

***СТАТИСТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ
ПРОВЕРКИ ГИПОТЕЗ***

Основные определения

Генеральной совокупностью называется совокупность однородных (относительно некоторого признака) объектов, на которой **ставится** статистическая задача

Выборочной совокупностью (выборкой) называется совокупность случайно отобранных предметов из генеральной совокупности. Совокупность объектов, на которой **решается** статистическая задача

Объемом совокупности (выборочной или генеральной) называется число объектов этой совокупности ($n \ll N$)

Виды выборок

Определение. Выборки называются **независимыми (несвязными)**, если процедура эксперимента и полученные результаты измерения некоторого свойства у испытуемых одной выборки не оказывают влияния на особенности протекания этого же эксперимента и результаты измерения этого же свойства у испытуемых (респондентов) другой выборки.



Виды выборок

Определение. Выборки называется **зависимыми (связными)** если процедура эксперимента и полученные результаты измерения некоторого свойства, проведенные на одной выборке, оказывают влияние на другую.

Одна и та же группа испытуемых, на которой дважды проводилось обследование (пусть даже разных качеств, признаков, особенностей), по определению оказывается зависимой, или связной выборкой.

ШКАЛЫ

1. Номинальная шкала (шкала наименований)

- делит все объекты на группы по какому-либо признаку (различию).

Примеры шкалы наименований: пол, национальность, семейное положение, образование, здоровый – больной, левша – правша, тип темперамента, тип личности и т. п.



2. Шкала порядка (порядковая, ранговая, ординальная)

- предназначена для измерения (обозначения) степени различия какого-либо признака или свойства у разных объектов.

Пример.



Разновидности порядкового шкалирования (измерения):

- ранжирование (в ряд),
- группировка (ранжирование по группам),
- парное сравнение,
- метод рейтинга,
- метод полярных профилей.



3. Интервальная шкала (интервальное измерение)

– это такое присвоение чисел объектам, когда определено расстояние между объектами и предусмотрена общая для всех объектов постоянная единица измерения. Иначе говоря, в интервальной шкале вводится единица и масштаб измерения. Нулевая точка шкалы выбирается произвольно.

Пример.



4. Шкала отношений (пропорциональная шкала)

- отличается от интервальной только тем, что ее нулевая точка не произвольна, а указывает на полное отсутствие измеряемого свойства.

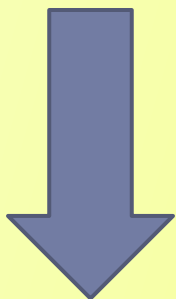
Примеры пропорциональных шкал:

расстояние, длина отрезков или физических объектов, время, температура по Кельвину (абсолютный нуль).

Возможны все арифметические действия.



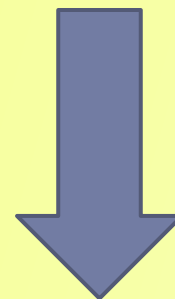
□ **Определение . Статистическая гипотеза** – это любое предположение о свойствах случайных величин или событий.



H_0 (подлежит проверке): отсутствие связи в генеральной совокупности

нулева

я



H_1 : наличие связи в генеральной совокупности

альтернативн

ая



Проверка статистических

гипотез в выборке, какие измерения?

1. Уровень статистической значимости

□ *Определение.* **Статистическая значимость (p-уровень значимости)** – количественная оценка надежности установленной связи.



Чем меньше значение p-уровня, тем выше статистическая значимость результата исследования, который подтверждает научную гипотезу

2. Статистический критерий и число степеней свободы

Определение . **Статистический критерий** – это инструмент для определения уровня статистической значимости гипотезы

Определение. **Число степеней свободы** – это количество возможных направлений изменчивости признака.

Зависит от:

- объема выборки,
- от числа изучаемых признаков

Определение. **Назначение критерия** – проверка статистической гипотезы путем определения p -уровня значимости



Структура статистического критерия

- формула расчета наблюдаемого (эмпирического) значения критерия по выборочным статистикам;
- правило определения числа степеней свободы;
- критическое значение критерия для данного числа степеней свободы;
- правило соотнесения наблюдаемого значения критерия с критическим для определения вероятности того, что H_0 верна.

