СТОЯЧИЕ ВОЛНЫ

СТОЯЧИЕ ВОЛНЫ

Наложение двух волн, бегущих в противоположные стороны

Положим, что две плоские волны, одинаковые по своим характеристикам, идут навстречу друг другу. Нас интересует возникающее колебательное движение среды, в которой распространяются волны.

Различие в направлении распределения учитывается различием в знаках координаты в уравнении волны.

СТОЯЧИЕ ВОЛНЫ

Наложение двух волн, бегущих в противоположные стороны

- Следовательно, результирующая картина смещения должна передаваться выражением

$$y = A\cos\omega\left(t - \frac{x}{c}\right) + A\cos\omega\left(t + \frac{x}{c}\right) =$$

$$= 2A\cos\frac{\omega x}{c}\cos\omega t = 2A\cos\frac{2\pi x}{\lambda}\cos\omega t$$

Результат вычисления весьма интересен. Сумма двух бегущих волн не дала волнового движения.

СТОЯЧИЕ ВОЛНЫ

Наложение двух волн, бегущих в противоположные стороны

- Полученная формула указывает на наличие колебаний с амплитудой $2A\cos\frac{2\pi x}{\lambda}$, разной в разных местах пространства. Своеобразное колебательное состояние среды, возникающее при движении в противоположные стороны двух одинаковых бегущих волн, носит название ***стоячей волны***. Еще раз подчеркнем, что стоячая волна не есть волна.

СТОЯЧИЕ ВОЛНЫ

Наложение двух волн, бегущих в противоположные стороны

Бегущая волна переносит энергию, в стоячей волне никакой передачи энергии от точки к точке нет; бегущая волна может двигаться вправо или влево, у стоячей волны нет направления распространения. Это название характеризует колебательное состояние среды.

В чем же особенности этого колебательного состояния?

СТОЯЧИЕ ВОЛНЫ

Наложение двух волн, бегущих в противоположные стороны

- Прежде всего, мы видим, что колеблются не все точки среды. В местах пространства, удовлетворяющих условию $x = \frac{\lambda}{4}, \frac{3\lambda}{4}, \frac{5\lambda}{4}, \ldots,$ амплитуда колебания равна нулю. Соответствующие места носят название *узлов* стоячей волны. Расстояние между двумя соседними узлами вдоль оси *x*, по которой были пущены бегущие волны, равно половине длины волны.

СТОЯЧИЕ ВОЛНЫ

Наложение двух волн, бегущих в противоположные стороны

Между двумя узлами лежат точки, которые колеблются с наибольшей амплитудой, равной *2A*. Эти точки называются *пучностями* стоячей волны.

На следующем слайде представлено колебательное состояние, соответствующее стоячей волне. Мы видим, что название вполне оправдано. В каждое мгновение видна волна. При этом волна стоит на месте.

СТОЯЧИЕ ВОЛНЫ

Наложение двух волн, бегущих в противоположные стороны

Разумеется, картина стоячей волны не имеет ничего общего с бегущей волной. Там волна движется, максимумы и минимумы волны в каждое следующее мгновение переходят в новые места.

Мы сказали, что в стоячей волне передачи энергии нет. Как описать тогда в терминах энергии процессы, происходящие в этом своеобразном колебательном движении?

СТОЯЧИЕ ВОЛНЫ

Наложение двух волн, бегущих в противоположные стороны

Очевидно, что энергия стоячей волны (какой-либо области, в которой она существует) есть величина постоянная.

В тот момент, когда все точки проходят положение равновесия, вся энергия точек, захваченных колебанием, является кинетической. Напротив, в положении максимального отклонения точек от положения равновесия энергия всех точек тела является потенциальной.

СТОЯЧИЕ ВОЛНЫ

Наложение двух волн, бегущих в противоположные стороны

В ограниченном теле возникает сложное ко лебательное состояние, являющееся результатом наложения на исходную волну всех других волн, которые отразились от стенок и вернулись в среду. Ряд типичных случаев будет сейчас рассмотрен.

