

# СТАТИКА И ДИНАМИКА ТЕХНОЛОГИЧЕСКИХ ОБЪЕКТОВ УПРАВЛЕНИЯ

# Основные понятия математического моделирования

Математическая модель - совокупность уравнений и граничных условий, описывающих зависимость выходных величин от входных в установившемся и переходном режимах.

# Группы математических моделей

- установившегося режима (модель статики) отражает функциональную связь между входными и выходными величинами в установившемся состоянии;
- переходного режима (модель динамики) описывает изменение выходной величины во времени в зависимости от изменения входной величины;
- физические модели (электрические, гидравлические и др.).

# Модели динамики

- переходный режим - режим функционирования системы описываемый дифференциальным или интегрально-дифференциальным уравнением;
- установившийся режим - характеризуется независимостью входных и выходных координат от времени. Режим описывается дифференциальными уравнениями нулевого порядка, т. е. алгебраическими уравнениями, получаемыми из уравнений динамики приравниванием к нулю всех производных по времени.

# Математические модели установившегося и переходного режимов и методы их линеаризации

Как уравнения статики, так и уравнения динамики могут быть линейными или нелинейными, в последнем случае они подлежат линеаризации т.е. математическому преобразованию в линейное уравнение.

# Линеаризация уравнений динамики

В общем случае при наличии одной выходной ( $y$ ) и нескольких входных величин ( $x$ ) динамика элемента (системы) описывается дифференциальным уравнением (для двух  $x_1$  и  $x_2$ )

$$F(y^n, y^{n-1}, \dots, y, x_1^m, x_1^{m-1}, \dots, x_1, x_2^l, x_2^{l-1}, \dots, x_2) = 0,$$

где  $F$  — некоторая нелинейная функция;  $n, m, l$  — целые натуральные числа, определяющие наивысший порядок входящих в уравнение производных входной и выходной величин по времени.

Для реальных систем порядок дифференциального уравнения  $n > m$  и  $n > l$ . Линеаризацию нелинейных дифференциальных уравнений осуществляют методом малых отклонений. При этом вместо абсолютного значения переменных в уравнении используют их отклонения от начального значения

В р  $\Delta y = y - y_0; \Delta x_1 = x_1 - x_{10}$  ,  $\Delta x$  — одной входной величине  $\Delta x$   
 может быть записано в виде

$$a_n \Delta y^n + a_{n-1} \Delta y^{n-1} + \dots + a_0 \Delta y = b_m \Delta x^m + b_{m-1} \Delta x^{m-1} + \dots + b_0 \Delta x,$$

# Линеаризация уравнений статики

Уравнения статики элементов (систем) автоматического управления, как правило, нелинейные и могут быть представлены в виде кривой или ломаной линии.

Линеаризация нелинейных статических характеристик осуществляется несколькими способами:

**Метод малых отклонений.** Основан на разложении аналитической функции  $y = f(x)$  в ряд Тейлора и отбрасывании малозначащих членов.

$$\Delta y = f_1(x_0) + f_1'(x_0)\Delta x_0 + \frac{1}{2}f_1''(x_0)\Delta x^2 + \dots$$