Алгоритм проверки гипотезы

- Выбор критерия в зависимости от вида исходных данных и статистической гипотезы
- Расчет по исходным данным (или по имеющимся статистикам) наблюдаемого (эмпирического) значения критерия и числа степеней свободы
- Применение «Таблицы критических значений критерия» позволяет определить значение p -уровня для данного числа степеней свободы

Выбор метода статистической проверки гипотезы

Определяется:

- типом используемой шкалы
- количеством сравниваемых групп
- зависимостью или независимостью сравниваемых выборок

Классификация критериев

- **Непараметрические критерии статистики:** закон распределения выборок не известен , наблюдения независимые
- **Параметрические критерии :** вид распределения или функция распределения выборки нам заданы

Выбор критерия для проверки

Зависимость выборок		Независимые	Зависимые
Признак	метрический	Параметрические методы сравнения	
		t-Стьюдента, для независимых выборок	t-Стьюдента, для зависимых выборок
		Непараметрические методы сравнения	
	ранговый	Медианный критерий	Критерий знаков
	номинальный		Критерий Макнамара



Параметрические критерии

Критерий Стьюдента

! Распределение выборок – нормальное

Случай независимых выборок

n_1 - число элементов в первой выборке

n_2 - число элементов во второй выборке

Статистика критерия:

$$t_{\text{эмп}} = \frac{\bar{x} - \bar{y}}{\sigma_{x-y}}$$

□ \bar{x} \bar{y} - средние арифметические в экспериментальной и контрольной группах

$$\sigma_{x-y} = \sqrt{\frac{\sum(x_i - \bar{x})^2 + \sum(y_i - \bar{y})^2}{n_1 + n_2 - 2} \cdot \left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}$$

число степеней свободы: $k = n_1 + n_2 - 2$

Принятие решения:

1. Сравнить полученное значение $t_{\text{эмп}}$ с критическим значением t -распределения Стьюдента (приложение I).
2. Если $t_{\text{эмп}} < t_{\text{крит}}$, то гипотеза H_0 принимается, в противном случае нулевая гипотеза отвергается и принимается альтернативная гипотеза.

Пример:

Экспериментальная группа	Контрольная группа
12,13,9,8,12,10,11,9,9,6	11,8,10,12,15,12,10,5,4

Сформулировать нулевую и альтернативную гипотезы и проверить, какая верна

Случай связанных (парных) выборок

1. Вычислим: $d_i = y_i - x_i$

2. Вычислим: $d = \frac{\sum d_i}{n}$

3. Вычислим: $S_d = \sqrt{\frac{\sum d_i^2 - \frac{(\sum d_i)^2}{n}}{n(n-1)}}$

Статистика критерия: $t_{\text{эмп.}} = \frac{d}{S_d}$

Число степеней свободы $k = n - 1$

Принятие решения. Если $t_{\text{эмп}} < t_{\text{крит}}$, то нулевая гипотеза принимается, в противном случае принимается альтернативная.



Пример.

До начала работы	11, 9, 8,7, 8, 9, 12, 10, 11
После окончания	10,10,9, 8, 9, 8, 11, 12, 12

Данные тестирования до и после начала эксперимента. Сформулировать нулевую и альтернативную гипотезы и проверить, какая из них принимается



Непараметрические критерии

□ Критерий Макнамары

!!! Условия:

- выборки зависимые;
- для получения данных использовалась шкала наименований;
- выборки случайные;
- результаты измерений интересующего свойства не влияют друг на друга.

X - состояние некоторого свойства в рассматриваемой совокупности объектов при первичном измерении свойства.

Y – при вторичном измерении.

- X_1, X_2, \dots, X_M – до применения средства;
- Y_1, Y_2, \dots, Y_N – после применения средства.

Классификация x_i	Классификация y_i	
	$y_i = 0$	$y_i = 1$
	$x_i = 0$	a
$x_i = 1$	c	d

Гипотезы: $H_0: P(x_i = 0, y_i = 1) = P(x_i = 1, y_i = 0)$.

$H_1: P(x_i = 0, y_i = 1) \neq P(x_i = 1, y_i = 0)$.

Статистика критерия и принятие решения:

□ Если $n=b+c > 20$, то $t_{\text{эмп}} = \frac{(b-c)^2}{b+c}$

Если $t_{\text{эмп}} < 3.84$, то H_0 – принимается и альтернативная гипотеза отклоняется.

□ Если $n=b+c \leq 20$, то вычисляем $T2 = \min(b, c)$. По n и $T2$ находим $t_{\text{эмп}}$ по таблице на стр. III и сопоставляем это значение с $t_{\text{кр.}} = 0.025$.

Если $t_{\text{эмп}} < T_{\text{кр.}}$, то нулевая гипотеза отклоняется.