СТОЯЧИЕ ВОЛНЫ

Собственные колебания стержней

Ударом или иным способом в каждом твердом стержне можно возбудить продольную упругую волну, распространяющуюся вдоль его длины. От противоположного конца стержня эта волна отра зится, и, таким образом, весь стержень придет в колебательное состояние, изображаемое стоячей волной. Это колебательное состояние будет свободным, так как оно возникнет благодаря кратковременному импульсу и будет далее продолжаться без действия внешних сил.

СТОЯЧИЕ ВОЛНЫ

Собственные колебания стержней

Ряд сведений о характере этих свободных колебаний мы получим, если положим известной длину стержня и укажем способ его закрепления. Длина стержня и способ его закрепления дают нам так называемые граничные условия. Они сводятся к следующему: в закрепленном месте стержня существует узел стоячей волны, на открытом конце стержня образуется пучность стоячей волны.

СТОЯЧИЕ ВОЛНЫ

Собственные колебания стержней

- Рассмотрим несколько способов возбуждения продольных свободных колебаний в стержне с длиной L.

Стержень, закрепленный в обоих концах.

В этом случае на концах стержня должны образоваться узлы волны смещений. Так как расстояние между узлами равно половине длины волны, то возможные длины волн связаны с длиной стержня условием $L = n\frac{\lambda}{2}$, т. е. $\lambda_n = \frac{2L}{n}$, где *n* - любое целое число.

СТОЯЧИЕ ВОЛНЫ

Собственные колебания стержней

- Стержень, закрепленный в обоих концах.

Используя для скорости упругой волны выражение $c = \sqrt{E/\rho}$ и вспоминая связь частоты с длиной волны, получим выражение для собственных частот свободных продольных колебаний стержня

$$\nu_n = \frac{n}{2L}\sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

СТОЯЧИЕ ВОЛНЫ

Собственные колебания стержней

Стержень, закрепленный в обоих концах.

Прежде всего необходимо подчеркнуть принципиально новый для нас результат. Сплошное тело имеет не одну, а множество соб ственных (характеристических) частот колебания. Соответственно с этим разнообразны возможные свободные колебания стержня. Стержень может также совершать негармонические колебания с любым спектром, составленным из частот ν_n.

СТОЯЧИЕ ВОЛНЫ

Собственные колебания стержней

Стержень, закрепленный в обоих концах.

Частота ν_1 является основной частотой колебания стержня. Ей соответствует колебательное движение с условием $L=\lambda/2$. Это значит, что при основном колебании центр стержня лежит в пучности стоячей волны, а узлов между концами стержня нет. Колебанию во втором обертоне (вторая гармоника) соответствует условие $L=\lambda$. Теперь в центре стержня имеется узел.

СТОЯЧИЕ ВОЛНЫ

Собственные колебания стержней

Стержень, закрепленный в обоих концах.

Если возбуждена третья гармоника, то между концами стержня будут лежать два узла, и т. д.

Пример.

Для железного стержня (ρ = 7700 кг/м^3, Е=20,6·10^{10} Н/м^2) длиной 7 м основная частота ν_1 = 365 Гц.

СТОЯЧИЕ ВОЛНЫ

Собственные колебания стержней

- Стержень, свободный с обоих концов.

Если стержень подвесить на нитях, а затем возбудить в нем колебания, то на обоих его концах возникнет пучность стоячей волны. Так же как и в предыдущем случае, между длиной стержня и длинами волн возникает связь: $L = n\frac{\lambda}{2}$.

Следовательно, формула собственных частот будет той же самой.

Отличие от предыдущего случая заключается в распределении узлов и пучностей.

СТОЯЧИЕ ВОЛНЫ

Собственные колебания стержней

Стержень, свободный с обоих концов.

В основном колебании центр стержня покоится (узел). Если возбуждена вторая гармоника, то в центре стержня будет пучность, далее через четверть длины волны — узлы и на краях — пучности.

СТОЯЧИЕ ВОЛНЫ

Собственные колебания стержней

- Стержень, закрепленный в одном конце.

В этом случае на одном конце должен быть узел, а на другом — пучность. При колебании с основной частотой стержень имеет форму, соответствующую одной четверти периода синусоиды. Так как расстояние между узлом и пучностью равно $\lambda/4$, то связь между длинами волн и длиной стержня дается условием

$$L = (2n - 1)\frac{\lambda}{4},$$

СТОЯЧИЕ ВОЛНЫ

Собственные колебания стержней

- Стержень, закрепленный в одном конце.