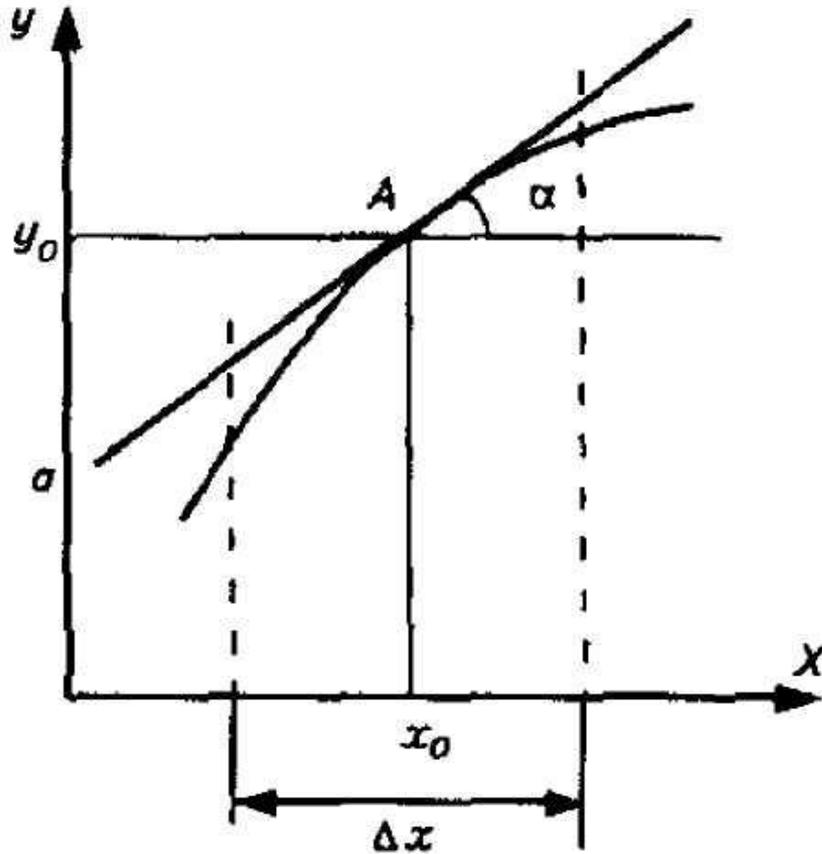
Таким образом, линеаризованное уравнение

$$\Delta y = a + b\Delta x,$$

где  $a = f_1(x_0)$ ;  $b = f_1'(x_0)$ .

**Метод касательной.** Основан на замене участка кривой прямой линией, касательной к этой кривой в точке А ( $x_0, y_0$ ), называемой рабочей точкой и находящейся в середине рабочего диапазона изменения  $\Delta x$ . Как и в предыдущем случае, линеаризованное уравнение  $y = a + bx$ , где  $b = \operatorname{tg} \alpha$

# Метод секущей



Основан на замене уравнения нелинейной характеристики уравнением секущей, параметры которого определяют методом наименьших квадратов. Первый из рассмотренных методов применяют, когда статическая характеристика задана аналитически, второй и третий — графически. Встречаются элементы автоматической СУ, статические характеристики которых не поддаются линейаризации указанными ранее методами. Эти характеристики называют существенно нелинейными.

# Аналитический метод построения математической модели

Дифференциальные уравнения простых элементов можно составить, используя закономерности протекающих в них физических явлений. Такими закономерностями могут быть:

- закон сохранения вещества (объект регулирования уровня, давления),
- закон сохранения энергии (объект регулирования температуры),
- законы электротехники и т. д.

Уравнения статических и переходных режимов составляют на базе уравнений балансов вещества или энергии.

При составлении дифференциальных уравнений сложного объекта (или системы) он должен быть расчленен на простейшие элементы, соединенные последовательно, для каждого из которых составляют математические модели статики и динамики. Дифференциальное уравнение объекта или системы в целом получают путем исключения промежуточных величин.

Как указывалось ранее, в большинстве случаев уравнения элементов нелинейные, и потому дифференциальное уравнение системы, как правило, нелинейное и подлежит линеаризации.

В целях упрощения задачи при использовании аналитического метода построения математической модели допускают определенные упрощения.

# Экспериментальные методы построения математической модели

В практике синтеза автоматических СУ технологическими процессами сельскохозяйственного производства используют два метода экспериментального определения (идентификации) статических и динамических характеристик объектов автоматизации — активный и пассивный.

