Средние величины

Средней величиной называют показатель, который характеризует обобщенное значение признака или группы признаков в исследуемой совокупности.

- это обобщающая количественная характеристика совокупности однотипных явлений по одному варьирующему признаку, которая заменяет большое число индивидуальных значений признака, обнаруживая общие свойства, присущие всем единицам совокупности, что позволяет выявить общие закономерности, обусловленные общими причинами.

Средние величины

- каждая средняя величина характеризует совокупность по одному изучаемому признаку.
- если совокупность характеризуется несколькими признаками, то необходима система средних величин, которая может описать изучаемое явление в целом.

Средние величины связаны с законом больших чисел

При осреднении случайные отклонения индивидуальных величин в силу действия закона больших чисел взаимопогашаются и в **средней выявляется основная тенденция развития, необходимость, закономерность**

Средняя величина является равнодействующей всех факторов, оказывающих влияние на изучаемое явление, т.е, при расчете средних величин взаимопогашаются влияние случайных (индивидуальных) факторов и, таким образом, возможно определение закономерности, присущей исследуемому явлению.

Важнейшим условием научного использования средних величин в статистическом анализе общественных явлений является **однородность совокупности**, для которой исчисляется средняя

Средние величины

В совокупности ***с качественно однородными признаками,*** средняя величина выступает как **типическая средняя (**обобщает качественно однородные значения признака в данной совокупности)

В совокупности ***с качественно разнородными признаками*** средние величины обобщают качественно разнородные значения признаков или системных пространственных совокупностей (международное сообщество, континент, государство, регион, район и т. д.) или динамических совокупностей, протяженных во времени (век, десятилетие, год, сезон и т.д.). Такие средние величины называют **системными средними**.

Системные средние

- совокупность с качественно разнородными признаками разбивается на группы, содержащие только однородные элементы;
- рассчитываются сначала средние по группам (групповые средние) – выражают наиболее типичную величину явления в каждой группе;
- рассчитывается для всех элементов общая средняя величина, характеризующая явление в целом: как средняя из групповых средних, взвешенных по числу элементов совокупности, включенных в каждую группу.

Системные средние (примеры):

- характеристики государства, единой народнохозяйственной системы: средний национальный (или реальный) доход на душу населения, средняя урожайность зерновых по стране, среднее потребление продуктов питания на душу населения, средние показатели рождаемости населения по всем регионам страны, средние температуры за определенный период и т.д

Исходное соотношение средней

$$ИСС = \frac{Суммарное\_значение\_или\_объем\_осредняемого\_признака}{Число\_единиц\_или\_объем\_совокупности}$$

Общие принципы применения средних величин:

- Средняя должна определяться для совокупностей, состоящих из качественно однородных единиц.
- Средняя должна исчисляться для совокупности, состоящей из достаточно большого числа единиц.
- Средняя должна рассчитываться для совокупности, единицы которой находятся в нормальном, естественном состоянии.
- Средняя должна вычисляться с учетом экономического содержания исследуемого показателя.

Свойство средних величин: сумма индивидуальных значений признака равна сумме средних величин

$$x_1+x_2+x_3+\ldots+x_n=\sum x_n,\ \bar{x}+\bar{x}+\bar{x}+\ldots+\bar{x}=\sum\bar{x},\ \sum x_n=\sum\bar{x}$$

- Индивидуальная выработка у 5 операционистов коммерческого банка за день составила 136, 140, 154, 158 и 162 операции (Σ=750). Определить среднее число операций за день, выполненных одним операционистом.