Здесь $n = 1, 2, 3, \ldots$

Собственные частоты колебаний такого стержня выразятся формулой

$$\nu_n = \frac{2n-1}{4L}\sqrt{\frac{E}{\rho}} \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

Если в первых двух случаях частоты относились друг к другу, как целые числа, то теперь отношение частот есть нечетное число.

СТОЯЧИЕ ВОЛНЫ

Собственные колебания стержней

Стержень, закрепленный в середине, будет в этом месте иметь узел, а на концах - пучности. Задача ничем не отличается от рассмотренной.

Как было выяснено ранее, при отражении от границы, отделяющей среду от среды с большим сопротивлением, происходит отражение волны смещения с потерей полуволны. Если стержень закреплен, то волна вовсе не проникает во вторую среду. В этом случае можно говорить о бесконечно большом сопротивлении второй среды.

СТОЯЧИЕ ВОЛНЫ

Собственные колебания стержней

Коэффициент отражения становится равным единице и отражение происходит с потерей полуволны. Нетрудно видеть, что это соответствует наличию узла на границе двух сред. Отражение волны от незакрепленного конца стержня соответствует отражению от среды с нулевым сопротивлением. Равенство коэффициента отражения единице и отсутствие потери полуволны приводят к необходимости существования пучности на такой границе.

СТОЯЧИЕ ВОЛНЫ

Собственные колебания стержней

Продольные собственные колебания могут быть также возбуждены в столбах жидкости и газа.

Поперечные колебания легко возбудить в зажатой и натянутой струне. Распределение узлов и пучностей будет таким же, как и для закрепленного с обоих концов стержня. Набор частот выразится формулой, аналогичной приведенной для стержня, с тем лишь различием, что в выражении скорости поперечной волны в струне надо заменить ***E*** на натяжение струны.

СТОЯЧИЕ ВОЛНЫ

Собственные колебания двумерных и трехмерных систем

В стержнях, струнах, воздушных столбах поверхности равной фазы представляют собой параллельные плоскости. Колебательное состояние можно представить себе как результат наложения плоских волн, распространяющихся вдоль одной линии. Однако возможны и более сложные случаи, а именно такие, когда колеба тельным движением захвачена двумерная область или тело, все три размера которого имеют одинаковый порядок величины.

СТОЯЧИЕ ВОЛНЫ

Собственные колебания двумерных и трехмерных систем

С двумерными задачами мы сталкиваемся, рассматривая колебания упругих и жестких диафрагм. Колебания разного типа возникнут, если в одном случае закрепить пластинку по краям, а в другом - укрепить ее в одной точке или не закреплять вовсе. Кроме колебаний жестких пластинок наблюдают колебания натянутых нежестких пленок - резиновых, мыльных и пр.

СТОЯЧИЕ ВОЛНЫ

Собственные колебания двумерных и трехмерных систем

Общие закономерности свободных колебаний в этом случае в принципе не отличаются от рассмотренных. Ввиду двумерности задачи положение узлов и пучностей должно характеризоваться теперь кривыми линиями. Например, круглая закрепленная по краям пластинка совершает основное колебание, имея единственную пучность в центре круга.

СТОЯЧИЕ ВОЛНЫ

Собственные колебания двумерных и трехмерных систем

Центральная точка колеблется с максимальной амплитудой, а далее амплитуда спадает к закрепленным краям с сохранением круговой симметрии. Так выглядит простейшее колебание основной частоты. Мембрана может быть возбуждена и в более высоких гармониках, тогда поверхность ее разбивается на участки узловыми линиями. Оказывается, что узловые линии у круглых пластинок могут иметь форму либо окружностей, либо диаметров.