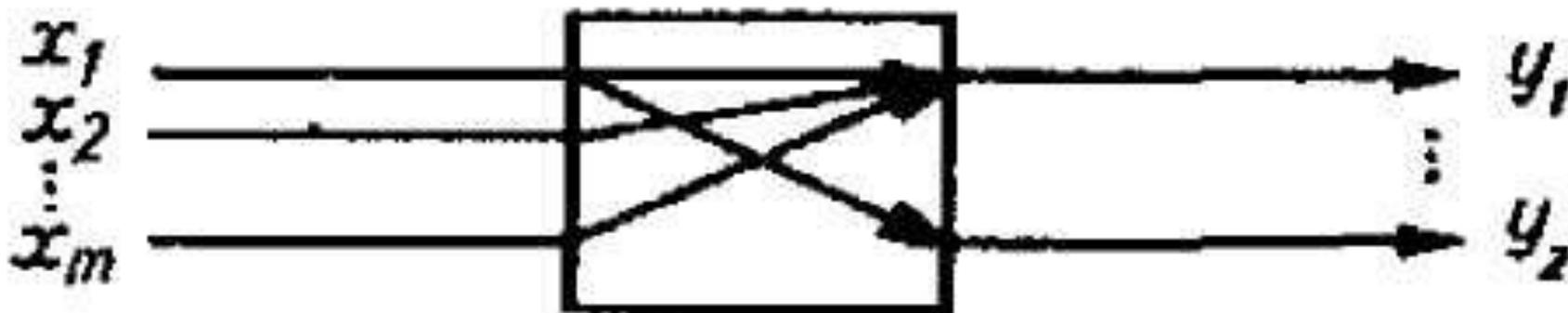
В первом случае испытательное воздействие стандартной формы задают искусственно, во втором — объект исследуют путем сопоставления выходных и входных величин в условиях нормальной эксплуатации объекта.

Выбор метода идентификации объекта определяется поставленной задачей, условиями опытов, эксплуатационными возмущениями и допустимыми по технологическим требованиям отклонениями исследуемых величин.

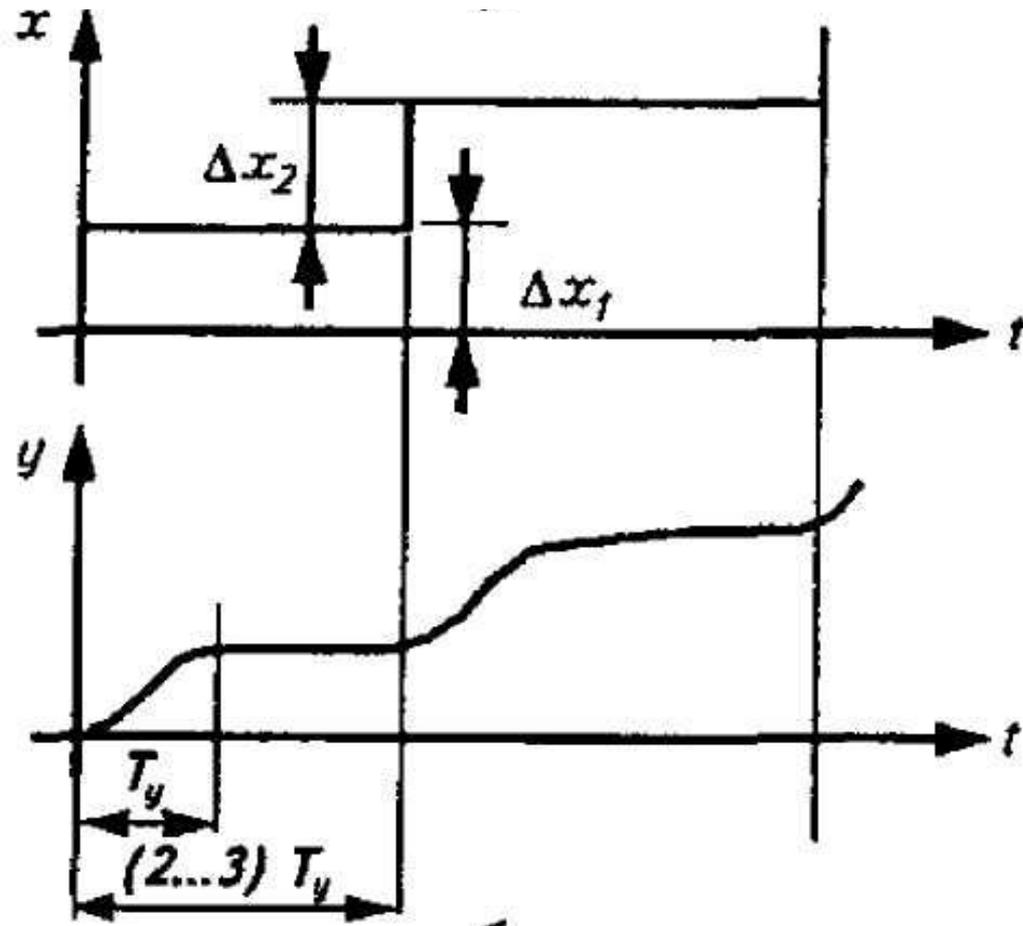
# Определение статических характеристик (активный метод)