Xср.=(136+140+154+158 +162)/5=150

Σ X ср=150+150+150+150+150 = 750

Основные понятия:

- Признак, по которому находится средняя называется осредняемым признаком ($x^{---)}$.
- Величина осредняемого признака у каждой единице совокупности наз. индивидуальным его значением (вариантами) – $x_{1,}x_2$…
- Частоты – абсолютные числа, показывающие столько раз в совокупности встречается данное значение признака (f). Сумма всех частот должна быть равна численности единиц всей совокупности

Виды средних

Структурные

- Мода
- Медиана

Степенные

- Геометрическая
- Квадратическая
- Гармоническая
- Арифметическая

Степенные средние

- в зависимости от представления исходных данных, могут быть **простыми** и **взвешенными:**

-если вариант **X** встречается один раз, расчеты проводят по **средней простой**, а если вариант повторяется некоторое число раз, то есть имеет разные **частоты** , то расчет проводят по **средней взвешенной**

-При расчете средних в качестве весов могут использоваться не только абсолютные, но и относительные величины (частость- отношение частоты к общему количеству исследуемых элементов, т.е. объему совокупности):

- $$di = fi / \Sigma fi$$

Степенные средние

Простая (невзвешенная) средняя считается по **несгруппированным данным**

$$\overline{X} = \sqrt[m]{\frac{\sum X_i^m}{n}}$$

где Xi - варианта (значение) осредняемого признака;
m - показатель степени средней;
n - число вариант (число единиц совокупности).

Взвешенная средняя считается по **сгруппированным данным**

$$\overline{X} = \sqrt[m]{\frac{\sum X_i^m f_i}{\sum f_i}}$$

где Xi - варианта (значение) осредняемого признака или серединное значение интервала, в котором измеряется варианта;
m - показатель степени средней;
fi - частота, показывающая, сколько раз встречается i-е значение осредняемого признака **(вес)**

Виды степенных средних

Вид	Показатель степени (m)	Формула расчета	
		Простая	Взвешенная
Гармоническая	-1	$\overline{x} = \dfrac{n}{\sum \frac{1}{x}}$	$\overline{x} = \dfrac{\sum wi}{\sum \frac{wi}{xi}}$ $w = xf$
Геометрическая	0	$\overline{x} = \sqrt[n]{\Pi x} = \sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n}$	$\overline{x} = \sqrt[\sum f]{\Pi x^f} = \sqrt[\sum]{x_1^{f_1} x_2^{f_2} \ldots x_n^{f_n}}$
Арифметическая	1	$\overline{x} = \dfrac{\sum x}{n}$	$\overline{x} = \dfrac{\sum xf}{\sum f}$
Квадратическая	2	$\overline{x} = \sqrt{\dfrac{\sum x^2}{n}}$	$\overline{x} = \sqrt{\dfrac{\sum x^2 f}{\sum f}}$
Кубическая	3	$\overline{x} = \sqrt[3]{\dfrac{\sum x^3}{n}}$	$\overline{x} = \sqrt[3]{\dfrac{\sum x^3 f}{\sum f}}$

Если рассчитать все виды средних для одних и тех же исходных данных, то значения их окажутся неодинаковыми. Здесь действует **правило мажорантности средних**: с увеличением показателя степени m увеличивается и соответствующая средняя величина:

$$\overline{X}_{\text{гарм.}} \le \overline{X}_{\text{геом}} \le \overline{X}_{\text{арифм}} \le \overline{X}_{\text{квадр.}} \le \overline{X}_{\text{куб.}}$$

Продукт	Цена x_i	Сумма реализации w_i	Частоты $f_i=w_i/x_i$
А	30	600	20
Б	20	1000	50
В	35	350	10
Итого		1950	80

Для определения ср.цены :

- $x^{---}=\sum w_i/\Sigma f_i$=1950 /80=24,3 руб.
- Если использовать не взвешенное ср. арифметич., то получим средний, который **не отражает объема реализации**, **т.е.нереальная**:
- x^{---}=30+20+35\3=28,3 руб.

ЗАДАНИЕ 1.

ИЗУЧИТЬ СВОЙСТВА СРЕДНЕЙ АРИФМЕТИЧЕСКОЙ,

ПОЯСНИТЬ НА ПРИМЕРАХ.

