти способы имеют одно общее свойство, состоящее в том, что нам должен быть известен интервал $[a, b]$, в котором лежит уточняемый корень уравнения. Выбор этого интервала производится на основании известного свойства непрерывных функций: если функция $f(x)$ непрерывна на замкнутом интервале $[a, b]$ и на его концах имеет различные знаки, т.е. $f(a) \cdot f(b) < 0$, то между точками a и b имеется хотя бы один корень уравнения $f(x) = 0$.

* Для уточнения значения корня нужно производить сужение интервала $[a, b]$. Делать это можно следующим образом. Выбираем какую-либо точку c , лежащую внутри интервала $[a, b]$ (обычно за точку c принимают середину отрезка $[a, b]$), и вычисляем значение $f(c)$. В качестве нового интервала мы примем ту из этих двух половинок интервала $[a, b]$, на концах которого функция имеет разные знаки.

* Таким путем можно получить приближенное значение корня с любой степенью точности. Вместе с тем мы получаем и оценку точности приближенного решения. Однако, несмотря на принципиальную простоту, такой подход на практике не всегда используется, так как часто требует слишком большого количества вычислений; поэтому мы рассмотрим другие способы уточнения корня. В случае применения этих способов необходимо, чтобы на рассматриваемом интервале $[a, b]$ функция $f(x)$ удовлетворяла следующим условиям:

* -функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ вместе со своими производными первого и второго порядков;

* -значения $f(x)$ на концах отрезка $[a, b]$ имеют разные знаки;

* -первая и вторая производные сохраняют определенный знак на всем отрезке.

* Эти условия гарантируют, что корень уравнения (2.1) содержится в интервале и других корней в этом интервале не имеется.

* 2.2. Способ хорд и способ касательных

* Эти способы являются наиболее распространенными в случае приближенного решения.

* Идея способа хорд состоит в том, что можно с известным приближением допустить, что функция на достаточно малом интервале $[a, b]$ изменяется линейно. Тогда кривую $y=f(x)$ на интервале $[a, b]$ можно заменить хордой и в качестве приближенного значения корня принять точку пересечения хорды с осью абсцисс [71] – рис. (2.1)

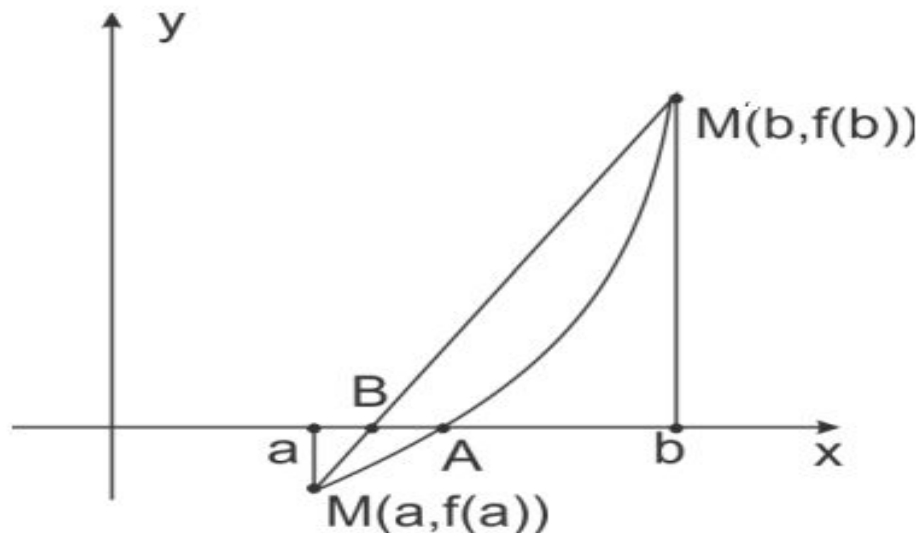


Рис. 2.1

* Заменяв кривую MM' хордой MM' мы используем в качестве приближенного значения корня абсциссу точки B , в которой хорда пересекается с осью абсцисс.