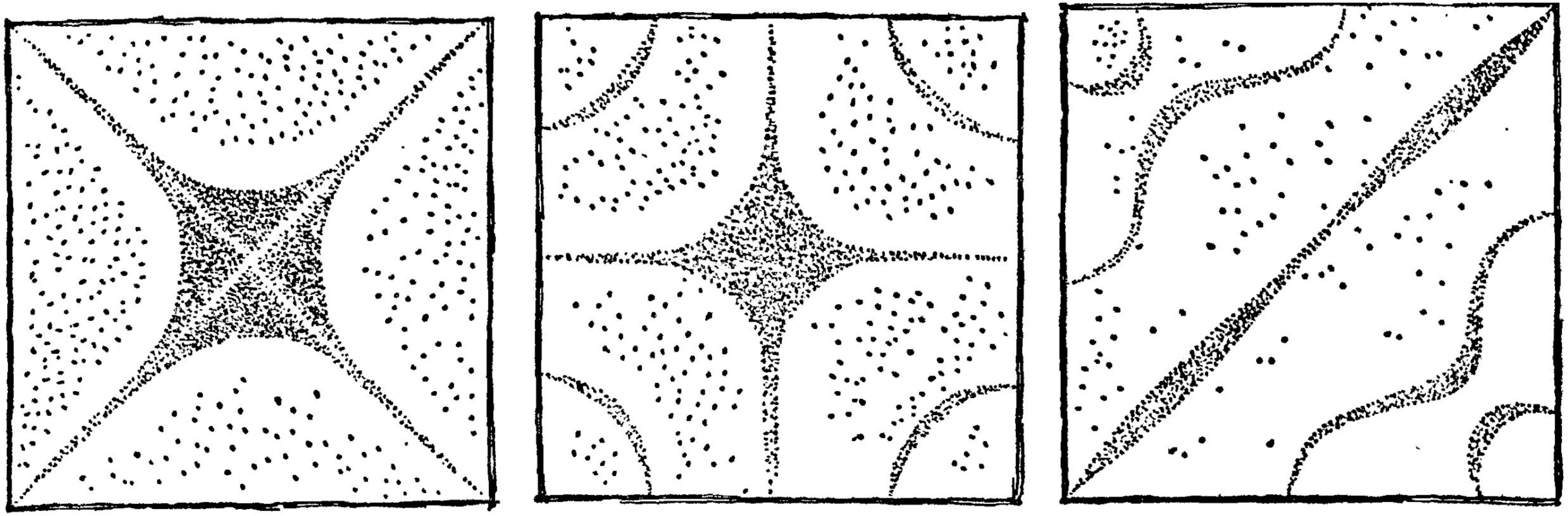
СТОЯЧИЕ ВОЛНЫ

Собственные колебания двумерных и трехмерных систем

Эффектным и простым опытом является демонстрация узловых линий способом Хладни (по имени ученого, предложившего этот способ). Пластинку посыпают песком, а затем ударом или смычком приводят в колебательное состояние. Песок скатывается с пучностей и собирается на узловых линиях. На следующем слайде показано несколько примеров фигур Хладни.

СТОЯЧИЕ ВОЛНЫ

Собственные колебания двумерных и трехмерных систем



СТОЯЧИЕ ВОЛНЫ

Собственные колебания двумерных и трехмерных систем

Естественно, наиболее сложным является колебательное состояние сплошного трехмерного тела. Мы ограничимся изучением собственных колебаний прямоугольного параллелепипеда. Если бы в таком теле существовали только стоячие волны, возникшие благодаря сложению волн, бегущих параллельно ребру параллелепипеда, то собственные частоты колебаний ограничивались бы значениями

СТОЯЧИЕ ВОЛНЫ

Собственные колебания двумерных и трехмерных систем

- $$\frac{n_1 c}{2l_1}, \qquad \frac{n_2 c}{2l_2}, \qquad \frac{n_3 c}{2l_3},$$

а волновые числа (так называют величины, обратные длине волны) будут равны

$$k_1 = \frac{n_1}{2l_1}, k_2 = \frac{n_2 c}{2l_2}, k_3 = \frac{n_3 c}{2l_3},$$

где n_1, n_2, n_3 - любые целые числа, а l_1, l_2, l_3 - длины ребер параллелепипеда.