Уравнения статики описывают поведение объекта в установившемся состоянии, т.е. показывают взаимосвязи между входными  $x(t)$  и выходными  $y(t)$  координатами, когда все производные функций  $x(t)$  и  $y(t)$  равны нулю.

В общем виде статическая характеристика объекта с  $m$  входами имеет вид:



# Процедура определения статических характеристик объекта:

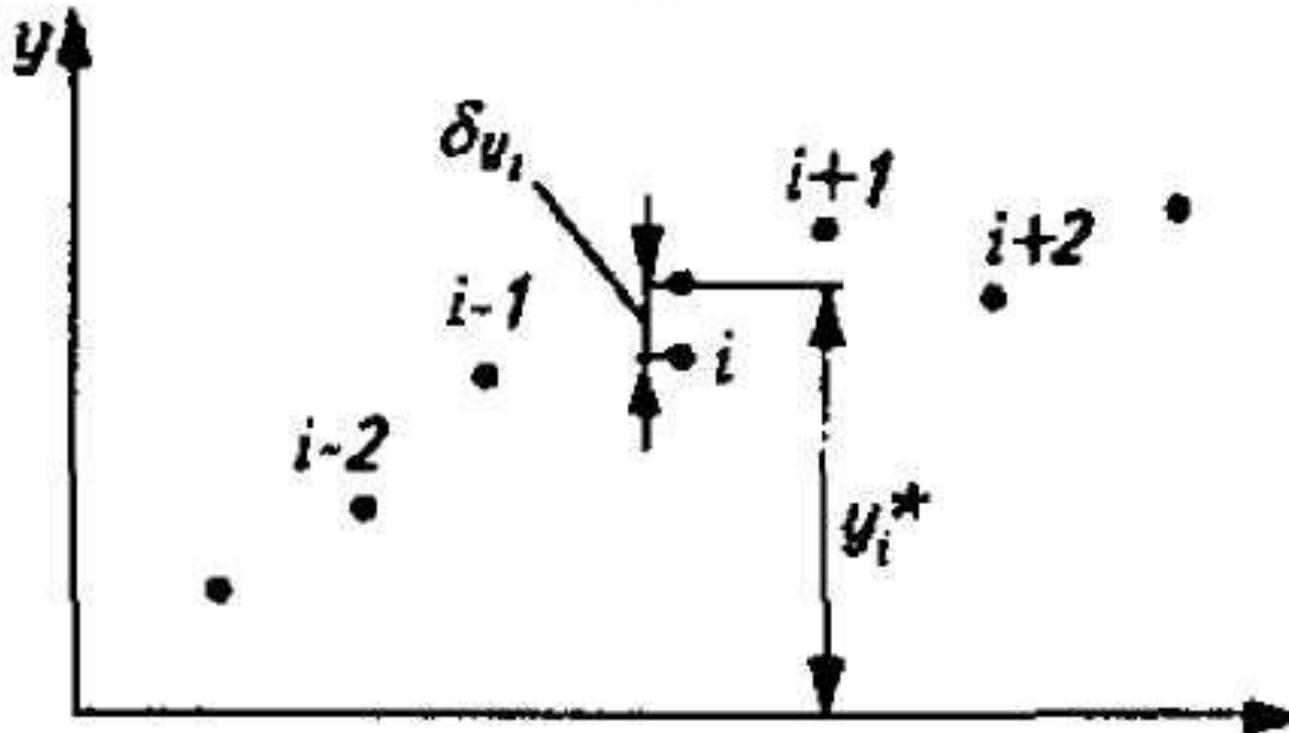


1. Подготовка и планирование эксперимента. Изучают ТП, оборудование и устанавливают взаимные связи между выходными и входными параметрами.
2. Проведение эксперимента. Каждая входная величина изменяется ступенчато в пределах рабочего диапазона  $\Delta x$  и спустя  $(2...3)T_y$ , где  $T_y$  — длительность переходного процесса, фиксируют значение выходной величины  $y$ .