* Напишем уравнение прямой, проходящей через точки $M(a, f(a))$ и $M'(b, f(b))$

$$\frac{y - f(a)}{f(b) - f(a)} = \frac{x - a}{b - a} \quad (2.2)$$

* Абсцисса точки B , являющаяся приближенным корнем x_1 , уравнения $f(x) = 0$, может быть найдена из уравнения прямой (2.2), если положить

$$x_1 = a - \frac{(b - a)f(a)}{f(b) - f(a)}, \quad (2.3)$$

* Уравнение рассматриваемой прямой можно записать и в таком виде

$$\frac{y - f(b)}{f(a) - f(b)} = \frac{x - b}{a - b}$$

* Полагая здесь $y = 0$, получим

$$x_1 = b - \frac{f(b)(b - a)}{f(b) - f(a)} \quad (2.4)$$

* Полученное значение x_1 можно снова использовать для дальнейшего уточнения корня по способу хорд, рассматривая интервал $[a, x_1]$ или же $[x_1, b]$ и исходя из того, в каком из них лежит истинный корень. Чтобы определить это, находят знак $f(x_1)$.

* **Пример.** Найдем по способу хорд положительный корень уравнения

* $f(x) = x^3 - 2x^2 + 3x - 5 = 0.$

* Сначала определим знаки функции в различных точках и

Таблица 1

x	0	1	2	1,5	1,8	1,9
$f(x_1)$	-	-	+	-	-	+

* Вычисление значений данной функции дает

* $f(1,8) = -0,248; f(1,9) = +0,339.$ $x_1^{(1)} = 1,9 - \frac{(1,9 - 1,8)0,339}{0,339 + 0,248} = 1,842.$

*

* Вычислив значение функции при $x = 1,842$, находим:

* $f(1,842) = -0,01009 < 0$. Отсюда видно, что истинный корень расположен в интервале $[1,842; 1,9]$. Снова применив к этому интервалу способ хорд, получим

$$x_1^{(2)} = 1,9 - \frac{0,058 \cdot 0,339}{0,339 + 0,01009} = 1,8437.$$

* $f(1,8437) < 0, f(1,8438) > 0$.

* Видим, что значение корня находится в интервале между $1,8437$ и $1,8438$. Полагая значение корня равным $x = 1,84375$, можно утверждать, что погрешность полученного приближения меньше $0,00005$.

* Способ Ньютона (касательных).

* Снова обратимся к уравнению $f(x) = 0$. Введем некоторую точку c интервала $[a, b]$ и проведем в точке $[c, f(c)]$ заданного графика функции касательную к этому графику (рис. 2.2).