СТОЯЧИЕ ВОЛНЫ

Собственные колебания двумерных и трехмерных систем

- Однако в теле могут распространяться волны, идущие под произвольным углом к границам. Стоячие волны образуются в том случае, если после ряда отражений луч придет в ту же точку, из которой он вышел. Волновое число такого луча должно вычисляться из k_1, k_2, k_3 по правилу сложения векторов. Таким образом,

$$k = \sqrt{k_1^2 + k_2^2 + k_3^2}, \text{ т. е. } \nu = \frac{c}{2}\sqrt{\frac{n_1^2}{l_1^2} + \frac{n_2^2}{l_2^2} + \frac{n_3^2}{l_3^2}}$$

СТОЯЧИЕ ВОЛНЫ

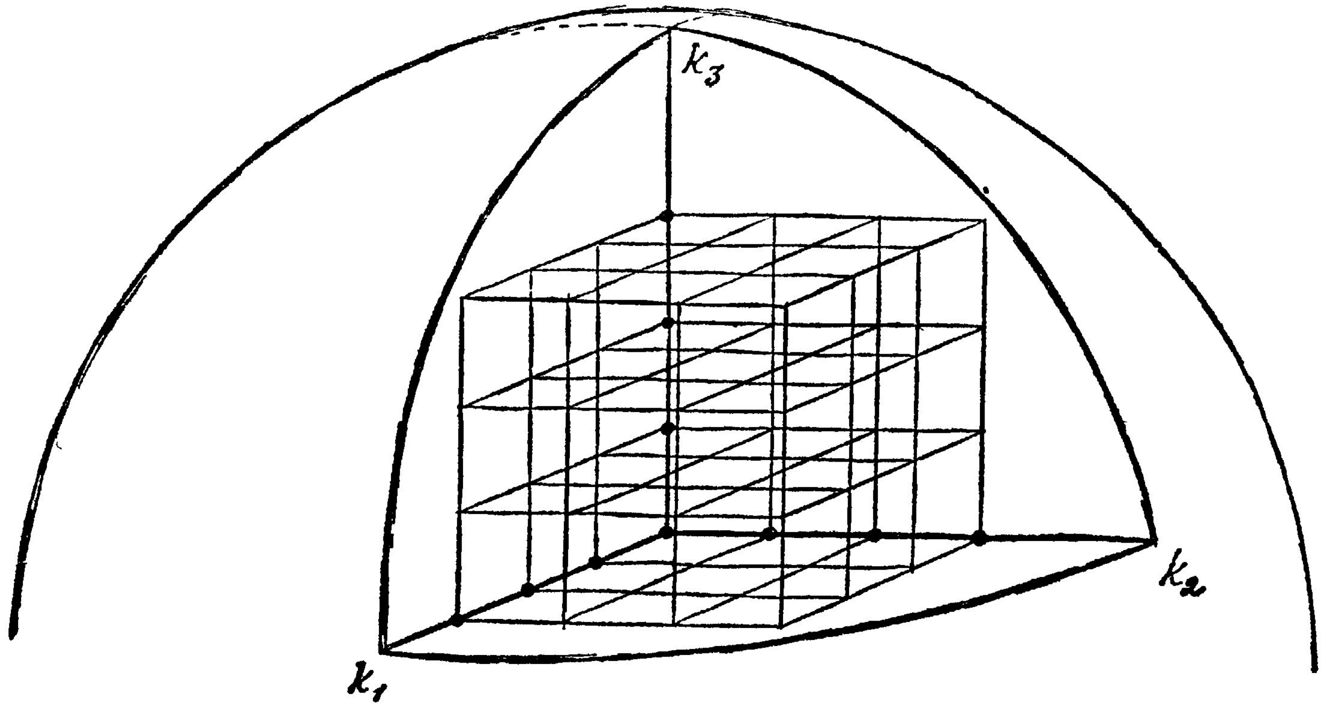
Собственные колебания двумерных и трехмерных систем

Ясно, что частоты колебаний для простейших случаев распространения волн параллельно ребрам тела также получатся из этой формулы, если положить отличным от нуля лишь одно из трех целых чисел, входящих в формулу.

Спектр колебания трехмерного тела изображается в трехмерном пространстве, как это показано на следующем слайде, которое можно назвать пространством частот, или обратным пространством.