а) Если $b < c$, то принимается гипотеза $H1: P(x_i=0, y_i=1) < P(x_i=1, y_i=0)$.

б) Если $b > c$, то принимается гипотеза $H1: P(x_i=0, y_i=1) > P(x_i=1, y_i=0)$.

Пример 1.

- Проверка эффективности форм адаптационной работы среди учащихся первых классов. Эффективность каждого цикла работы выяснялась по отношению учащихся к обучению (ответы: да, нравится/ нет, не нравится). Из 150 человек отобрана выборка – 20 учащихся. Используется критерий Макнамары.

	<i>2 опрос</i>	
<i>1 опрос</i>	<i>Нрав.</i>	<i>Не нрав.</i>
<i>Нрав.</i>	$a=3$	$b=8$
<i>Не нрав.</i>	$c=3$	$d=6$

Задание: сформулировать гипотезы и проверить, какая принимается

Пример 2.

- В эксперименте 100 испытуемых. Проверяется наличие (отсутствие) качества в ходе двух последовательных срезов, между которыми - работа по формированию этого качества.

<i>1 срез</i>	<i>2 срез</i>		
	<i>наличие</i>	<i>отсутствие</i>	
<i>наличие</i>	$a=20$	$b=15$	$\Sigma=35$
<i>отсутствие</i>	$c=35$	$d=30$	$\Sigma=65$
	$\Sigma=55$	$\Sigma=45$	

Задание: сформулировать гипотезы и проверить, какая принимается

Критерий знаков (G-критерий)

- **Условия:**
- зависимые выборки
- шкала не ниже ранговой

Наблюдения над случайными переменными X и Y , полученные при рассмотрении двух зависимых выборок

Н₀: в состоянии изучаемого свойства нет значимых различий при первичном и вторичном измерениях

Н₁: законы распределения величин X и Y различны

□ **Статистика критерия:** $t_{эмп}$ – количество пар со знаком плюс, n – количество пар без нулей

! Нулевая гипотеза принимается на уровне значимости 0,025, если $t_{эмп} < n - t_a$ (см. приложение на стр. 112)

Пример: новый метод, два среза

Учащиеся (№)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Первое выполнение	2	2	2	2	2	3	3	3	3	3	2	2	3	3	3
Второе выполнение	2	3	3	4	3	2	3	4	4	3	4	3	2	4	4
Знак разности отметок	0	+	+	+	+	-	0	+	+	0	+	+	-	+	+

Задание: сформулировать гипотезы и проверить, какая принимается



Медианный критерий

УСЛОВИЯ:

- выборки независимые;
 - выборки случайные;
 - шкала измерений не менее порядковой;
 - Совокупный объем выборок не менее 40.
 - $x_1, x_2 \dots x_{N1}$ – состояния изучаемого свойства в первой совокупности; $y_1, y_2 \dots y_{N2}$ – состояния изучаемого свойства во второй совокупности.
- $N1$ - объем первой выборки; $N2$ - объем второй выборки;
 MeX – медиана совместной выборки.

Систематизация:

	Выборка 1	Выборка 2
$> \text{Me}X$	A	B
$\leq \text{Me}X$	C	D

Важно! Критерий можно применять, если $A, B, C, D \geq 5$.

H_0 : обе совокупности имеют одинаковую медиану (нет значимых различий между выборками);

H_1 : совокупности имеют различные медианы (существуют значимые различия между выборками).



Статистика критерия:

$$t_{\text{эмп}} = \frac{N(|AD - BC|)}{(A+B)(C+D)(A+C)(B+D)}$$

Принятие решения: H_0 принимается, если

$$t_{\text{эмп}} < 3.84.$$

Важно!

Если наблюдается достаточно большое количество значений выборок вблизи медианы, то следует использовать уточненное значение медианы.

Пример.

- Для сопоставления уровня развития визуальной памяти в двух классах были проведены замеры по шкале рангов. Результаты представлены в таблице:

Контр. класс	3	4	5	4	4	6	6	4	5	7	4	4	5	5	3
Экспер. класс	6	4	5	4	6	3	5	5	6	7	7	4	7	5	4
Контр. класс	4	2	7	6	5	5	5	4	6	3	4	5	4	4	6
Экспер. класс	7	3	5	7	5	5	6	4	6	7	4	4	3	5	6

Являются ли различия в уровне развития визуальной памяти у учащихся двух этих классов статистически значимыми?