3.Обработка результатов эксперимента. Полученные зависимости  $y=f(x_1, x_2, \dots)$  могут быть искажены помехой и потому подлежат сглаживанию одним из известных методов (обычно скользящего среднего или четвертых разностей).

Идея метода четвертых разностей состоит в последовательном вычислении поправки для каждой экспериментальной точки последовательно.

Полученная статическая характеристика, как правило, не линейна и потому желательна ее линеаризация одним из рассмотренных ранее методов с целью аппроксимации простейшей зависимостью вида  $y = a + bx$

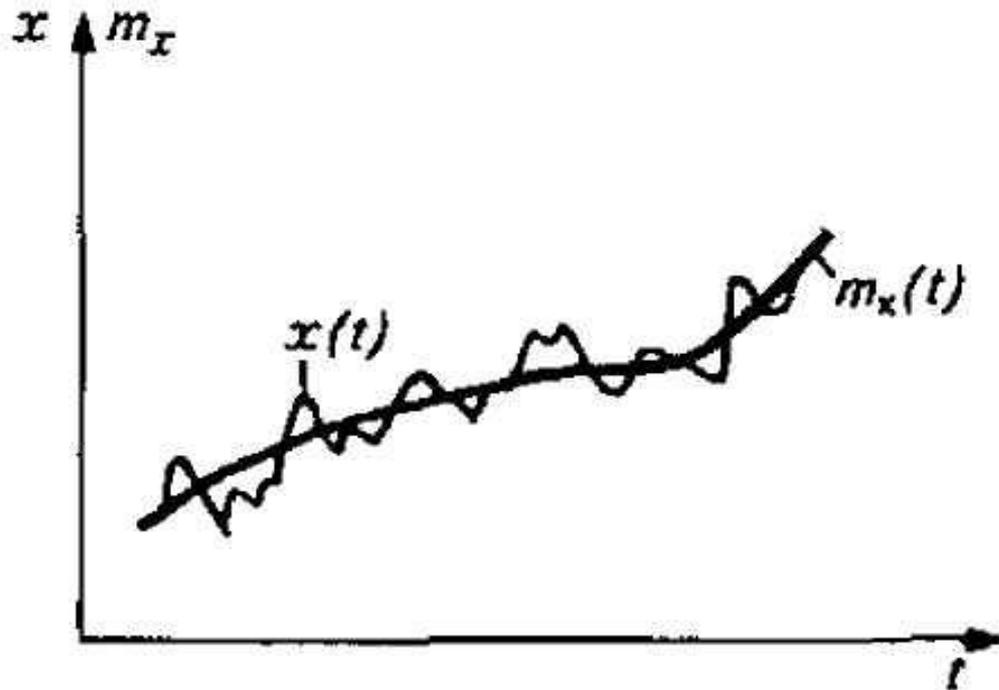


# Определение статических характеристик (пассивный метод).

Стохастические (случайные) изменения выходных величин нормально функционирующего объекта автоматизации обусловлены как случайными изменениями входных величин, так и процессами, происходящими в самом объекте, причем последующие значения случайно изменяющихся физических величин точно предсказать невозможно.

С математической точки зрения такие воздействия и процессы, ими вызываемые, рассматривают как случайные функции (СФ) времени. Значение их статических характеристик позволяет определить динамические характеристики объекта автоматизации и успешно решить задачу синтеза САР. При этом обычно достаточно использования теории СФ, характеристиками случайного процесса (СП) которой служат математическое ожидание (МО) и корреляционная функция (КФ).

# Математическое ожидание СП



$x(t)$  в момент времени  $t_i$  есть среднее арифметическое значение для  $N$  реализаций СП:

где  $i$  — номер реализации.

$$m_x(t_i) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i(t_i),$$

Математическое ожидание СП — детерминированная величина. Случайный процесс  $x(t)$ , МО которого равно нулю, называют центрированным,  $m[x(t)] = 0$ .