СТОЯЧИЕ ВОЛНЫ

Собственные колебания двумерных и трехмерных систем



СТОЯЧИЕ ВОЛНЫ

Собственные колебания двумерных и трехмерных систем

Если величины k_1, k_2, k_3 откладывать соответственно по трем осям, то возникнет решетка (обратная решетка), каждый узел которой представляет одну из собственных частот колебания тела за номерами n_1, n_2, n_3. Радиус-вектор обратного пространства, проведенный в узел решетки, равняется возможной частоте колебания. Если провести сферу радиусом ν, то в нее попадут все точки, изображающие частоты, меньшие ν.

СТОЯЧИЕ ВОЛНЫ

Собственные колебания двумерных и трехмерных систем

- Объем такой сферы равен $^4/_3\pi\nu^3$, объем каждой ячейки обратной решетки равен $(c/2)^3/v$, где v - объем тела. Следовательно, число собственных колебаний тела с частотами, меньшими ν (число узлов в октанте сферы), выражается формулой

$$\frac{4}{3}\pi v \cdot \frac{\nu^3}{c^3}$$

СТОЯЧИЕ ВОЛНЫ

Собственные колебания двумерных и трехмерных систем

Эта интересная закономерность показывает, что число собственных частот резко возрастает, если мы начнем увеличивать интервал частот, подлежащий рассмотрению. При больших частотах дискретный характер спектра начинает смазываться, частоты становятся весьма близкими друг к другу.

СТОЯЧИЕ ВОЛНЫ

Вынужденные колебания стержней и пластинок

Если колебания стержня, пластинки или иного тела происходят не в вакууме, а в какой-либо среде, жидкой или газообразной, то некоторая часть интенсивности, зависящая, как нам известно, от отношения волновых сопротивлений соприкасающихся сред, переходит из колеблющегося тела в среду. Можно выразить эту же мысль короче: колеблющееся тело излучает энергию. Благодаря излучению свободные колебания стержня, струны и пр. быстро за тухают.

СТОЯЧИЕ ВОЛНЫ

Вынужденные колебания стержней и пластинок

Если нужно, чтобы такое тело являлось постоянным источником излучения, то колебания следует возбуждать посторонним источником. Так же как и в случае колебаний точки, подведение энергии может произойти как по схеме автоколебаний, так и созданием вынужденных колебаний.

В зависимости от способа и места подведения внешней энергии можно возбудить, вообще говоря, любую из частот или любую комбинацию собственных частот способного колебаться тела.

СТОЯЧИЕ ВОЛНЫ

Вынужденные колебания стержней и пластинок

Так, например, если около натянутой стальной струны укрепить электромагнит, питаемый синусоидальным током от звукового генератора, то под действием периодически меняющейся внешней поперечной силы возникнут колебания струны. Заметными они станут лишь в случае резонанса. Подбирая разные натяжения струны и варьируя внешнюю частоту, можно продемонстрировать колебание струны как на основной частоте, так и на обертонах.

СТОЯЧИЕ ВОЛНЫ

Вынужденные колебания стержней и пластинок

Огромное практическое значение имеет создание вынужденных колебаний (стоячих волн) в пье зоэлектрических пластинках и ферромагнитных стержнях. Эти колеблющиеся тела являются источниками ультразвуковых волн.

Ферромагнитные тела обладают свойством удлиняться или укорачиваться под действием магнитного поля (эффект магнитострикции).

СТОЯЧИЕ ВОЛНЫ

Вынужденные колебания стержней и пластинок

Так, никель и отожженный кобальт укорачиваются в полях любой напряженности, литой кобальт в слабых полях укорачивается, а в сильных удлиняется и, наконец, железо удлиняется в слабых полях и укорачивается в сильных. Так или иначе, любой ферромагнитный стержень будет способен совершать вынужденные колебания при внесении в переменное магнитное поле. Для этой цели стержень помещают обычно в отверстие сердечника трансформатора, через который проходит переменный ток.

СТОЯЧИЕ ВОЛНЫ

Вынужденные колебания стержней и пластинок

- Чтобы стоячая волна в стержне была достаточно сильной, необходимо работать в условиях резонанса: частота переменного поля должна совпадать с собственной частотой колебания стержня.