Средняя арифметическая обладает рядом свойств:

- От уменьшения или увеличения частот каждого значения признака **x** в **n** раз величина средней арифметической не изменится.
- Если все частоты разделить или умножить на какое-либо число, то величина средней не изменится.
- 2. Общий множитель индивидуальных значений признака может быть вынесен за знак средней:
- 3. Средняя суммы (разности) двух или нескольких величин равна сумме (разности) их средних:
- 4. Если x = c, где c - постоянная величина, то
- 5. Сумма отклонений значений признака X от средней арифметической x равна нулю:

Пример

№ п/п	Возраст (лет)	№ п/п	Возраст (лет)
1	18	11	22
2	18	12	19
3	19	13	19
4	20	14	20
5	19	15	20
6	20	16	21
7	19	17	19
8	49	18	19
9	19	19	19
10	20	20	19

Средний возраст

Возраст	18	19	20	21	22
Частота	2	11	5	1	1

Простая средняя

$$\overline{X} = \frac{18+18+19+20+19+\ldots\ldots+20+21+22}{20} =$$

$$= \frac{388}{20} = 19{,}4 \text{ года}$$

Взвешенна
я
средняя

$$\overline{X} = \frac{18\cdot 2+19\cdot 11+20\cdot 5+21\cdot 1+22\cdot 1}{2+11+5+1+1} =$$

$$= \frac{36+209+100+21+22}{20} =$$

$$= \frac{388}{20} = 19{,}4 \text{ года}$$

При расчете средней по интервальному вариационному ряду необходимо найти **середину интервалов** **<u>как полусумму верхней и нижней границ</u>** (значения x_i) и количество единиц совокупности в каждой группе f_i

В случае **открытых интервалов** <u>значение нижнего или верхнего интервала определяется</u> **<u>по величине интервалов, примыкающих к ним</u>**<u>.</u>

Средние, вычисляемые из интервальных рядов являются приближенными.

Гармоническая простая

2 машины прошли один и тот же путь.

1-я со скор. 60км\ч, 2-я со скор.80км.\ч.

Средняя скорость их составит:

$x^{---} = 2 / (1/60+1/80) =$

$2 / (60+80)/4800=68.6$ км.ч.

Гармоническая взвешенная

Автомобиль прошел первые 210 км со скоростью 70 км/ч, а оставшиеся 150 км со скоростью 75 км/ч. Определить среднюю скорость автомобиля на протяжении всего пути в 360 км.

РЕШЕНИЕ:

xi – скорость на отрезках пути,

fi – отрезки пути ,

Σ fi - весь путь,

Σfi/xi - время затраченное на весь путь

Тогда средняя скорость может быть найдена как частное от деления всего пути на общие затраты времени:

$$\overline{x} = \frac{\sum f_i}{\sum \frac{f_i}{x_i}}. \qquad \overline{x} = \frac{210+150}{\frac{210}{70}+\frac{150}{75}} = 72 \text{ км / ч.}$$

- При расчете средней по интервальному вариационному ряду необходимо сначала найти середину интервалов. Это и будут значения x_i, а количество единиц совокупности в каждой группе f_i

Возраст рабочего, лет	**Число рабочих, чел (f_i)**	**Середина возрастного интервала, лет (x_i)**
20-30 30-40 40-50 50-60 60 и более	7 13 48 32 6	25 35 45 55 65
Итого	106	

- Средний возраст рабочих фирмы будет равен:

$X^{ср} = (25*7+35*13+45*48+55*32+65*6)/106 = 47$ лет

- Определить средний возраст студентов заочного отделения:

Возраст в годах	**Число студентов f**	**Среднее значение интервала X***	**Произведение середины интервала (возраст) на число студентов X*f**
до 20	65		
20 — 22	125		
22 — 26	190		
26 — 30	80		
30 и более	40		
Итого	500		