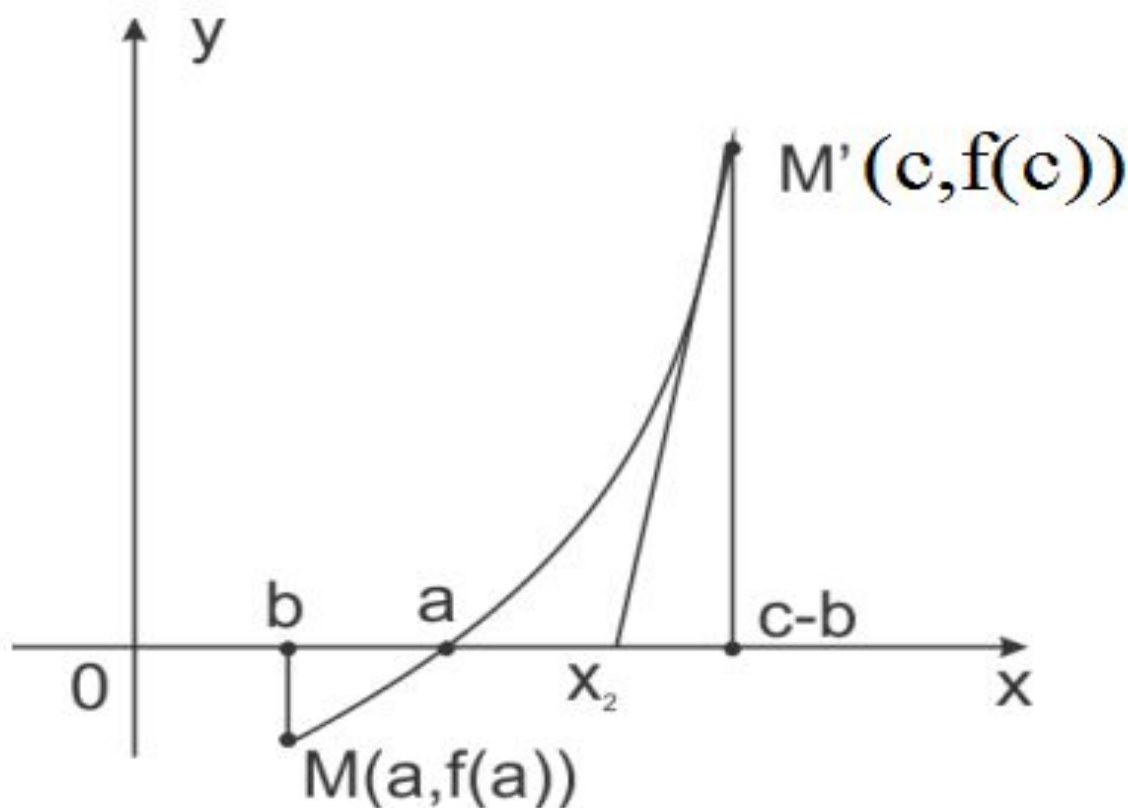


Рис (2.2)

* Уравнение касательной имеет вид

$$* y - f(c) = f'(c)(x-c). \quad (2.5)$$

* В качестве приближенного корня уравнения $f(x) = 0$ примем абсциссу точки пересечения касательной с осью Ox .

* Уравнение касательной при $x = c$, исходя из (2.5), пересекает ось абсцисс в точке

$$x_2 = c - \frac{f(c)}{f'(c)}. \quad (2.6)$$

* На рис. 2.2 мы приняли $c = b$. Нетрудно видеть, что в этом случае $f'(c) > 0$ и $f''(c) > 0$, так как кривая вогнута. Обычно принимают $c = a$ или $c = b$, в зависимости от того, в какой из этих точек знак функции совпадает со знаком второй производной, т. е. c выбирают так, чтобы произведение $f(c) \cdot f''(c)$ было положительным. В этом случае можно гарантировать, что приближенное значение корня лежит в интервале $[a, b]$, т. е. что $a < x_2 < b$.

* Как и в случае применения способа хорд, значение x_2 можно использовать для дальнейшего уточнения значения корня, беря интервал $[a, x_2]$ или $[x_2, b]$.

* **Пример.** Рассмотрим то же уравнение, что и в предыдущем случае:

$$* x^3 - 2x^2 + 3x - 5 = 0$$

* Здесь $f'(x) = 3x^2 - 4x + 3$ и $f''(x) = 6x - 4$. Из табл. 2.1 выберем интервал $[1,8;1,9]$. Тогда $f'(x) > 0$ и $f''(x) > 0$. Если принять $c=a$, то $f(c)f''(c) < 0$, так как $f(1,8) < 0$. При $c = b = 1,9$ имеем $f(c) \cdot f''(c) > 0$, так что касательную следует проводить в точке $c = b$.

* По формуле (2.6)

$$x_2^{(1)} = 1,9 - \frac{0,339}{6,23} = 1,846.$$

* Так как $f(1,846) = 0,0132$, то в интервале $[1,8;1,846]$ можно вновь применить метод касательных, полагая $c = 1,846$. Снова используя формулу (2.6), по

$$x_2^{(2)} = 1,846 - \frac{0,0132}{5,8391} = 1,8438.$$

* Из полученного результата видим, что погрешность полученного