# Дисперсия

Интенсивность отклонения СП от МО. Ее определяют как среднее значение квадрата колебаний центрированного СП:

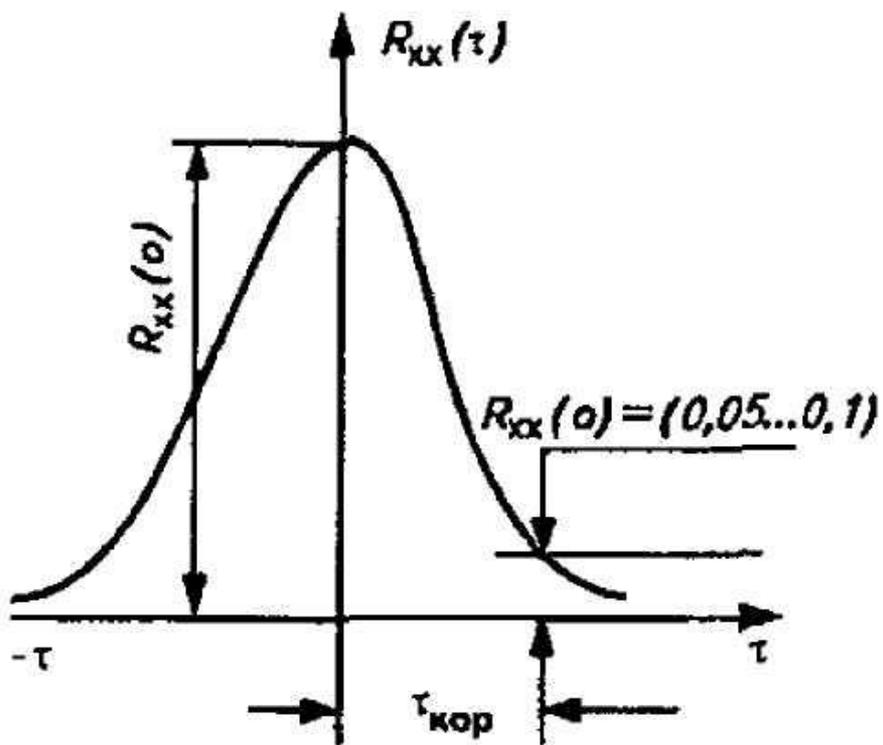
$$D_x(t_i) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \{x_i(t_i) - m_x(t_i)\}^2.$$

Дисперсия СП в момент  $t_i$  — детерминированная величина. Она всегда положительна. Вместо дисперсии часто используют среднее квадратическое отклонение СФ

$$\sigma_x(t_i) = \sqrt{D_x(t_i)}.$$

# Автокорреляционная функция

Автокорреляционная функция характеризует связь между значениями СП в разные моменты времени  $t_i$  и  $t_j$



$$R_{xx}(t_i, t_j) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N [x_i(t_i) - m_x(t_i)][x_j(t_j) - m_x(t_j)].$$

Случайные процессы могут быть стационарными и нестационарными. К группе нестационарных относятся СП, МО и КФ, которые зависят от времени, т. е. от точки отсчета.

Автокорреляционная функция  $R_{xx}(\tau)$  стационарного СП зависит только от интервала сдвига ( $\tau$ ) и не зависит от момента отсчета.

# Рекомендации по выбору метода построения модели объекта

1. Аналитический метод дает модель, применимую для всего класса однотипных объектов, позволяющую оценить влияние конструктивно-технологических параметров объекта на его статические и динамические характеристики.

Недостаток метода — невысокая точность, поскольку его использование требует существенных упрощений задачи.

2. Экспериментальный метод дает модель, отличающуюся большой точностью и значительно меньшими трудозатратами.

Недостатки метода — невозможность применить модель для другого объекта и оценить влияние отдельных конструктивно-технологических параметров на характеристики объекта.

Пассивный эксперимент применим при высоком уровне возмущающих воздействий и в случае невозможности организовать требуемое детерминированное воздействие. В остальных случаях активный эксперимент предпочтительнее.

3. Экспериментально-аналитический метод. В этом случае уравнения статики и динамики составляются аналитическими методами, а коэффициенты этих уравнений находят экспериментально на реально существующих объектах.