Так как стержень закрепляют в середине, то собственная частота колебаний

$$\nu = \frac{n}{2l}c$$

причем стержень может совершать колебания только на нечетных гармониках.

СТОЯЧИЕ ВОЛНЫ

Вынужденные колебания стержней и пластинок

- Основная частота для никеля, если подставить значения физических констант, окажется равной

$$\nu = \frac{237}{l}\ \text{кГц}\ (l\ -\text{в сантиметрах})$$

Так, основная частота стержня длиной 40 см составляет 6 кГц.

Магнитострикционные вибраторы используются, когда требуется получить низкочастотные колебания большой интенсивности.

СТОЯЧИЕ ВОЛНЫ

Колебания пьезоэлектриков

Если же требуются высокочастотные колебания небольшой мощности, применяются *электрострикционные* устройства на основе *пьезоэлектриков*.

Все кристаллы, не обладающие центром симметрии, могут демонстрировать пьезоэлектрический эффект. Это явление заключается в изменении размеров кристалла под действием электрического поля и, обратно, в возникновении электрического поля в кристалле под действием приложенных к кристаллу сил.

СТОЯЧИЕ ВОЛНЫ

Колебания пьезоэлектриков

При использовании пьезоэлектрика в качестве источника колебаний мы, естественно, интересуемся первым явлением, называемым также *электрострицией*, или *обратным пьезоэлектрическим эффектом***.** В качестве пьезоэлектриков употребляют кварц, сегнетову соль, титанат бария, ЦТС, дигидрофосфат аммония и другие кристаллы. Вообще говоря, имеются сотни известных веществ, которые могли бы в принципе использоваться для той же цели.

СТОЯЧИЕ ВОЛНЫ

Колебания пьезоэлектриков

Однако наличие дополнительных требований (прочность, устойчивость к влаге и пр.), а также, разумеется, желание выбрать кристаллы, дающие наиболее сильный эффект, резко ограничивают практический список веществ.

Кристалл, помещенный в электрическое поле, меняет свои размеры в разных направлениях (по отношению к осям симметрии кристалла) по-разному.

СТОЯЧИЕ ВОЛНЫ

Колебания пьезоэлектриков

Поэтому, вырезая из кристалла стержни или пластинки, различно ориентированные по отношению к осям кристалла, и помещая их между обкладками конденсатора, мы будем получать деформации разного типа. Чаще всего вырезают пластинку кварца или другого пьезоэлектрика таким образом, чтобы под действием электрического поля в ней происходили продольные сме щения. Тогда под действием переменного электрического поля в такой пластинке возникнут вынужденные стоячие продольные волны.

СТОЯЧИЕ ВОЛНЫ

Колебания пьезоэлектриков

- Если l - толщина пластинки в направлении движения волны, то собственные частоты колебания представятся, как обычно, формулой

$$\nu = \frac{nc}{2l}.$$

Для кварца в этой простейшей ориентировке скорость упругих волн равна 5400 м/с. Следовательно, основная собственная частота колебания кварцевой пластинки найдется по формуле

$$\nu = \frac{2700}{l} \text{ кГц } (l - \text{в сантиметрах})$$

СТОЯЧИЕ ВОЛНЫ

Колебания пьезоэлектриков

(опыт дает несколько иное значение: 2880/l кГц).

Амплитуды колебаний зависят от величины прикладываемого поля. Между величиной смещения и напряженностью электрического поля существует линейная зависимость. Прибегают к довольно сильным полям. Кварц - превосходный изолятор, поэтому при толщинах до сантиметра применяются электрические поля порядка 30 000 В/см.

Основным в получении сильного ультразвукового сигнала является резонансный эффект.

СТОЯЧИЕ ВОЛНЫ

Колебания пьезоэлектриков

Смещения под действием статического поля в тысячи раз меньше резонансных смещений, а ведь энергия колебания пропорциональна квадрату смещения.

Если повышать частоту генератора, можно последовательно возбудить пластинку на всех ее обертонах. Частоты наиболее распространенных промышленных ультразвуковых генераторов лежат в пределах от сотен до тысяч килогерц.