Возраст в годах	**Число студентов f**	**Среднее значение интервала X***	**Произведение середины интервала (возраст) на число студентов X*f**
до 20	65	(18 + 20) / 2 =19 в данном случае граница нижнего интервала 18. Вычисляется как 20 - (22-20)	1235
20 — 22	125	(20 + 22) / 2 = 21	2625
22 — 26	190	(22 + 26) / 2 = 24	4560
26 — 30	80	(26 + 30) / 2 = 28	2240
30 и более	40	(30 + 34) / 2 = 32	1280
Итого	500		11940

- средний возраст студентов заочного отделения:

$$\bar{x} = \frac{\sum x'f}{\sum f} = \frac{11940}{500} = 23,9 \text{ года.}$$

- <u>Структурные средние</u>
- *применяются для изучения внутреннего строения рядов распределения значений признака, а также для оценки средней величины (степенного типа), если по имеющимся статистическим данным ее расчет не может быть выполнен.*

Структурные средние

Мода наиболее часто повторяющееся значения признака

$$Mo = X_{Mo} + h\frac{m_{Mo} - m_{Mo-1}}{(m_{Mo} - m_{Mo-1}) + (m_{Mo} - m_{Mo+1})}$$

где X_{Mo} - нижнее значение модального интервала;

m_{Mo} - число наблюдений или объем взвешивающего признака в модальном интервале (в абсолютном либо относительном выражении);

m_{Mo-1} - то же для интервала, предшествующего модальному;

m_{Mo+1} - то же для интервала, следующего за модальным;

h - величина интервала изменения признака в группах

МОДА

- Распределение проданной женской обуви по размерам характеризуется следующим образом:

Размер обуви	34	35	36	37	38	39	40	41
Количество проданных пар	8	19	34	108	72	51	6	2

Стаж лет	Число работников
До 2	4
2-4	23
4-6	20
6-8	**35**
8-10	11
Больше 10	7

Модальный интервал величины стажа 6-8 лет, а мода продолжительности стажа:

Мо=6+2(35-20) / (35-20)+(35-11) = 6.77 года

Структурные средние

Медиана величина признака, которая делит упорядоченную последовательность его значений на две равные по численности части

$$Me = X_{Me} + h_{Me} \cdot \frac{\frac{\sum m}{2} - S_{Me-1}}{m_{Me}}$$

где X_{Me} - нижняя граница медианного интервала;

h_{Me} - его величина;

$\sum m/2$- половина от общего числа наблюдений или половина объема того показателя, который используется в качестве взвешивающего в формулах расчета средней величины;

S_{Me-1} - сумма наблюдений (или объема взвешивающего признака), накопленная до начала медианного интервала;

m_{Me} - число наблюдений или объем взвешивающего признака в медианном интервале

медиана

- В дискретном ряду распределения медиана находится непосредственно по накопленной частоте, соответствующей номеру медианы
.

$$N = \frac{n+1}{2};$$

Дискретный ряд - это такой вариационный ряд, в основу построения которого положены признаки с прерывным изменением (дискретные признаки): тарифный разряд, количество детей в семье, число работников на предприятии и т.д.

Эти признаки могут принимать только конечное число определенных значений.

Для **варьирующего ряда** (т.е. *построенного в порядке возрастания, или убывания индивидуальных величин*) **с нечетным числом** членов медианой является варианта, расположенная в центре ряда.

Если **число членов четное** – медиана = сред. арифмет.из двух смежных вариант.

В таблице показан расход электроэнергии в январе жильцами девяти квартир:

Номер квартиры	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Расход электроэнергии, кВт·ч	85	64	78	93	72	91	72	75	82

Номер квартиры	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Расход электроэнергии, кВт·ч	85	64	78	93	72	91	72	75	82	88

В интервальном вариационном ряду порядок нахождения Ме следующий:

1. располагаем индивидуальные значения признака по ранжиру,
2. определяем для данного ранжированного ряда накопленные частоты,
3. по данным о накоплен.частотах находим медианный интервал.

Поскольку медианное значение делит всю совокупность на две равные по численности части, оно оказывается в каком-то из интервалов признака X.

4. С помощью интерполяции в этом медианном интервале находят значение медианы